S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 9, стр. 45–64 (2012) УДК 517.9
MSC 35R30

ОБ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ С ПАРАМЕТРОМ

Ю.Е. АНИКОНОВ, М.В. НЕЩАДИМ

Abstract. We propose new approaches of investigation of inverse problems for equations of mathematical physics with parameter. We reduce the investigation of inverse problems for linear equations of hyperbolic and parabolic type to investigation of the Abel integral equations of the first kind. We obtain differential and integro-differential equations not containing unknown coefficients for nonlinear equations of elliptic type.

Keywords: inverse problems of mathematical physics, analytical methods of solution, problems with parameter, integral equations.

В данной работе излагаются новые подходы изучения обратных задач для уравнений гиперболического, параболического и эллиптического типа с параметром. Рассматриваются линейные и нелинейные обратные задачи. В случае гиперболических и параболических уравнений, предполагая зависимость решения уравнения от параметра, удается при некоторых ограничениях свести общие линейные обратные задачи к конкретным интегральным уравнениям первого рода типа Абеля с последующим аналитическим продолжением. При этом общность заключается в том, что функция источника зависит не только от x, но и от t при ограничении компактности ее носителя. В случае нелинейных

Anikonov, Yu.E., Neshchadim, M.V., On inverse problems for equations of mathematical physics with parameter.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 09-01-00422а), Междисциплинарной интеграционной программы фундаментальных исследований СО РАН (проект 81), Математического отделения РАН (проект 1.3.8), Программы фундаментальных исследований СО РАН (проект 93).

Поступила 18 мая 2011 г., опубликована 24 января 2012 г.

обратных задач для эллиптических уравнений, содержащих параметр, выписаны системы и интегродифференциальные уравнения, не содержащие искомого коэффициента, что открывает путь к исследованию таких обратных задач. В одномерном случае сформулирована и доказана теорема существования решения при условии аналитичности. Работа является продолжением исследований, которые содержатся в работах [1–5].

Дополнительно заметим, что в многофазных средах различные частицы имеют разные коэффициенты диффузии, что приводит к параболическим уравнениям с переменным параметром — коэффициентом диффузии. При этом, разумеется, измерение начально-краевых данных в зависимости от параметра является весьма деликатным делом. Что касается гиперболических уравнений, то переменным параметром здесь может служить набор скоростей различных волн. Для эллиптических уравнений переменный параметр — частота либо коэффициент преобразования по пространственной переменной, как, например, в задаче электроразведки [9].

Сначала рассматривается обратная задача для одномерного параболического уравнения с параметром p:

Найти решение $w = w(x,p,t)$, $-\infty < x < \infty$, $t > 0$, $p \geq 0$ и финитную непрерывную функцию $\lambda(x,t)$ с компактным носителем в области $x > 0$, $t > 0$ такие, что

$$\frac{\partial w}{\partial t} = p^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \lambda(x,t)\alpha(p), \tag{1}$$

$$w|_{t=0} = 0, \tag{2}$$

$$w|_{x=0} = \varphi(p,t), \tag{3}$$

где функции $\alpha(p) \neq 0$, $p \geq 0$, $\varphi(p,t)$, $\varphi(p,0) = 0$, заданы.

Здесь и в дальнейшем ради простоты изложения считаем начальные условия нулевыми.

Приведем схему исследования данной обратной задачи.

По формуле Пуассона решения задачи Коши (1), (2) для уравнения теплопроводности имеем

$$w(x,p,t) = \frac{\alpha(p)}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda\left(x + 2py\sqrt{t-\tau}, \tau\right) e^{-y^2} dy d\tau.$$

Положим $x = 0$. С учетом (3) и того, что компактный носитель функции $\lambda(x,t)$ сосредоточен в области $x > 0$, $t > 0$, получим соотношение

$$\psi(p,t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^{\infty} \lambda\left(2py\sqrt{t-\tau}, \tau\right) e^{-y^2} dy d\tau,$$

где левая часть $\psi(p,t) = \sqrt{\pi}\varphi(p,t)/\alpha(p)$ корректно определена, так как $\alpha(p) \neq 0$, $p \geq 0$.

Делаем преобразование Меллина по параметру p для $0 < s < 1$:

$$\widehat{\psi}(s,t) \equiv \int\limits_0^{\infty} \psi(p,t) p^{s-1} dp = \int\limits_0^t \int\limits_0^{\infty} \int\limits_0^{\infty} \lambda\left(2py\sqrt{t-\tau}, \tau\right) e^{-y^2} p^{s-1} dp dy d\tau.$$

Так как

$$\int_0^\infty \lambda\left(2py\sqrt{t-\tau},\tau\right)p^{s-1}dp = \frac{1}{s}\int_0^\infty \lambda\left(2py\sqrt{t-\tau},\tau\right)dp^s =$$

$$= \frac{1}{s}\int_0^\infty \lambda\left(2py\sqrt{t-\tau},\tau\right)\frac{1}{(2y\sqrt{t-\tau})^s}d(2py\sqrt{t-\tau})^s =$$

$$= \frac{1}{s(2y\sqrt{t-\tau})^s}\int_0^\infty \lambda(q,\tau)\,dq^s = \frac{1}{(2y\sqrt{t-\tau})^s}\int_0^\infty \lambda(q,\tau)\,q^{s-1}dq = \frac{\widehat{\lambda}(s,\tau)}{(2y\sqrt{t-\tau})^s},$$

то

$$\widehat{\psi}(s,t) = \int_0^t\int_0^\infty \frac{\widehat{\lambda}(s,\tau)}{(2y\sqrt{t-\tau})^s}e^{-y^2}dyd\tau = \frac{1}{2^s}\int_0^t \frac{\widehat{\lambda}(s,\tau)}{(t-\tau)^{s/2}}d\tau\cdot\int_0^\infty y^{-s}e^{-y^2}dy =$$

$$= \frac{1}{2^{s+1}}\int_0^t \frac{\widehat{\lambda}(s,\tau)}{(t-\tau)^{s/2}}d\tau\cdot\int_0^\infty z^{-\frac{1+s}{2}}e^{-z}dz = \frac{\Gamma\left(\dfrac{1-s}{2}\right)}{2^{s+1}}\int_0^t \frac{\widehat{\lambda}(s,\tau)}{(t-\tau)^{s/2}}d\tau,$$

где $\Gamma\left(\dfrac{1-s}{2}\right)$ — гамма-функция Эйлера. Поэтому при фиксированном s, $0 < s < 1$, получаем интегральное уравнение Абеля относительно функции $\widehat{\lambda}(s,\tau)$:

$$g(s,t) = \int_0^t \frac{\widehat{\lambda}(s,\tau)}{(t-\tau)^{s/2}}d\tau,$$

с левой частью $g(s,t) = 2^{s+1}\dfrac{\widehat{\psi}(s,t)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}$. Решение $\widehat{\lambda}(s,\tau)$ данного уравнения Абеля имеет вид

$$\widehat{\lambda}(s,t) = \frac{1}{\pi}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{g(s,\tau)}{(t-\tau)^{1-s/2}}d\tau.$$

В силу того, что функция $\lambda(x,t)$ финитная, функция $\widehat{\lambda}(s,t)$ для каждого фиксированного t — целая функция по переменной s. Поэтому $\widehat{\lambda}(s,t)$ аналитически продолжается на весь промежуток $-\infty < s < \infty$ как целая функция экспоненциального типа. Обозначим это продолжение через $\widehat{\lambda}_0(s,t)$. Делая обратное преобразование Меллина, по продолжению $\widehat{\lambda}_0(s,t)$ находим $\lambda(x,t)$.

Таким образом, данная обратная задача редуцируется к обращению уравнения Абеля и аналитическому продолжению по переменной s с последующим обращением преобразования Меллина, что содержит элементы некорректности. В дальнейшем такая ситуация будет повторяться с усложнениями и в других линейных задачах.

Многомерный вариант предыдущей задачи формулируется так:

Найти решение $w = w(x,z,p,t)$, $x = (x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n$, $-\infty < z < \infty$, $t > 0$, $p \geq 0$ и финитную непрерывную функцию $\lambda(x,z,t)$ с компактным носителем в области $x \in \mathbb{R}^n$, $z > 0$, $t > 0$ такие, что

$$\frac{\partial w}{\partial t} = p^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \Delta w + \lambda(x,z,t)\alpha(p), \tag{4}$$

$$w|_{t=0} = 0, \tag{5}$$

$$w|_{z=0} = \varphi(x,p,t), \tag{6}$$

где функции $\alpha(p) \neq 0$, $p \geq 0$, $\varphi(x,p,t)$, $\varphi(x,p,0) = 0$, заданы и $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + ... + \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2}$.

Схема исследования приводится ниже.

По формуле Пуассона решения задачи Коши уравнения теплопроводности имеем

$$w(x,z,p,t) = \frac{\alpha(p)}{\pi^{n/2}} \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda\left(x + 2\xi\sqrt{t-\tau}, z + 2py\sqrt{t-\tau}, \tau\right) e^{-\xi^2} e^{-y^2} d\xi dy d\tau.$$

Здесь $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ и $\xi^2 = \xi_1^2 + ... + \xi_n^2$.

Положим $z = 0$. С учетом (6) и того, что компактный носитель функции $\lambda(x,z,t)$ с сосредоточен в области $x \in \mathbb{R}^n$, $z > 0$, $t > 0$, получим соотношение

$$\psi(x,p,t) = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_0^{\infty} \lambda\left(x + 2\xi\sqrt{t-\tau}, 2py\sqrt{t-\tau}, \tau\right) e^{-\xi^2} e^{-y^2} d\xi dy d\tau,$$

где левая часть $\psi(x,p,t) = \pi^{n/2}\varphi(x,p,t)/\alpha(p)$ корректно определена, в силу того, что $\alpha(p) \neq 0$, $p \geq 0$.

Сначала сделаем преобразование по переменной x:

$$\widetilde{\psi}(\omega,p,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x,p,t) e^{-i\omega x} dx =$$

$$= \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_0^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \lambda\left(x + 2\xi\sqrt{t-\tau}, 2py\sqrt{t-\tau}, \tau\right) e^{-i\omega x} e^{-\xi^2} e^{-y^2} dx d\xi dy d\tau =$$

$$= \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_0^{\infty} \widetilde{\lambda}\left(\omega, 2py\sqrt{t-\tau}, \tau\right) e^{-\xi^2} e^{-y^2} e^{2i\omega\xi\sqrt{t-\tau}} d\xi dy d\tau.$$

Далее как и в предыдущей задаче для $0 < s < 1$, имеем

$$\widehat{\widetilde{\psi}}(\omega,s,t) \equiv \int\limits_0^{\infty} \widetilde{\psi}(\omega,p,t) p^{s-1} dp =$$

$$= \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_0^{\infty} \int\limits_0^{\infty} \widetilde{\lambda}\left(\omega, 2py\sqrt{t-\tau}, \tau\right) p^{s-1} e^{-\xi^2} e^{-y^2} e^{2i\omega\xi\sqrt{t-\tau}} dp d\xi dy d\tau =$$

$$= \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_0^{\infty} \widehat{\widetilde{\lambda}}\left(\omega, s, \tau\right) e^{-\xi^2} e^{-y^2} \frac{e^{2i\omega\xi\sqrt{t-\tau}}}{(2y\sqrt{t-\tau})^s} d\xi dy d\tau =$$

$$= \frac{1}{2^s}\int\limits_0^\infty y^{-s}e^{-y^2}dy \cdot \int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{\widehat{\lambda}}(\omega, s, \tau)\,\frac{e^{2i\omega\xi\sqrt{t-\tau}-\xi^2}}{(t-\tau)^{s/2}}d\xi d\tau =$$

$$= \frac{1}{2^{s+1}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\cdot\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{\widehat{\lambda}}(\omega, s, \tau)\,\frac{e^{2i\omega\xi\sqrt{t-\tau}-\xi^2}}{(t-\tau)^{s/2}}d\xi d\tau.$$

Так как

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{2i\omega\xi\sqrt{t-\tau}-\xi^2}d\xi = \pi^{n/2}e^{-\omega^2(t-\tau)},$$

то

$$\widehat{\widehat{\psi}}(\omega, s, t) = \frac{\pi^{n/2}}{2^{s+1}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\cdot\int\limits_0^t \widehat{\widehat{\lambda}}(\omega, s, \tau)\,\frac{e^{-\omega^2(t-\tau)}}{(t-\tau)^{s/2}}d\tau.$$

Таким образом, при фиксированном s, $0 < s < 1$, получаем интегральное уравнение Абеля по переменной τ относительно функции $\widehat{\widehat{\lambda}}(\omega, s, \tau)\,e^{\omega^2\tau}$:

$$e^{\omega^2 t}G(\omega, s, t) = \int\limits_0^t \frac{\widehat{\widehat{\lambda}}(\omega, s, \tau)}{(t-\tau)^{s/2}}e^{\omega^2\tau}d\tau,$$

где $G(\omega, s, t) = 2^{s+1}\pi^{-n/2}\dfrac{\widehat{\widehat{\psi}}(\omega, s, t)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}$, решение которого имеет вид

$$\widehat{\widehat{\lambda}}(\omega, s, t) = \frac{1}{\pi}e^{-\omega^2 t}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\frac{d}{dt}\int\limits_0^t \frac{G(\omega, s, \tau)}{(t-\tau)^{1-s/2}}e^{\omega^2\tau}d\tau.$$

В силу того, что функция $\lambda(x, z, t)$ финитная, функция $\widehat{\widehat{\lambda}}(\omega, s, t)$ для каждого фиксированного t — целая функция по переменным ω, s. Поэтому функция $\widehat{\widehat{\lambda}}(\omega, s, t)$ аналитически продолжается на все пространтсво $\mathbb{R}^{n+1}(\omega, s)$, как целая функция экспоненциального типа. Обозначим это продолжение через $\widehat{\widehat{\lambda}}_0(\omega, s, t)$. Делая обратные преобразования Меллина и Фурье, по продолжению $\widehat{\widehat{\lambda}}_0(\omega, s, t)$ находим $\lambda(x, z, t)$.

Для гиперболического уравнения по аналогии рассматривается сначала обратная задача для одномерного уравнения:

Найти решение $w = w(x, p, t)$, $-\infty < x < \infty$, $t > 0$, $p \geq 0$ и финитную непрерывную функцию $\lambda(x, t)$ с компактным носителем в области $x > 0$, $t > 0$ такие, что

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \lambda(x, t)\alpha(p), \tag{7}$$

$$w|_{t=0} = \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \tag{8}$$

$$w|_{x=0} = \varphi(p, t), \tag{9}$$

где функции $\alpha(p) \neq 0$, $p \geq 0$, $\varphi(p, t)$ заданы.

Схема исследования излагается ниже.

По формуле Даламбера для решения задачи Коши (7), (8) имеем

$$w(x,p,t) = \frac{\alpha(p)}{2p} \int\limits_0^t \int\limits_{x-p(t-\tau)}^{x+p(t-\tau)} \lambda\left(\xi,\tau\right) d\xi d\tau.$$

Положим $x = 0$. Так как функция $\lambda(x,t)$ финитна в области $x > 0$, $t > 0$ и $p(t-\tau) \geq 0$, то с учетом (9) получим

$$\widetilde{\psi}(p,t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^{p(t-\tau)} \lambda\left(\xi,\tau\right) d\xi d\tau. \tag{10}$$

где $\widetilde{\psi}(p,t) = 2p\varphi(p,t)/\alpha(p)$.

Дифференцируя (10) по t, имеем

$$\frac{\partial\widetilde{\psi}(p,t)}{\partial t} = p \int\limits_0^t \lambda\left(p(t-\tau),\tau\right) d\xi d\tau.$$

Поэтому, если положить $\psi(p,t) = \dfrac{2}{\alpha(p)} \dfrac{\partial\varphi(p,t)}{\partial t}$, то

$$\psi(p,t) = \int\limits_0^t \lambda\left(p(t-\tau),\tau\right) d\tau.$$

Делаем преобразование Меллина по параметру p для $0 < s < 1$:

$$\widehat{\psi}(s,t) \equiv \int\limits_0^\infty \psi(p,t) p^{s-1} dp = \int\limits_0^t \int\limits_0^\infty \lambda\left(p(t-\tau),\tau\right) p^{s-1} dp d\tau.$$

Так как

$$\int\limits_0^\infty \lambda\left(p(t-\tau),\tau\right) p^{s-1} dp = \frac{1}{(t-\tau)^s} \int\limits_0^\infty \lambda\left(q,\tau\right) q^{s-1} dq = \frac{\widehat{\lambda}\left(s,\tau\right)}{(t-\tau)^s},$$

то

$$\widehat{\psi}(s,t) = \int\limits_0^t \frac{\widehat{\lambda}\left(s,\tau\right)}{(t-\tau)^s} d\tau$$

является интегральным уравнением Абеля относительно функции $\widehat{\lambda}\left(s,\tau\right)$. Его решение имеет вид

$$\widehat{\lambda}\left(s,t\right) = \frac{1}{\pi} \sin\left(\pi s\right) \frac{d}{dt} \int\limits_0^t \frac{\widehat{\psi}(s,\tau)}{(t-\tau)^{1-s}} d\tau.$$

Функция $\widehat{\lambda}\left(s,t\right)$ для каждого фиксированного t — целая функция по переменной s. Поэтому $\widehat{\lambda}\left(s,t\right)$ аналитически продолжается на весь промежуток $-\infty < s < \infty$ как целая функция экспоненциального типа. Делая обратное преобразование Меллина от аналитического продолжения $\widehat{\lambda}\left(s,t\right)$ находим $\lambda(x,t)$.

Заметим, что

$$\sqrt{1+p^2}\psi(p,t) = \int\limits_0^t \lambda\left(p(t-\tau),\tau\right)\sqrt{1+p^2}d\tau$$

есть интеграл от функции $\lambda(x,t)$ по отрезку $\Gamma(p,t)$ с концами $(pt,0)$, $(0,t)$, т.е.

$$\sqrt{1+p^2}\psi(p,t) = \int\limits_{\Gamma(p,t)} \lambda\left(x,\tau\right)\sqrt{dx^2+d\tau^2},$$

что, в свою очередь, связано с задачами томографии при неполных данных с условием финитности подынтегральной функции.

Рассмотрим обратную задачу для двумерного гиперболического уравнения с параметром p:

Найти решение $w = w(x,y,p,t)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $t>0$, $p\geq 0$ и финитную непрерывную функцию $\lambda(x,y,t)$ с компактным носителем в области $x>0$, $y>0$, $t>0$ такие, что

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p^2\Delta w + \lambda(x,y,t)\alpha(p), \tag{10}$$

$$w|_{t=0} = \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \tag{11}$$

$$w|_{y=0} = \varphi(x,p,t), \tag{12}$$

где функции $\alpha(p)\neq 0$, $p\geq 0$, $\varphi(x,p,t)$ заданы.

Схема исследования излагается ниже.

При этом в двумерном и трехмерном случаях возникают проблемы, связанные с дополнительными интегральными уравнениями первого рода (уравнения (13) и (17)).

По формуле Пуассона для решения задачи Коши (10), (11) имеем

$$w(x,y,p,t) = \frac{\alpha(p)}{2\pi p}\int\limits_0^t \int\limits_{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\leq p^2(t-\tau)^2} \frac{\lambda\left(\xi,\eta,\tau\right)d\xi d\eta d\tau}{\sqrt{p^2(t-\tau)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}.$$

Положим $y=0$:

$$\varphi(x,p,t) = \frac{\alpha(p)}{2\pi p}\int\limits_0^t \int\limits_{(x-\xi)^2+\eta^2\leq p^2(t-\tau)^2} \frac{\lambda\left(\xi,\eta,\tau\right)d\xi d\eta d\tau}{\sqrt{p^2(t-\tau)^2-(x-\xi)^2-\eta^2}}.$$

Перейдем в полярную систему координат

$$\xi = x+\rho p(t-\tau)\cos\theta,\ \ \eta=\rho p(t-\tau)\sin\theta,$$

где $0\leq\theta\leq 2\pi$, $0\leq\rho\leq 1$:

$$\varphi(x,p,t) = \frac{\alpha(p)}{2\pi}\int\limits_0^t\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 \frac{\lambda\left(x+\rho p(t-\tau)\cos\theta,\rho p(t-\tau)\sin\theta,\tau\right)(t-\tau)\rho d\rho d\theta d\tau}{\sqrt{1-\rho^2}}.$$

Так как носитель функции $\lambda(x,y,t)$ лежит в области $x>0$, $y>0$, $t>0$, и $\alpha(p)\neq 0$, $p\geq 0$, то получаем соотношение

$$\psi(x,p,t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^\pi\int\limits_0^1\frac{\lambda\left(x+\rho p(t-\tau)\cos\theta,\rho p(t-\tau)\sin\theta,\tau\right)(t-\tau)\rho d\rho d\theta d\tau}{\sqrt{1-\rho^2}}.$$

левая часть которого $\psi(x,p,t)=2\pi\varphi(x,p,t)/\alpha(p)$.

Делаем преобразование Меллина по параметру p для $0<s<1$:

$$\widehat{\psi}(x,s,t)\equiv\int\limits_0^\infty\psi(x,p,t)p^{s-1}dp=$$

$$=\int\limits_0^t\int\limits_0^\pi\int\limits_0^1\int\limits_0^\infty\frac{\lambda\left(x+\rho p(t-\tau)\cos\theta,\rho p(t-\tau)\sin\theta,\tau\right)(t-\tau)p^{s-1}\rho dp d\rho d\theta d\tau}{\sqrt{1-\rho^2}}.$$

Преобразуем интеграл

$$\int\limits_0^1\frac{\lambda\left(x+\rho p(t-\tau)\cos\theta,\rho p(t-\tau)\sin\theta,\tau\right)\rho d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}=$$

$$=-\int\limits_0^1\lambda\left(x+\rho p(t-\tau)\cos\theta,\rho p(t-\tau)\sin\theta,\tau\right)d\sqrt{1-\rho^2}=$$

$$=\int\limits_0^1\sqrt{1-\rho^2}d\lambda\left(x+\rho p(t-\tau)\cos\theta,\rho p(t-\tau)\sin\theta,\tau\right)=$$

$$=\int\limits_0^1 p(t-\tau)\sqrt{1-\rho^2}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial\lambda}{\partial y}\sin\theta\right)d\rho.$$

Итак,

$$\widehat{\psi}(x,s,t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^\pi\int\limits_0^1\int\limits_0^\infty\sqrt{1-\rho^2}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial\lambda}{\partial y}\sin\theta\right)(t-\tau)^2p^s dp d\rho d\theta d\tau.$$

Далее

$$\int\limits_0^\infty\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial\lambda}{\partial y}\sin\theta\right)p^s dp=$$

$$=\frac{1}{\rho(t-\tau)}\int\limits_0^\infty\frac{d}{dp}\lambda\left(x+\rho p(t-\tau)\cos\theta,\rho p(t-\tau)\sin\theta,\tau\right)p^s dp=$$

$$=-\frac{s}{\rho(t-\tau)}\int\limits_0^\infty\lambda\left(x+\rho p(t-\tau)\cos\theta,\rho p(t-\tau)\sin\theta,\tau\right)p^{s-1}dp.$$

Следовательно,

$$\widehat{\psi}(x,s,t)=$$

$$= -s\int_0^t\int_0^\pi\int_0^1\int_0^\infty \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho}\lambda\left(x+\rho p(t-\tau)\cos\theta, \rho p(t-\tau)\sin\theta, \tau\right)(t-\tau)p^{s-1}dpd\rho d\theta d\tau =$$

$$= -s\int_0^t\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^1 \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho}\lambda\left(x+\rho p(t-\tau)\cos\theta, \rho p(t-\tau)\sin\theta, \tau\right)(t-\tau)d\rho d\theta p^{s-1}dpd\tau.$$

Обозначим

$$\mu(x, p(t-\tau), \tau) = -\int_0^\pi\int_0^1 \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho}\lambda\left(x+\rho p(t-\tau)\cos\theta, \rho p(t-\tau)\sin\theta, \tau\right)d\rho d\theta. \tag{13}$$

В силу того, что

$$\frac{1}{s}\widehat{\psi}(x,s,t) = \int_0^t (t-\tau)\int_0^\infty \mu(x, p(t-\tau), \tau)p^{s-1}dpd\tau =$$

$$= \int_0^t (t-\tau)^{1-s}\int_0^\infty \mu\left(x,z,\tau\right)z^{s-1}dzd\tau = \int_0^t (t-\tau)^{1-s}\widehat{\mu}\left(x,s,\tau\right)d\tau$$

и неравенства $1-s>0$, получаем интегральное уравнение Абеля

$$\frac{1}{s(1-s)}\frac{\partial\widehat{\psi}(x,s,t)}{\partial t} = \int_0^t (t-\tau)^{-s}\widehat{\mu}\left(x,s,\tau\right)d\tau.$$

на функцию $\widehat{\mu}\left(x,s,\tau\right)$. Его решение дается формулой

$$\widehat{\mu}\left(x,s,t\right) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin\left(\pi s\right)}{s(1-s)}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{\frac{\partial\widehat{\psi}(x,s,t)}{\partial t}}{(t-\tau)^{1-s}}d\tau.$$

Функция $\widehat{\mu}\left(x,s,t\right)$ для каждого фиксированного t — целая функция по переменной s. Поэтому $\widehat{\mu}\left(x,s,t\right)$ аналитически продолжается на весь промежуток $-\infty<s<\infty$ как целая функция экспоненциального типа. Обозначим это продолжение через $\widehat{\mu}_0\left(x,s,t\right)$. Делая обратное преобразование Меллина, по продолжению $\widehat{\mu}_0\left(x,s,t\right)$ находим $\mu(x,p,t)$.

Таким образом, поиск функции λ сведен к исследованию интегрального уравнения (13).

В трехмерном случае имеем обратную задачу:

Найти решение $w=w(x,p,t)$, $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$, $t>0$, $p\geq 0$ и финитную непрерывную функцию $\lambda(x,t)$ с компактным носителем в области $x_3>0$, $t>0$ такие, что

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p^2\Delta w + \lambda(x,t)\alpha(p), \tag{14}$$

$$w|_{t=0} = \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \tag{15}$$

$$w|_{x_3=0} = \varphi(x_1,x_2,p,t), \tag{16}$$

где функции $\alpha(p) \neq 0$, $p \geq 0$, $\varphi(x_1, x_2, p, t)$ трижды непрерывно дифференцируемы и известны.

Схема исследования излагается ниже.

По формуле Кирхгофа для решения задачи Коши (14), (15) имеем

$$w(x,p,t) = \frac{\alpha(p)}{4\pi p^2} \int\limits_{|x-\xi|\leq pt} \frac{\lambda\left(\xi, t - \frac{|x-\xi|}{p}\right) d\xi}{|x-\xi|}.$$

Положим $x_3 = 0$. Так как носитель функции $\lambda(x,t)$ сосредоточен в области $x_3 > 0$, то

$$\psi(x_1, x_2, p, t) =$$

$$= \int\limits_{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+\xi_3^2\leq(pt)^2,\ \xi_3>0} \frac{\lambda\left(\xi, t - \frac{1}{p}\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+\xi_3^2}\right) d\xi}{\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+\xi_3^2}},$$

где $\psi(x_1, x_2, p, t) = 4\pi p^2 \varphi(x_1, x_2, p, t)/\alpha(p)$.

Положим $x_1 - \xi_1 = y_1$, $x_2 - \xi_2 = y_2$, $\xi_3 = y$. Тогда интеграл примет вид

$$\psi(x_1, x_2, p, t) =$$

$$= \int\limits_{y_1^2+y_2^2+y^2\leq(pt)^2,\ y>0} \frac{\lambda\left(x_1 - y_1, x_2 - y_2, y, t - \frac{1}{p}\sqrt{y_1^2+y_2^2+y^2}\right) dy_1 dy_2 dy}{\sqrt{y_1^2+y_2^2+y^2}}.$$

Положим $z = pt$, $q = \dfrac{1}{p}$, имеем

$$\psi(x_1, x_2, p, t) \equiv \sigma(x_1, x_2, q, z) =$$

$$= \int\limits_{y_1^2+y_2^2+y^2\leq z^2,\ y>0} \frac{\lambda\left(x_1 - y_1, x_2 - y_2, y, q(z - \sqrt{y_1^2+y_2^2+y^2})\right) dy_1 dy_2 dy}{\sqrt{y_1^2+y_2^2+y^2}}.$$

Сделаем преобразование Фурье по переменным x_1, x_2:

$$\widetilde{\sigma}(\omega_1, \omega_2, q, z) \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{i(x_1\omega_1+x_2\omega_2)} \sigma(x_1, x_2, q, z) dx_1 dx_2 =$$

$$= \int\limits_{y_1^2+y_2^2+y^2\leq z^2,\ y>0} \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{i(x_1\omega_1+x_2\omega_2)} \times$$

$$\times \frac{\lambda\left(x_1 - y_1, x_2 - y_2, y, q(z - \sqrt{y_1^2+y_2^2+y^2})\right)}{\sqrt{y_1^2+y_2^2+y^2}} dx_1 dx_2 dy_1 dy_2 dy =$$

$$= \int\limits_{y_1^2+y_2^2+y^2\leq z^2,\ y>0} \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{i(y_1\omega_1+y_2\omega_2)} \times$$

$$\times \frac{\widetilde{\lambda}\left(\omega_1, \omega_2, y, q(z - \sqrt{y_1^2+y_2^2+y^2})\right)}{\sqrt{y_1^2+y_2^2+y^2}} dy_1 dy_2 dy.$$

Совершая преобразование Меллина по параметру q для $0 < s < 1$, имеем

$$\widehat{\widetilde{\sigma}}(\omega_1, \omega_2, s, z) \equiv \int_0^\infty \widetilde{\sigma}(\omega_1, \omega_2, q, z) q^{s-1} dq =$$

$$= \int\limits_{y_1^2+y_2^2+y^2 \le z^2,\ y>0} \frac{e^{i(y_1\omega_1+y_2\omega_2)}}{\sqrt{y_1^2+y_2^2+y^2}}$$

$$\int_0^\infty \widetilde{\lambda}\left(\omega_1, \omega_2, y, q(z-\sqrt{y_1^2+y_2^2+y^2})\right) q^{s-1} dq dy_1 dy_2 dy =$$

$$= \int\limits_{y_1^2+y_2^2+y^2 \le z^2,\ y>0} \frac{e^{i(y_1\omega_1+y_2\omega_2)}}{\sqrt{y_1^2+y_2^2+y^2}} \cdot \frac{\widehat{\widetilde{\lambda}}(\omega_1, \omega_2, y, s)}{(z-\sqrt{y_1^2+y_2^2+y^2})^s} dy_1 dy_2 dy.$$

После замены переменных $y_1 = r\cos\theta$, $y_2 = r\sin\theta$ получим

$$\widehat{\widetilde{\sigma}}(\omega_1, \omega_2, s, z) =$$

$$= \int_0^z \widehat{\widetilde{\lambda}}(\omega_1, \omega_2, y, s) \int_0^{\sqrt{z^2-y^2}} \frac{r}{\sqrt{r^2+y^2}(z-\sqrt{r^2+y^2})^s} \int_0^{2\pi} e^{i(y_1\omega_1+y_2\omega_2)} d\theta dr dy.$$

Так как

$$\int_0^{2\pi} e^{i(y_1\omega_1+y_2\omega_2)} d\theta = 2\pi J_0\left(r\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}\right),$$

где $J_0(\sigma)$ — функция Бесселя, то

$$\widehat{\widetilde{\sigma}}(\omega_1, \omega_2, s, z) = 2\pi \int_0^z \widehat{\widetilde{\lambda}}(\omega_1, \omega_2, y, s) \int_0^{\sqrt{z^2-y^2}} \frac{rJ_0\left(r\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}\right)}{\sqrt{r^2+y^2}(z-\sqrt{r^2+y^2})^s} dr dy.$$

Делая замену переменных $y = \rho\cos\theta$, $r = \rho\sin\theta$, $0 \le \theta \le \pi/2$, $0 \le \rho \le z$, получим:

$$\widehat{\widetilde{\sigma}}(\omega_1, \omega_2, s, z) = 2\pi \int_0^z \int_0^{\frac{\pi}{2}} \widehat{\widetilde{\lambda}}(\omega_1, \omega_2, \rho\cos\theta, s) \frac{\rho\sin\theta \cdot J_0\left(\rho\sin\theta\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}\right)}{(z-\rho)^s} d\theta d\rho.$$

Обозначим

$$\mu(\omega_1, \omega_2, \rho, s) = 2\pi\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \widehat{\widetilde{\lambda}}(\omega_1, \omega_2, \rho\cos\theta, s) \sin\theta \cdot J_0\left(\rho\sin\theta\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}\right) d\theta. \quad (17)$$

Функция $\mu(\omega_1, \omega_2, \rho, s)$ определяется из интегрального уравнения Абеля

$$\widehat{\widetilde{\sigma}}(\omega_1, \omega_2, s, z) = \int_0^z \frac{\mu(\omega_1, \omega_2, \rho, s)}{(z-\rho)^s} d\rho$$

по формуле

$$\mu(\omega_1,\omega_2,\rho,s)=\frac{1}{\pi}\sin(\pi s)\,\frac{d}{d\rho}\int\limits_0^\rho \frac{\widehat{\widehat{\sigma}}(\omega_1,\omega_2,s,\xi)}{(\rho-\xi)^{1-s}}d\xi. \tag{18}$$

Итак, функция $\mu(\omega_1,\omega_2,\rho,s)$ находится по формуле (18), а функция $\widehat{\widehat{\lambda}}(\omega_1,\omega_2,y,s)$ — из интегрального уравнения (17).

Покажем, что уравнение (17) при фиксированных ω_1, ω_2, s имеет не более одного решения $\widehat{\widehat{\lambda}}(\omega_1,\omega_2,q,s)$. Фиксируя ω_1, ω_2, s получаем уравнение

$$\widetilde{\mu}(\rho)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\widehat{\widehat{\lambda}}(\rho\cos\theta)\sin\theta\cdot J_0\left(\rho\sin\theta A\right)d\theta,$$

где

$$\widetilde{\mu}(\rho)=\frac{1}{2\pi p}\mu(\omega_1,\omega_2,\rho,s),\quad A=\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}.$$

Положим $\rho\cos\theta=z$, тогда

$$\widetilde{\mu}(\rho)=\int\limits_0^\rho\widehat{\widehat{\lambda}}(z)\cdot J_0\left(A\sqrt{\rho^2-z^2}\right)dz$$

— уравнение Вольтерра с положительным ядром для малых ρ, так как $J_0(0)=1$. Из того, что $\lambda(z)$ — целая функция следует единственность решения [6, 7].

Кроме того, дифференцируя по ρ, получим уравнение Вольтерра 2-го рода

$$\widetilde{\mu}'(\rho)=\widehat{\widehat{\lambda}}(\rho)+\int\limits_0^\rho\widehat{\widehat{\lambda}}(z)K(\rho,z)dz,\quad K(\rho,z)=A\rho\frac{J_0'\left(A\sqrt{\rho^2-z^2}\right)}{\sqrt{\rho^2-z^2}},$$

так что имеет место и существование решения при определенных условиях.

Перейдем к нелинейным обратным задачам для эллиптических уравнений, содержащих параметр.

Сначала заметим, что гиперболическому уравнению

$$\frac{1}{c^2(x)}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\Delta w,\ \ x\in D\subset\mathbb{R}^n,\ \ t\in\mathbb{R},\ \ n\geq 1,$$

соответствует эллиптическое

$$\Delta w+\frac{\omega^2}{c^2(x)}w=0, \tag{19}$$

которое, например, в рамках лучевого метода, берется за основу количественных и качественных исследований многих конкретных задач (см. например [8]).

В данном разделе рассматриваются обратные задачи для уравнений типа (19), причем предполагается зависимость решения $w(x,\omega)$ не только от x, но и от ω. В этой связи нам удобно записать уравнение (19) с переменным комплексным параметром $p = -\dfrac{1}{i\omega}$ в виде

$$p^2 \Delta w = \lambda(x) w, \quad \lambda(x) = \frac{1}{c^2(x)}. \tag{20}$$

Оказывается, решение $w(x,p)$, как показывает следующая лемма, может иметь особенность в нуле по переменной p.

Лемма 1. Пусть $A(p)$, $B(p)$ — произвольные функции переменной p, $u(x) > 0$ — гармоническая функция, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Функции

$$w(x,p) = A(p) \exp\left(\frac{\sqrt[3]{u(x)}}{p}\right)\left(\sqrt[3]{u(x)} - p\right) + B(p) \exp\left(-\frac{\sqrt[3]{u(x)}}{p}\right)\left(\sqrt[3]{u(x)} + p\right),$$

$$\lambda(x) = \frac{|\operatorname{grad} u(x)|^2}{9 u(x)^{4/3}}, \quad p \neq 0,$$

удовлетворяют уравнению (20).

Отсюда видно, что функция $w(x,p)$ имеет, вообще говоря, особенность в нуле по переменной p. Чтобы избежать таких особенностей, делают хорошо известное преобразование. Вместо функции $w(x,p)$ вводится функция $\varphi(x,p)$:

$$w(x,p) = \exp\left(-\frac{1}{p}\int \varphi(x,p)dx\right), \text{ при } n = 1,$$

и

$$w(x,p) = \exp\left(-\frac{1}{p}\varphi(x,p)\right), \text{ при } n > 1.$$

Так определенная функция $\varphi(x,p)$ удовлетворяет уравнениям

$$p\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varphi^2 + \lambda(x) = 0, \text{ при } n = 1, \tag{21}$$

и

$$p\Delta\varphi - |\operatorname{grad}\varphi|^2 + \lambda(x) = 0, \text{ при } n > 1. \tag{22}$$

Заметим, что уравнение (21) — нелинейное уравнение переноса. Отсутствие особенностей у функции $\varphi(x,p)$ в точке $p = 0$ иллюстрируется леммами 2 и 3.

Лемма 2. Функции

$$\varphi(x,p) = \frac{1}{(c-3x)^{1/3}\left((c-3x)^{1/3} - p\right)}, \quad \lambda(x) = \frac{1}{(c-3x)^{4/3}},$$

где $c - 3x \neq p$, $c > 0$, $c - 3x \neq 0$, удовлетворяют уравнению (21).

Лемма 2 следует из леммы 1 при $u(x) = c - 3x$, $A = 1$, $B = 0$.

Лемма 3. Функции

$$\varphi(x,p) = -\sqrt[3]{u(x)} - p\ln\left(\sqrt[3]{u(x)} - p\right), \quad \lambda(x) = \frac{1}{9}\cdot\frac{|\operatorname{grad} u|^2}{u(x)^{4/3}},$$

где $\Delta u = 0$, $u(x) > 0$, удовлетворяют уравнению (22).

Лемма 3 следует из леммы 1 при $A = 1$, $B = 0$.

Замечательным фактом является то, что из (21) и (22) можно получить разложением по параметру p системы уравнений, не содержащие функции $\lambda(x)$, что чрезвычайно важно для исследования обратных задач.

Лемма 4. Если $n = 1$ и $\varphi(x,p) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x)p^k$, то функции $\varphi_k(x)$ удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений, не содержащей функции $\lambda(x)$,

$$\frac{d\varphi_k(x)}{dx} = \sum_{j=0}^{k+1} \varphi_j(x)\varphi_{k+1-j}(x), \quad k = 0, 1, ... \tag{23}$$

и имеет место формула

$$\lambda(x) = \varphi_0^2(x).$$

Лемма 5. Если $n > 1$ и $\varphi(x,p) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x)p^k$, то функции $\varphi_k(x)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений в частных производных, не содержащей функции $\lambda(x)$,

$$\Delta\varphi_k(x) = \sum_{j=0}^{k+1}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi_{k+1-j}}{\partial x_i}, \quad k = 0, 1, ... \tag{24}$$

и имеет место формула

$$\lambda(x) = |\mathrm{grad}\,\varphi_0|^2.$$

Таким образом, в силу лемм 4, 5 обратные задачи для уравнения (19) могут быть редуцированы к исследованию краевых задач для нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений (23) в случае $n = 1$ и для нелинейных систем уравнений в частных производных (24) в случае $n > 1$.

Замечание 1. Вместо систем уравнений (23), (24) можно получить из (21) и (22) интегродифференциальное уравнение, не содержащее искомой функции $\lambda(x)$

$$\frac{\partial\varphi(x,p)}{\partial x} = \int\limits_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\varphi^2(x,y)\Big|_{y=pz} dz, \tag{25}$$

$$\Delta\varphi(x,p) = \int\limits_0^1 \frac{\partial}{\partial y}|\mathrm{grad}\,\varphi(x,y)|^2\Big|_{y=pz} dz. \tag{26}$$

Действительно, из (21) имеем $\lambda(x) = \varphi_0^2(x)$, а из (22) $\lambda(x) = |\mathrm{grad}\,\varphi_0|^2$. Поэтому правые части в (25), (26) равны, соответственно,

$$\frac{\varphi^2(x,p) - \varphi^2(x,0)}{p}, \quad \frac{|\mathrm{grad}\,\varphi(x,p)|^2 - |\mathrm{grad}\,\varphi(x,0)|^2}{p},$$

что соответствует уравнениям (21), (22).

Как и в случае систем уравнений, краевые задачи для интегродифференциальных уравнений типа (25), (26), как представляется, являются основой изучения обратных задач для гиперболических и эллиптических уравнений типа (19).

В случае более общего гиперболического уравнения

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} = \lambda(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

соответственно получаются более общее эллиптическое уравнение

$$p^2 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} = \lambda(x) w$$

и для функции $\varphi(x,p)$:

$$w(x,p) = \exp\left(-\frac{\varphi(x,p)}{p}\right)$$

нелинейное эллиптическое уравнение с параметром

$$p\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \lambda(x) = 0,$$

что, в свою очередь, приводит к более общим уравнениям (24) и (26), не содержащим искомой функции $\lambda(x)$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 \varphi_k(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{m=0}^{k+1}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial \varphi_m(x)}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi_{k+1-m}(x)}{\partial x_j},\ \ k = 0,1,...,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 \varphi(x,p)}{\partial x_i \partial x_j} = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial x_j}\Bigg|_{y=pz} dz,$$

при этом

$$\lambda(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial \varphi_0(x)}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi_0(x)}{\partial x_j}.$$

В одномерном случае удается сформулировать и доказать теорему существования аналитического решения обратной задачи:

Найти в окрестности нуля функции $w(x,p)$, $\lambda(x)$ такие, что

$$p\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \lambda(x) w, \quad \frac{p}{w}\frac{\partial w}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \alpha(p),$$

где $\alpha(p)$ — заданная функция переменной p. Теорема единственности сходной обратной задачи электроразведки была сформулирована впервые в работе [9].

Используя результаты леммы 2, методом мажорант удается сформулировать и доказать нижеследующую теорему для $n = 1$.

Теорема 1. Пусть

$$\alpha(p) = \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k p^k, \ \ |p| < p_0, \quad \alpha_k > 0,$$

аналитическая функция, имеющая в окрестности нуля мажоранту

$$\beta(p) = \frac{1}{c^{\frac{2}{3}} - c^{\frac{1}{3}}p},$$

$c > 0$ — постоянная. Задача Коши для системы уравнений

$$\varphi_k'(x) = \sum_{j=0}^{k+1} \varphi_j(x)\varphi_{k+1-j}(x), \tag{27}$$

$$\varphi_k(0) = \alpha_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{28}$$

имеет в некоторой окрестности нуля единственное решение $\varphi_k(x)$, и ряд

$$\varphi(x, p) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x)p^k$$

сходится. При этом функции $w(x, p)$, $\lambda(x)$, определенные в окрестности нуля, $p \neq 0$, формулами:

$$w(x, p) = \exp\left[-\frac{1}{p}\int \varphi(x, p)dx\right], \quad \lambda(x) = \varphi_0^2(x),$$

удовлетворяют уравнению

$$p^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \lambda(x)w$$

и краевому условию

$$\left.\frac{p}{w}\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=0} = \alpha(p).$$

Доказательство.

Непосредственно проверяется, что функции

$$\varphi_k(x) = \left[\frac{1}{c - 3x}\right]^{\frac{k+2}{3}}, \; c > 0, \; c - 3x > 0$$

удовлетворяют бесконечной системе уравнений

$$\varphi_k'(x) = \sum_{j=0}^{k+1} \varphi_j(x)\varphi_{k+1-j}(x), \; k = 0, 1, 2, \ldots .$$

При этом ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x)p^k$$

сходится в окрестности нуля, и его сумма $\varphi(x, p)$ вычисляется в явном виде

$$\varphi(x, p) = \frac{1}{(c - 3x)^{\frac{2}{3}}}\,\frac{1}{1 - \frac{p}{(c-3x)^{\frac{1}{3}}}} = \frac{1}{(c - 3x)^{\frac{1}{3}}}\,\frac{1}{(c - 3x)^{\frac{1}{3}} - p}.$$

Из формулы для $\varphi(x, p)$ имеем равенство

$$\varphi|_{x=0} = \frac{1}{c^{\frac{2}{3}} - c^{\frac{1}{3}}p} = \beta(p).$$

По условию теоремы функция $\beta(p)$ мажорирует функцию

$$\alpha(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k p^k = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(0)\alpha_k,$$

которая, в свою очередь, определяет данные Коши (28) системы (27). Поэтому функции

$$\varphi_k(x) = \left[\frac{1}{c-3x}\right]^{\frac{k+2}{3}}$$

являются мажорантами для решений $\alpha_k(x)$ задачи Коши (27), (28). Следовательно, решение $\varphi_k(x)$ существует, единственно в некоторой окрестности нуля, и ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x)p^k = \varphi(x,p)$$

сходится.

Далее рассмотрим обратную задачу: найти функции $\varphi(x,p)$, $\lambda(x)$ в окрестности нуля, если

$$p\varphi_k - \varphi^2 + \lambda(x) = 0, \tag{29}$$

$$\varphi|_{x=0} = \alpha(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k p^k. \tag{30}$$

Формально разлагая $\varphi(x,p)$ в ряд по p:

$$\varphi(x,p) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x)p^k,$$

из (29), (30) получим задачу Коши (27), (28)

$$\begin{cases} \varphi'_k(x) &= \sum\limits_{j=0}^{k+1} \varphi_j(x)\varphi_{k+1-j}, \\ \varphi_k(0) &= \alpha_k,\ k = 0,1,2,\ldots \end{cases}$$

При этом

$$\lambda(x) = \varphi_0^2(x).$$

По доказанному выше корректно определена в окрестности нуля функция

$$\varphi(x,p) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x)p^k.$$

Полагая

$$w(x,p) = \exp\left[-\frac{1}{p}\int \varphi(x,p)dx\right],\ \lambda(x) = \varphi_0^2(x),\ \ p \neq 0,$$

получаем соотношения

$$p^2 w_{xx} = \lambda(x)w,\ \ \left.\frac{pw_x}{w}\right|_{x=0} = \alpha(p).$$

Теорема доказана.

В многомерном случае не удается получить мажоранту для задачи Коши системы уравнений (24). Ограничимся следующим замечанием.

В силу леммы 3 функции

$$\varphi(x,p) = -\sqrt[3]{u(x)} - p\ln\left(\sqrt[3]{u(x)} - p\right), \ \ \lambda(x) = \frac{1}{9}\cdot\frac{|\mathrm{grad}\, u|^2}{u(x)^{4/3}},$$

где $u(x) > 0$, $\Delta u = 0$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяют уравнению

$$p\Delta\varphi - |\mathrm{grad}\,\varphi|^2 + \lambda(x) = 0.$$

При этом функция $\varphi(x,p)$ разлагается в окрестности нуля в ряд

$$\varphi(x,p) = \sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k(x)p^k,$$

где

$$\varphi_0(x) = -u^{\frac{1}{3}}, \ \ \varphi_1(x) = -\ln u^{\frac{1}{3}}, \ \ \varphi_k(x) = \frac{1}{ku^{\frac{k}{3}}}, \ k = 2, 3, ...,$$

и $\varphi_k(x)$ удовлетворяют системе уравнений (24).

Мажоранту здесь получить не удается, так как $\varphi_0(x) < 0$ а $\varphi_k(x) > 0$ при $k \geq 2$. Заметим только, что система уравнений (24) имеет решение

$$(\varphi_0(x), \varphi_1(x), 0\ldots 0),$$

где $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ — решение системы

$$\Delta\varphi_0 = 2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_i}, \ \ \Delta\varphi_1 = |\mathrm{grad}\varphi_1|^2. \tag{31}$$

В этом случае ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\varphi_k(x)p^k$ обрывается и

$$\varphi(x,p) = \varphi_0(x) + p\varphi_1(x), \ \ \lambda(x) = |\mathrm{grad}\varphi_0|^2.$$

В данном случае при линейных по p краевых условиях для функции $\varphi(x,p)$ мы имеем два линейных уравнения (31)(нелинейное уравнение $\Delta\varphi_1 = |\mathrm{grad}\varphi_1|^2$ сводится, как хорошо известно (см. [10]), заменой функции φ_1 к уравнению Лапласа).

Другие многочисленные представления решений и коэффициентов многомерных эллиптических уравнений с параметром получаются из представлений работ [11, 12] для гиперболических и параболических уравнений с последующим преобразованием типа Фурье, Лапласа по временной переменной. Приведем один пример.

Пусть $V(x,p)$, $B(p)$, $C(p)$, $f(p)$, $g(p)$, $\gamma(p)$ — некоторые дифференцируемые функции, $\gamma(p)$ — комплекснозначная, например, $\gamma(p) = ip$, $\triangle = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + ... + \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2}$, $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}, ..., \dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)$. Тогда функция

$$w(x,p) = \frac{1}{B - CV}\left(f(p)e^{\gamma V} + g(p)e^{-\gamma V}\right)$$

удовлетворяет уравнению

$$\gamma^2 w = \frac{\triangle w}{|\nabla V|^2} + \left(\frac{2C}{B - CV} + \frac{\triangle V}{|\nabla V|^2}\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial V}{\partial x_i}.$$

При этом, если $V(x,p)$ — решение уравнения

$$\triangle V + \frac{2C}{B-CV}|\nabla V|^2 - \frac{2}{|\nabla V|^2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial V}{\partial x_j} = 0,$$

то $w(x,p)$ решение уравнения

$$\gamma^2 w = \operatorname{div}\left(\frac{\nabla w}{|\nabla V|^2}\right).$$

Если же $V(x,p)$ — решение уравнения

$$\frac{2C}{B-CV} + \frac{\triangle V}{|\nabla V|^2} = 0,$$

то $w(x,p)$ решение уравнения

$$\gamma^2 w = \frac{1}{|\nabla V|^2}\triangle w.$$

В заключение работы рассмотрим уравнение типа Шредингера с переменным параметром p

$$\alpha\frac{\partial w}{\partial t} = p\Delta w + \lambda(x,t)w,$$

где α комплексная постоянная. (Переменный параметр p может соответствовать массам различных частиц.) Замена $w(x,p,t) = e^{\varphi(x,p,t)}$ приводит, как и выше, к уравнению для функции $\varphi(x,p,t)$, не содержащего коэффициента $\lambda(x,t)$, а именно

$$\Delta\varphi + |\mathrm{grad}\varphi|^2 = \alpha\int_0^1 \left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial y}\right]_{y=pz} dz. \tag{32}$$

При этом $\lambda(x,t) = \alpha\left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{p=0}$. Исследование краевых задач для нелинейного интегро-дифференциального уравнения (32) представляется сложным и интересным.

Список литературы

[1] Yu.E. Anikonov, *Inverse problems for evolution and differential-difference equations with a parameter*, Journal of Inverse and Ill-Posed problems, **11**:5 (2003), 439–473. MR2018672

[2] Yu.E. Anikonov, *Asymptotic formulas in many-dimensional inverse problems for evolution equations with a parameter*, Journal of Inverse and Ill-posed Problems, **14**:2 (2006), 107–109. MR2242299

[3] Ю.Е. Аниконов, *Формулы в линейных обратных задачах с параметром*, Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2007 г., с. 36–40.

[4] Н.Л. Абашеева, *Линейная обратная задача для операторно-дифференциального уравнения с параметром*, Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2007 г. с. 5–14.

[5] N.L. Abasheeva, *Identification of a source for parabolic and hyperbolic equations with a parameter*, Journal of Inverse and Ill-Posed problems, **17**:8 (2009), 527–544. MR2547125

[6] Ю.Е. Аниконов, *О единственности решения интегральных уравнений первого рода с целыми ядрами*, Матем. заметки, **28**:3 (1980), 401–405. MR0594207

[7] M.V. Neshchadim, *Uniqueness of solution to integral equation of the first kind over real algebras with division of finite dimension (a general case)*, Journal of Inverse and Ill-posed Problems, **13**:5 (2005), 495–502. MR2188626

[8] В.М. Бабич, В.С. Булдырев, *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн*, М.: Наука, 1972 г., 456 с. MR1245488
[9] А.Н. Тихонов, *О единственности решения задачи электроразведки*, ДАН СССР, **69**:6 (1949), 797–800. MR0033409
[10] А.В. Бицадзе, *Уравнения математической физики*, М.: Наука, 1982 г., 336 с. MR0701245
[11] Ю.Е. Аниконов, М.В. Нещадим, *Аналитические представления решений ряда обратных задач математической физики*, Препринт **218**, ИМ СО РАН, Новосибирск, 2009 г., 32 с.
[12] Ю.Е. Аниконов, М.В. Нещадим, *Об аналитических методах в теории обратных задач математической физики*, Препринт **234**, ИМ СО РАН, Новосибирск, 2009 г., 62 с.

Юрий Евгеньевич Аниконов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова 2,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: anikon@math.nsc.ru

Михаил Владимирович Нещадим
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова 2,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: neshch@math.nsc.ru