S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 9, стр. 464–471 (2012) УДК 517.968.22
MSC 45D05, 34A55

ВОССТАНОВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА 1-ГО РОДА В СВЕРТКАХ НА ПОЛУПРЯМОЙ ПО НЕПОЛНЫМ ДАННЫМ

А.Ф. Воронин

Abstract. In this paper we study the integral equation Volterra first kind of convolution in the scalar and vector cases on the semi-infinite interval. Under the enough of the nature restrictions on the kernel of the integral equation of Volterra operator (the kernel has bounded support), the solution is restored by the right side of the equation, the latter is defined on the infinite part semi-infinite interval. Uniqueness theorems are proved, necessary and sufficient conditions for solvability are found, explicit formulas for solutions are received.

Keywords: Volterra integral equation of the first kind of convolution, the system of equations, the necessary and sufficient conditions for solvability, an explicit formula.

Введение

В работе будет рассмотрено неоднородное интегральное уравнение Вольтерра первого рода в свертках в скалярном и векторном случаях на полубесконечном интервале.

Рассмотрения начнем со следующего скалярного случая на интервале $(0, \infty)$:

$$\int_0^t k(t-s)u(s)\,ds = f(t), \quad t \in (0, \infty), \tag{0.1}$$

Voronin, A.F., Recovery solutions of the Volterra equation of the first kind of convolution on the half with incomplete data.

Работа поддержана РФФИ (грант №10-01-00384).

Поступила 16 мая 2012 г., опубликована 30 октября 2012 г.

где

$$\begin{gathered} k, k' \in L_1(0,b),\ \infty > b > 0, \quad f \in L_1\Big(e^{-a_0 t};(0,\infty)\Big),\ a_0 = const, \\ f' \in L_1(0,b),\ f' \in L_1\Big(e^{-a_0 t};(b,\infty)\Big), \end{gathered} \tag{0.2}$$

$$k(0) = f(0) = 0,\ k(b-0) = c_0 \neq 0, \tag{0.3}$$

$f'(t) \equiv \frac{\partial}{\partial t} f(t),\ L_1\Big(e^{-at};(0,\infty)\Big)$ – пространство с нормой

$$||f||_a = \int\limits_0^\infty e^{-as}|f(s)|\,ds,\ a = const.$$

Решаем следующую задачу (A_1):

из уравнения (0.1) найти две функции $u \in L_1\Big(e^{-at};(0,\infty)\Big)$, где $a \geq a_0$ и $f(t),\ t \in (0,b)$, по заданным значениям $f(t),\ t \in (b,\infty)$ при условиях (0.2)-(0.3).

С задачей (A_1) тесно связана задача (A_2) :

найти решение $u \in L_1\Big(e^{-at};(0,\infty)\Big)$, где $a \geq a_0$, уравнения первого рода (0.1) при условиях (0.2)-(0.3).

Таким образом, задачу (A_1) можно трактовать, как задачу (A_2), в которой известна лишь часть информации о функции f (известна $f(t),\ t \in (b,\infty)$), и дополнительно требуется найти $f(t),\ t \in (0,b)$.

Цель работы – получить необходимые и достаточные (эффективно проверяемые) условия разрешимости и единственности задач (A_1) и (A_2), построить явные формулы для их решения.

Уравнение (0.1) имеет широкие приложения и является одним из наиболее востребованных интегральных уравнений. Историю его изучения при различных условиях на ядро k см., например, в [1, с. 9-16],[2, гл. 11].

Однородное уравнение (0.1) при $k \in L_1\Big(e^{-at};(0,\infty)\Big)$ изучено Титчмаршем [2, теорема 153]. Неоднородное уравнение (0.1) исследовано несравнимо меньше чем однородное. Рассматриваемые задачи (A_1) и (A_2) исследованы не были. Изучаемый случай (ограничение (0.3)) принципиально отличается от случая, когда, например, $k(0) \neq 0,\ k(b-0) = 0$. В последнем (при условии непрерывности функции $f(t)$ в т.ч. $t = b$) дифференцированием по t уравнение (0.1) сводится к аналогичному уравнению второго рода, и следовательно задача (A_2) безусловно разрешима в пространстве $L_1\Big(e^{-at};(0,\infty)\Big)$ для достаточно большого $a > 0$. Задача же (A_1) в этом случае не будет представлять интерес, т.к. ее решение будет зависеть от произвольной (дифференцируемой) функции $f(t),\ t \in (0,b)$.

Некоторые результаты, связанные с восстановлением решения уравнения Вольтерра первого рода в свертках на конечном интервале см., например, в [3],[4].

В пункте 1 настоящей работы сформулированы основные ее результаты для скалярного случая, в п. 2 приведены доказательства этих результатов, в п. 3 рассмотрена задача (A_2) в векторном случае.

Положим

$\mathcal{F}M$ — Фурье образ матрицы-функции $M \in L_{n\times m}(R)$, где $L_{n\times l}(R)$ — пространство $n \times l$ матриц-функций с элементами из $L_1(R)$:

$$\mathcal{F}M(p) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} M(t)e^{ipt}\,dt,\ p \in R;$$

$W^{n\times n}$ — алгебра Винера непрерывных матриц-функций вида $c + \mathcal{F}M$, где c — постоянная матрица порядка n и $M \in L_{n\times n}(R)$, если $c = 0$, то соответствующую алгебру будем обозначать через $W_0^{n\times n}$; $W_+^{n\times n}$ ($W_-^{n\times n}$) — подалгебра в $W^{n\times n}$, состоящая из матриц-функций вида $c + \mathcal{F}M$ таких, что $M(t) = 0$ при $t < 0$ (при $t > 0$). В случае $M(t) = 0$ при $t < 0$ образ Фурье $\mathcal{F}M(p),\ p = x + iy$ будем называть также образом Фурье-Лапласа.

На алгебре $W_0^{n\times n}$ определим дополнительные друг к другу проекторы P_0^+ и P_0^- по следующим формулам,

$$P_0^{\pm}\ :\ W_0^{n\times n}\ \to\ W_{0\pm}^{n\times n},\ P_0^{\pm}\mathcal{F}M(p) \equiv P_0^{\pm}\{\mathcal{F}M(t)\}(p) =$$
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ipt}M(t)\theta(\pm t)\,dt,\ p \in R,$$

где θ - функция Хевисайда.

Отметим следующие свойства линейных операторов $P_0^{\pm}$:

$$P_0^+ + P_0^- = I,\ \mathcal{F}^{-1}\{P_0^{\pm}\mathcal{F}M(p)\}(t) = M(t)\theta(\pm t),\ t \in R,$$

где I – единичный оператор, $\mathcal{F}^{-1}$ - обратное преобразование Фурье.

1. Скалярный случай. Основные результаты.

Положим

$$\Lambda^-(p) := c_0 - e^{-ipb}\mathcal{F}k'(p),\ p = x + iy,\ x \in R,\ y \geq 0, \tag{1.1}$$

где

$$\mathcal{F}k'(p) = \int\limits_0^b e^{ipt}k'(t)\,dt.$$

Из теоремы единственности для аналитических функций следует, что целая аналитическая функция $\Lambda^-(p)$ имеет конечное число нулей (с учетом их кратности) в полуплоскости $Im\ p < C$ для любой постоянной $C > 0$ в виду того, что $\Lambda^-(x+iy) = c_0,\ |x| \to \infty$, равномерно по $y < C$, $\Lambda^-(x+iy) = c_0,\ y \to -\infty$, равномерно по $x \in R$.

Нули функции $\Lambda^-(p)$ в комплексной плоскости $p = x + iy$ будем обозначать через $p_j,\ j = 1, 2, ...$ Тогда положим

$$X_a := \{p_j = x_j + iy_j \in R^2 :\ \Lambda^-(p_j) = 0,\ y_j \leq a,\ j = 1, ..., J\},$$

где J – общее число нулей (без учета их кратности) функции $\Lambda^-(p)$ в полуплоскости $Im\,p \leq a$, где $a \geq a_0$. Можно видеть, что $X_a \subseteq X_c$ при $a < c$.

Сформулируем основные результаты п. 1. Начнем с теорем единственности для задач $(A_1), (A_2)$.

Теорема 1.1 *Если $X_a = \varnothing$, где $a \geq a_0$, то задача (A_1) может иметь не более одного решения. В противном случае, $X_a \neq \varnothing$, однородная задача (A_1) $(f(t) = 0,\ t > b)$ имеет нетривиальное решение.*

Из [2, теорема 153] непосредственно следует

Теорема 2.1 *При $a \geq a_0$ задача (A_2) может иметь не более одного решения.*

Перейдем теперь к теоремам существования. Положим

$$f_0(t) := f(t),\ t \in (0,b),\ f_0(t) := 0,\ t > b,\ f_+(t) := f(t+b),\ t \in (0,\infty),$$

$$\Lambda^-(p) \neq 0,\ Im\, p = a,\ \widehat{h}(p) := \frac{\mathcal{F}f'_+(p)}{\Lambda^-(p)}, \tag{1.2}$$

где $a \geq a_0$.

По теореме Винера [5, с. 4] из (1.2) следует, что

$$h(t) := \mathcal{F}^{-1}\{\widehat{h}(x+ia)\}(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt}\widehat{h}(x+ia)\,dx \in L_1(R). \tag{1.3}$$

Положим

$$\widetilde{f}'(t) := -c_0 h(t-b) + \int\limits_0^t k'(t-s)h(s-b)\,ds -$$

$$-\mathcal{F}^{-1}\{P_0^+\{e^{i(x+ia)b}\Lambda^-(x+ia)Q^+(x+ia)\}\}(t),\ t \in (0,b), \tag{1.4}$$

где

$$Q^+(p) = \sum_{j=1}^{J}\sum_{l=1}^{n_j} c_{lj}(p-p_j)^{-l},\ Im\, p = a,\ (Q^+ = 0 \text{ при } J = 0), \tag{1.5}$$

p_j $(j = 1, ..., J)$ – элементы, составляющие множество X_a, n_j – кратность p_j – го нуля, c_{lj} – произвольные комплексные постоянные, $l = 1, ..., n_j,\ j = 1, ..., J$.

Легко видеть, что $\widetilde{f}' \in L_1(0,b)$.

Справедливы следующие две теоремы.

Теорема 3.1 *Пусть выполнено неравенство в условии (1.2). Тогда задача (A_1) разрешима тогда и только тогда, когда в выражении для Q^+ в (1.5) существуют такие постоянные $c_{lj},\ l = 1, ..., n_j,\ j = 1, ..., J$, что*

$$\widetilde{f}(b-0) = f(b+0), \tag{1.6}$$

где функция $\widetilde{f}'$ определена в (1.4), и

$$\widetilde{f}(t) = \int\limits_0^t \widetilde{f}'(s)\,ds,\ t \in (0,b).$$

Если условие существования (1.6) выполнено, то общее решение задачи выражается следующими явными формулами

$$u(t) = \sum_{j=1}^{J} e^{p_j t}\sum_{l=1}^{n_j} c_{lj}t^l - h(t),\ t \in (0,\infty), \tag{1.7}$$

$$f(t) = \widetilde{f}(t),\ t \in (0,b). \tag{1.8}$$

Теорема 4.1 *Пусть выполнено неравенство в условии (1.2). Тогда задача* (A_2) *разрешима тогда и только тогда, когда в выражении для* Q^+ *в (1.5) существуют такие постоянные* $c_{lj},\ l = 1, ..., n_j,\ j = 1, ..., J$, *что*

$$\int\limits_0^b e^{ips} f'(s)\, ds = -e^{ipb}\Lambda^-(p)\Big(Q^+(p) + P_0^-\widehat{h}(p)\Big),\ Im\, p = a, \tag{1.9}$$

и выполнено следующее равенство,

$$\Delta := f(b+0) - f(b-0) = 0. \tag{1.10}$$

Если условия существования (1.9)-(1.10) выполнены, то общее решение задачи выражается следующей явной формулой (в образах Фурье-Лапласа при $Im\, p = a$*),*

$$\mathcal{F}u(p) = Q^+(p) - P_0^+\widehat{h}(p). \tag{1.11}$$

Легко видеть, что теорема 3.1 непосредственно следует из теоремы 4.1, т.к. формула (1.11) является образом Фурье-Лапласа формулы (1.7), а формула (1.4) – прообразом Фурье-Лапласа формулы (1.9) при $f(t) = \widetilde{f}(t),\ t \in (0, b)$. Теорема 1.1 вытекает из теоремы 3.1 при $f(t) = 0,\ t \in (b, \infty)$. Таким образом, для доказательства теорем 1.1 и 3.1 достаточно доказать теорему 4.1.

2. Доказательство теоремы 4.1 Предположим, сначала, что решение уравнения (0.1) существует в $L_1(e^{-at}; (0, \infty))$, где $a \geq a_0$. Тогда левая и правая части уравнения (0.1) из $L_1(e^{-at}; (0, \infty)$ по построению. Применив к уравнению (0.1) преобразование Фурье-Лапласа по $t \in (0, \infty)$, с учетом формулы для образа Фурье-Лапласа свертки имеем

$$\mathcal{F}k(p)\mathcal{F}u(p) = \mathcal{F}f(p),\ Im\, p = a, \tag{2.1}$$

где

$$\mathcal{F}f(p) = \int\limits_0^\infty e^{ipt} f(t)\, dt,\ \mathcal{F}k(p) = \int\limits_0^b e^{ipt} k(t)\, dt, \tag{2.2}$$

$$\mathcal{F}u(p) = \int\limits_0^\infty e^{ipt} u(t)\, dt.$$

С помощью формулы интегрирования по частям преобразуем выражения в (2.2). Для $Im\, p = a$ имеем

$$e^{-ipb}\mathcal{F}f(p) = -\frac{1}{ip}\Big(e^{-ipb}\mathcal{F}f_0'(p) + \Delta + \mathcal{F}f_+'(p)\Big),\ (f_0'(t) = 0,\ t > b),$$

$$e^{-ipb}\mathcal{F}k(p) = \frac{1}{ip}e^{-ipb}\Big(e^{ipb}k(b) - \mathcal{F}k'(p)\Big) = \frac{1}{ip}\Lambda^-(p).$$

Разделив левую и правую части равенства (2.1) на $\mathcal{F}k(p)$, с учетом вышестоящих равенств получим

$$\mathcal{F}u(p) = -\frac{1}{\Lambda^-(p)}\Big(e^{-ipb}\mathcal{F}f_0'(p) + \mathcal{F}f_+'(p) + \Delta\Big),\ p = x + ia. \tag{2.3}$$

При $x \to \infty$ левая часть равенств (2.3) стремится к нулю, а правая стремится к Δ/c_0. Следовательно, для выполнения равенства (2.3) необходимо, чтобы $\Delta = 0$.

С учетом выражения для функции $\widehat{h}(x+ia)$ (последняя принадлежит алгебре $W_0 \equiv W_0^{1\times 1}$ по построению) и равенства $\widehat{h}(x+ia) = P_0^+\{\widehat{h}(x+ia)\} + P_0^-\{\widehat{h}(x+ia)\}$ перепишем (2.3) при $\Delta = 0$ в следующем виде,

$$\mathcal{F}u(p) + P_0^+\widehat{h}(p) = -\frac{1}{\Lambda^-(p)}e^{-ibp}\mathcal{F}f_0'(p) - P_0^-\widehat{h}(p),\ Im\, p = a. \tag{2.4}$$

Левая часть равенства (2.4) аналитически продолжается с прямой $x+ia$ в полуплоскость $p = x+iy,\ y > a$ и регулярна там, непрерывна вплоть до границы и исчезает на бесконечности в этой полуплоскости. Правая часть равенства (2.4) аналитически продолжается с с прямой $x+ia$ в полуплоскость $p = x+iy,\ y < a$ и регулярна в там, за исключением, быть может, полюсов – нулей функции $\Lambda^-(p)$, непрерывна вплоть до границы и исчезает на бесконечности в этой полуплоскости (с выколотыми точками $p_j,\ j = 1,..,J$ – нулями функции $\Lambda^-(p)$). Тогда из (2.4) по теореме об аналитическом продолжении и обобщенной Лиувилля [6, с. 29] для $Im\, p = a$ получим

$$\mathcal{F}u(p) + P_0^+\widehat{h}(p) = -\frac{1}{\Lambda^-(p)}e^{-ibp}\mathcal{F}f_0'(p) - P_0^-\widehat{h}(p) = Q^+(p), \tag{2.5}$$

где рациональная функция Q^+ определена в (1.5). Из (2.5) непосредственно следуют равенства (1.9) и (1.11). Отметим, что правая часть равенства (1.9) для $p = x+ia$ из класса W_{0+}, что вытекает из следующих очевидных соотношений,

$$P_0^-\widehat{h} = \widehat{h} - P_0^+\widehat{h},\ \Lambda^-(x+ia)h(x+ia) \in W_{0+},\ \Lambda^-(x+ia)Q^+(x+ia) \in W_{0-}.$$

Докажем теорему 4.1 в другую сторону. Определим функции $\mathcal{F}u(p)$ и $\mathcal{F}f_0'(p)$ по формулам (1.11) и (1.9), соответственно (в последней $f_0(t) = f(t),\ t \in (0,b)$), и пусть $\Delta = 0$. Из (1.9)-(1.11) следует (2.5). Далее, поднимаясь по приведенному выше доказательству, начиная с (2.5), будем получать последовательно (2.4),(2.3) и (2.1),(0.1). Теорема 4.1 доказана.

3. Векторный случай (n>1). Основные результаты. Положим

$$k \in L_{n\times n}\Big(e^{-a_0t};(0,\infty)\Big),\ f, f' \in L_{n\times 1}\Big(e^{-a_0t};(0,\infty)\Big),$$
$$k(0) = 0,\ f(0) = 0, \tag{3.1}$$

$$\widehat{d}(p) := \det \mathcal{F}k(p),\ \widehat{K}(p) := \widehat{d}(p)(\mathcal{F}k(p))^{-1},\ Im\, p = a_0, \tag{3.2}$$

где $a_0 = const$.

Из (3.2) следует, что при $p = x+ia$, где $a \geq a_0,\ x \in R$

$$\widehat{K} \in W_+^{n\times n},\ \widehat{d} \in W_{0+} \equiv W_{0+}^{1\times 1},$$

т.е.

$$K(t) := \mathcal{F}^{-1}\{\widehat{K}(x+ia)\}(t) \in L_{n\times n}\Big(e^{-at};(0,\infty)\Big),$$
$$d(t) := \mathcal{F}^{-1}\{\widehat{d}(x+ia)\}(t) \in L_1\Big(e^{-at};(0,\infty)\Big).$$

Считаем, что существует постоянная $b \in (0,\infty)$ такая, что

$$d(t) = 0,\ t > b,\ d' \in L_1(0,b),\ d(b-0) = c_0 \neq 0, \tag{3.3}$$

кроме того, для некоторого $a \geq a_0$ выполнено неравенство

$$\Lambda^-(p) := c_0 - e^{-ipb}\mathcal{F}d'(p) \neq 0,\ p = x+ia,\ x \in R. \tag{3.4}$$

Здесь задача (A_2) формулируется следующим образом, найти решение $u \in L_{n\times1}\Big(e^{-at};(0,\infty)\Big)$ системы уравнений первого рода (0.1) при условиях (3.1)-(3.4).

Имеет место

Теорема 3.1 *Задача* (A_2) *может иметь не более одного решения.*

Перейдем теперь к теореме существования. Положим

$$X_a := \{p_j = x_j + iy_j \in R^2 :\ \Lambda^-(p_j) = 0,\ y_j \le a,\ j = 1,...,J\},$$

где J – общее число нулей (без учета их кратности) функции $\Lambda^-(p)$ в полуплоскости $Im\,p \le a$;

$$\widehat{v}_+(p) := \widehat{K}(p)\mathcal{F}f'(p).$$

Из вышестоящего определения функции $\widehat{v}_+$ вытекает, что

$$\widehat{v}_+(x + ia) \in W_+^{n\times1},$$

где класс $W_+^{n\times m}$ при $m \ne n$ определятся аналогично алгебре $W_+^{n\times n}$. Следовательно, существует функция $v_+ \in L_{n\times1}\Big(e^{-at};(0,\infty)\Big)$ такая, что $\mathcal{F}v_+(p) = \widehat{v}_+(p)$.

Положим далее

$$f_0(t) := \int\limits_0^t v_+(s)\,ds,\ t \in (0,b),\ f_0(t) = f_0'(t) := 0,\ t > b,$$

$$f_+(t) := \int\limits_0^t v_+(s+b)\,ds,\ t > 0.$$

Тогда

$$\widehat{v}_+(p) = \mathcal{F}f_0'(p) + e^{ipb}\mathcal{F}f_+'(p),\ Im\,p = a. \tag{3.5}$$

Теорема 3.2 *Задача* (A_2) *разрешима тогда и только тогда, когда существуют такие постоянные вектора*

$$c_{lj},\ \textit{где}\ c_{lj} = (c_{lj}^{(1)},...,c_{lj}^{(n)})^T,\ l = 1,...,n_j,\ j = 1,...,J,$$

что

$$\mathcal{F}f_0'(p) = -e^{ipb}\Lambda^-(p)\Big(Q^+(p) + P_0^-\widehat{h}(p)\Big), \tag{3.6}$$

где

$$Q^+(p) = \sum_{j=1}^J \sum_{l=1}^{n_j} c_{lj}(p - p_j)^{-l},\ (Q^+ = 0\ \textit{при}\ J = 0),)$$

$Q^+ = (Q_1^+,...,Q_n^+)^T$, p_j $(j = 1,...,J)$ *– элементы, составляющие множество* X_a, n_j *– кратность* p_j *– го нуля,*

$$\widehat{h}(p) = \frac{1}{\Lambda^-(p)}\mathcal{F}f_+'(p),\ f_+ = (f_{+1},...,f_{+n})^T.$$

Если условие существования (3.6) выполнено, то общее решение задачи выражается следующей явной формулой (в образах Фурье-Лапласа при $Im\,p = a$*),*

$$\mathcal{F}u_j(p) = Q_j^+(p) - P_0^+\widehat{h}_j(p),\ j = 1,...,n, \tag{3.7}$$

где $u = (u_1,...,u_n)^T,\ \widehat{h} = (\widehat{h}_1,...,\widehat{h}_n)^T.$

Доказательство теорем 3.1,3.2. Начнем с доказательства теоремы 3.2. Легко видеть, что доказательство теоремы 3.2 будет аналогичным доказательству теоремы 4.1. В самом деле, после применения преобразования Фурье-Лапласа к системе уравнений (0.1) получим векторный аналог уравнения (2.1) и соотношений в (2.2), где

$$\mathcal{F}f(p) = -\frac{1}{ip}\mathcal{F}f'(p),\ Im\,p = a,$$

вышестоящее равенство получено по формуле интегрирования по частям. Умножив слева систему уравнений (2.1) на матрицу $\widehat{K}(p)$, с учетом определения функции $\widehat{v}_+$, имеем

$$\widehat{d}(p)\mathcal{F}u(p) = -\frac{1}{ip}\widehat{v}_+(p),\ Im\,p = a. \tag{3.8}$$

Разделим левую и правую части равенства (3.8) на $\widehat{d}(p)$, с учетом (3.4),(3.5), равенства $d(0) = 0$ (которое следует из условия $k(0) = 0$) и следующей очевидной цепочки равенств,

$$\widehat{d}(p) = \frac{1}{ip}(e^{ipb}d(b) - \mathcal{F}d'(p)) = \frac{e^{ipb}}{ip}\Lambda^-(p),$$

получим аналог равенству (2.3),

$$\mathcal{F}u_j(p) = -\frac{1}{\Lambda^-(p)}\Big(e^{-ipb}\mathcal{F}f'_{0j}(p) + \mathcal{F}f'_{+j}(p)\Big),\ j = 1,...,n,\ p = x + ia,$$

где $f_0 = (f_{01}, ..., f_{0n})^T$. Далее доказательство повторяет доказательство теоремы 4.1.

Теорема 3.1 следует из теоремы 3.2 при $f = 0$. В самом деле, при $f = 0$ получим $\widehat{v}_+ = 0$, и следовательно, $f_0 = f_+ = h = 0$. Тогда из условия существования (3.6) с необходимостью вытекает, что $Q^+ = 0$. Из (3.7) получим $u = 0$ – общее решение однородной системы уравнений (0.1). Теорема 3.1 доказана.

Список литературы

[1] С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев, *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*, Наука и техника, Москва, 1987. MR0915556

[2] Э.Ч. Титчмарш, *Введение в теорию интегралов Фурье*, КомКнига, Москва, 2007.

[3] А.Ф. Воронин, *Система уравнений Вольтерра первого рода в свертках на конечном интервале*, Дифференцальные уравнения, **37:**9, (2001), 1258–1264. MR0915556

[4] А.Ф. Воронин, *Обобщение теоремы Титчмарша о носителях в свертке на многомерные системы уравнений Вольтерра первого рода в свертках*, Дифференцальные уравнения, **39:**3, (2003), 416 – 417. MR2132979

[5] М.Г. Крейн, *Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов*, Успехи мат. наук, **13:**5, (1958), 3 – 120. MR0102721

[6] Ф.Д. Гахов, Ю.И. Черский, *Уравнения типа свертки*, Наука, Москва, 1978. MR0527628

Анатолий Федорович Воронин
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: voronin@math.nsc.ru