S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 9, стр. 472–477 (2012) УДК 512.54
MSC 20C20, 20D06

О КОНЕЧНЫХ НЕПРОСТЫХ ТРИПРИМАРНЫХ ГРУППАХ

А. С. Кондратьев, И. В. Храмцов

Abstract. Chief factors of finite nonsimple threeprimary groups with disconnected prime graph are described.

Keywords: finite group, threeprimary group, chief factor, prime graph, modular representation.

1. Введение

Интерес многих исследователей вызывают различные проблемы распознаваемости группы по некоторому набору ее арифметических параметров. Одной из таких проблем является проблема распознаваемости конечной группы по ее графу простых чисел.

Пусть G — конечная группа. Обозначим через $\pi(G)$ множество простых делителей порядка группы G. Графом простых чисел группы G называется граф $\Gamma(G)$ с множеством вершин $\pi(G)$, в котором две различные вершины p и q соединены ребром тогда и только тогда, когда в G есть элемент порядка pq. Обозначим число компонент связности графа $\Gamma(G)$ через $s(G)$, а множество его связных компонент — через $\{\pi_i(G) \mid 1 \leq i \leq s(G)\}$; при этом для группы G четного порядка считаем, что $2 \in \pi_1(G)$.

В рамках общей задачи изучения конечных групп по свойствам их графов простых чисел прежде всего привлекает внимание класс групп с несвязным графом простых чисел. Это объясняется тем, что указанный класс широко

Kondratiev A. S., Khramtsov I. V., On finite nonsimple threeprimary groups with disconnected prime graph.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00324), РФФИ-ГФЕН Китая (проект 12-01-91155), программы Отделения математических наук РАН (проект 12-Т-1-1003), программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12-С-1-1018) и с НАН Беларуси (проект 12-С-1-1009), Совета по грантам Президента РФ (проект № МК-3395.2012.1).

Поступила 10 октября 2012, опубликована 31 октября 2012.

обобщает класс конечных групп Фробениуса, что сразу видно из известной структурной теоремы Грюнберга — Кегеля [10, теорема A] о конечных группах с несвязным графом простых чисел. Роль же групп Фробениуса в теории конечных групп совершенно исключительна.

При изучении групп с несвязным графом простых чисел возникают нетривиальные проблемы, связанные с модулярными представлениями конечных групп. Рассмотрим одну такую проблему. Пусть G — конечная группа с несвязным графом простых чисел, не изоморфная ни группе Фробениуса, ни двойной группе Фробениуса. Обозначим через $F(G)$ подгруппу Фиттинга группы G. Тогда по теореме Грюнберга — Кегеля группа $\overline{G} = G/F(G)$ почти проста (т. е. имеет простой неабелев цоколь) и известна ввиду результатов [2, 9, 10]. Предположим, что $F(G) \neq 1$. Каждой связной компоненте $\pi_i(G)$ графа $\Gamma(G)$ для $i > 1$ соответствует нильпотентная изолированная $\pi_i(G)$-холлова подгруппа $X_i(G)$ группы G. Любой неединичный элемент из $X_i(G)$ $(i > 1)$ действует без неподвижных точек на $F(G)$. Пусть K и L — два соседних члена главного ряда группы G $(K < L)$, содержащиеся в $F(G)$. Тогда (главный) фактор $V = L/K$ является элементарной абелевой p-группой для некоторого простого числа p, и его можно рассматривать как неприводимый $GF(p)\overline{G}$-модуль (так как $C_{G/K}(V) = F(G)/K$), причем каждый неединичный элемент из $X_i(G)$ $(i > 1)$ действует без неподвижных точек на V. Поэтому задача изучения строения группы G во многом сводится к имеющей самостоятельный интерес проблеме описания неприводимых $GF(p)\overline{G}$-модулей, на которые заданный элемент простого порядка (отличного от p) из $\overline{G}$ действует без неподвижных точек.

Итак, при изучении групп G с несвязным графом простых чисел в первую очередь возникает вопрос, каковы главные факторы группы G, входящие в $F(G)$, как $\overline{G}$-модули? Авторами [3] были найдены главные факторы коммутантов неразрешимых триримарных групп с несвязным графом простых чисел. В настоящей статье эта работа продолжена. В ней рассматривается случай, когда G является неразрешимой трипримарной группой с несвязным графом простых чисел и $\overline{G} = G/F(G)$ — почти простая, но не простая группа. Доказана следующая

Теорема 1. *Пусть G—конечная неразрешимая трипримарная группа с несвязным графом простых чисел, $\overline{G} = G/F(G)$ — почти простая, но не простая группа и $F(G) \neq 1$. Тогда $F(G) = O_2(G) \times O_3(G)$ и выполнено одно из следующих утверждений:*

(1) *$\overline{G} \cong S_5$, каждый 2-главный фактор группы G как $\overline{G}$-модуль изоморфен одному из двух 4-мерных неприводимых $GF(2)S_5$-модулей и каждый 3-главный фактор группы G изоморфен одному из двух 4-мерных неприводимых $GF(3)S_5$-модулей.*

(2) *$\overline{G} \cong S_6$, каждый 2-главный фактор группы G как $\overline{G}$-модуль изоморфен одному из двух 4-мерных квазиэквивалентных неприводимых $GF(2)S_6$-модулей и каждый 3-главный фактор группы G изоморфен одному из двух 4-мерных неприводимых $GF(3)S_6$-модулей.*

(3) *$\overline{G} \cong M_{10}$, каждый 2-главный фактор группы G как $\overline{G}$-модуль изоморфен единственному 8-мерному неприводимому $GF(2)M_{10}$-модулю и каждый 3-главный фактор группы G как $\overline{G}$-модуль изоморфен одному из двух 4-мерных неприводимых $GF(3)M_{10}$-модулей.*

(4) $\overline{G} \cong Aut(L_2(8))$, $O_3(G) = 1$ *и каждый* 2*-главный фактор группы* G *как* $\overline{G}$*-модуль изоморфен одному из двух неприводимых* $GF(2)Aut(L_2(8))$*-модулей размерности* 6 *или* 12.

(5) $\overline{G} \cong PGL_2(7)$, *каждый* 2*-главный фактор группы* G *как* $\overline{G}$*-модуль изоморфен единственному* 6*-мерному неприводимому* $GF(2)PGL_2(7)$*-модулю и каждый* 3*-главный фактор группы* G *как* $\overline{G}$*-модуль изоморфен одному из двух неприводимых* $GF(3)PGL_2(7)$*-модулей размерности* 6 *или* 12.

(6) $\overline{G} \cong G_2(2)$, *каждый* 2*-главный фактор группы* G *как* $\overline{G}$*-модуль изоморфен единственному* 6*-мерному неприводимому* $GF(2)G_2(2)$*-модулю и каждый* 3*-главный фактор группы* G *как* $\overline{G}$*-модуль изоморфен одному из двух неприводимых* $GF(3)G_2(2)$*-модулей размерности* 6 *или* 12.

(7) $\overline{G} \cong Aut(L_3(3))$, *каждый* 2*-главный фактор группы* G *как* $\overline{G}$*-модуль изоморфен единственному* 12*-мерному неприводимому* $GF(2)Aut(L_3(3))$*-модулю и каждый* 3*-главный фактор группы* G *как* $\overline{G}$*-модуль изоморфен одному из трех неприводимых* $GF(3)Aut(L_3(3))$*-модулей размерности* 6, 12 *или* 30.

(8) $\overline{G} \cong PGL_2(17)$, *каждый* 2*-главный фактор группы* G *как* $\overline{G}$*-модуль изоморфен либо одному из двух* 16*-мерных неприводимых* $GF(2)PGL_2(17)$ *-модулей, либо единственному* 48*-мерному* $GF(2)PGL_2(17)$*-модулю и каждый* 3*-главный фактор группы* G *как* $\overline{G}$*-модуль изоморфен одному из двух* 16*-мерных неприводимых* $GF(3)PGL_2(17)$*-модулей.*

Каждый из пунктов теоремы реализуется.

2. Обозначения и предварительные результаты

Наши обозначения и терминология в основном стандартны, их можно найти в [6, 7, 4, 8].

Если группа G действует на группе H, то будем говорить, что неединичный элемент $g \in G$ действует на H *свободно* (или *без неподвижных точек*), если $C_H(g) = 1$.

Пусть $\varphi : G \to GL_n(F)$ — неприводимое представление конечной группы G над алгебраически замкнутым полем F простой характеристики p и β — брауэров характер представления φ. Полем определения представления φ называется наименьшее подполе из F, над которым φ может быть реализовано. Хорошо известно (см. [7, введение]), что поле определения представления φ равно $GF(p)(\beta(x_i)^\mu \mid 1 \le i \le r)$, где $x_1, \ldots, x_r$ — множество представителей классов сопряженных p'-элементов группы G и $\mu : \mathbb{Z}[U] \to K$ — некоторый кольцевой гомоморфизм, где U — множество комплексных корней из 1 порядка, взаимно простого с p. Обычно при записи поля определения представления в этой формуле μ опускают. Неприводимое представление конечной группы G над (не обязательно алгебраически замкнутым) подполем K поля F называется абсолютно неприводимым, если оно остается неприводимым при любом расширении поля K или, что равносильно, K содержит поле определения этого представления.

Следующая хорошо известная лемма (см., например, [5, лемма 3]) позволяет вычислять поля определения некоторых представлений.

Лемма 1. *Пусть* p *— нечетное простое число и* r *— ненулевое целое число, взаимно простое с* p. *Тогда* $(GF(p)(\sqrt{r})\colon GF(p))$ *равно* 1 *или* 2, *если сравнение* $x^2 \equiv r(mod\ p)$ *разрешимо или неразрешимо соответственно.*

Нам понадобится также следующая

Лемма 2 ([8], теорема VII.1.16). *Пусть G — конечная группа, $F = GF(p^m)$ — поле определения характеристики $p > 0$ для абсолютно неприводимого FG-модуля V, $\langle\sigma\rangle = Aut(F)$, V_0 обозначает модуль V, рассматриваемый как $GF(p)G$-модуль, и $W = V_0 \otimes F$. Тогда*

(1) $W = \bigoplus_{i=1}^{m} V^{\sigma^i}$, где V^{σ^i} — модуль, алгебраически сопряженный с V посредством σ^i;

(2) V_0 является неприводимым $GF(p)G$-модулем и, в частности, W реализуется как неприводимый $GF(p)G$-модуль V_0;

(3) с точностью до изоморфизма модулей неприводимые $GF(p)G$-модули находятся во взаимно однозначном соответствии с классами алгебраической сопряженности неприводимых $\overline{GF(p)}G$-модулей.

Следующий полезный результат хорошо известен (см., например, [1, лемма 4]).

Лемма 3. *Пусть G — конечная простая группа, F — поле характеристики $p > 0$, V — абсолютно неприводимый FG-модуль и β — характер Брауэра модуля V. Если g — элемент простого порядка, отличного от p, из G, то*

$$dim\ C_V(g) = (\beta|_{\langle g\rangle}, 1|_{\langle g\rangle}) = \frac{1}{|g|} \sum_{x \in \langle g\rangle} \beta(x).$$

3. Доказательство теоремы

Пусть G — конечная неразрешимая трипримарная группа с несвязным графом простых чисел и $F(G) \neq 1$. В работе [3] было показано, что тогда $F(G) = O_2(G) \times O_3(G)$ и $\overline{G}$ изоморфна одной из групп A_5, S_5, A_6, M_{10}, S_6, $U_4(2)$, $L_2(7)$, $PGL_2(7)$, $L_2(8)$, $Aut(L_2(8))$, $U_3(3)$, $G_2(2)$, $L_3(3)$, $Aut(L_3(3))$, $L_2(17)$, $PGL_2(17)$. Случай, когда группа $\overline{G}$ проста, был рассмотрен в [3].

Пусть $\overline{G}$ изоморфна почти простой, но не простой группе. Тогда из [3, таблица] и несвязности графа $\Gamma(G)$ следует, что в G существует элемент простого порядка $r \notin \{2, 3\}$, действующий на $F(G)$ без неподвижных точек. Пусть $p \in \{2, 3\}$.

Предположим, что $\overline{G} \cong S_5$. Тогда $r = 5$. С помощью леммы 3 и таблиц p-модулярных брауэровых характеров для группы S_5 (см. [7]), находим, что единственными (с точностью до изоморфизма) абсолютно неприводимыми $\overline{G}$-модулями над полем характеристики p, на которых элемент порядка 5 из $\overline{G}$ действует без неподвижных точек, являются два четырехмерных $GF(p)S_5$-модуля. Следовательно, выполнен пункт (1) теоремы.

Предположим, что $\overline{G} \cong S_6$. Тогда $r = 5$. С помощью леммы 3 и таблиц p-модулярных брауэровых характеров для группы S_6 (см. [7]), находим, что единственными абсолютно неприводимыми $\overline{G}$-модулями над полем характеристики p, на которых элемент порядка 5 из $\overline{G}$ действует без неподвижных точек, являются два четырехмерных $GF(p)S_6$-модуля, которые при $p = 2$ переставляются внешним автомофизмом группы S_6. Следовательно, выполнен пункт (2) теоремы.

Предположим, что $\overline{G} \cong M_{10}$. Тогда $r = 5$. С помощью леммы 3 и таблиц 2-модулярных брауэровых характеров для группы M_{10} (см. [7]), находим, что единственным абсолютно неприводимым $\overline{G}$-модулем над полем характеристики 2, на котором элемент порядка 5 из $\overline{G}$ действует без неподвижных точек, является 8-мерный $GF(2)M_{10}$-модуль. По лемме 3 и таблицам 3-модулярных характеров Брауэра для группы M_{10} получаем, что единственными абсолютно неприводимыми $\overline{G}$-модулями над полем характеристики 3, на которых элемент порядка 5 действует без неподвижных точек, являются два 4-мерных модуля с полем определения $GF(3)(\sqrt{-2})$. Ввиду леммы 1 это поле определения равно $GF(3)$. Следовательно, выполнен пункт (3) теоремы.

Предположим, что $\overline{G} \cong Aut(L_2(8))$. Тогда $r = 7$. Из [3, теорема] получаем, что $O_3(G) = 1$, поэтому $F(G) = O_2(G) \neq 1$. С помощью леммы 3 и таблиц 2-модулярных брауэровых характеров для группы $Aut(L_2(8))$ (см. [7]) находим, что абсолютно неприводимыми $\overline{G}$-модулями над полем характеристики 2, на которых элемент порядка 7 из $\overline{G}$ действует без неподвижных точек, являются два $GF(2)Aut(L_2(8))$-модуля размерности 6 или 12. Следовательно, выполнен пункт (4) теоремы.

Предположим, что $\overline{G} \cong PGL_2(7)$. Тогда $r = 7$. С помощью леммы 3 и таблиц 2-модулярных брауэровых характеров для группы $PGL_2(7)$ (см. [7]), находим, что единственным абсолютно неприводимым $\overline{G}$-модулем над полем характеристики 2, на котором элемент порядка 7 из $\overline{G}$ действует без неподвижных точек, является 6-мерный $GF(2)PGL_2(7)$-модуль. По лемме 3 и таблицам 3-модулярных характеров Брауэра для группы $PGL_2(7)$ (см. [7]) получаем, что единственными абсолютно неприводимыми $\overline{G}$-модулями над полем характеристики 3, на которых элемент порядка 7 действует без неподвижных точек, являются один 6-мерный $GF(3)PGL_2(7)$-модуль и два 6-мерных модуля с полем определения $GF(3)(\sqrt{2})$. Ввиду леммы 1 это поле определения равно $GF(3^2)$. Следовательно, ввиду леммы 2 выполнен пункт (5) теоремы.

Предположим, что $\overline{G} \cong G_2(2)$. Тогда $r = 7$. С помощью леммы 3 и таблиц 2-модулярных брауэровых характеров для группы $G_2(2)$ (см. [7]), находим, что единственным абсолютно неприводимым $\overline{G}$-модулем над полем характеристики 2, на котором элемент порядка 7 из $\overline{G}$ действует без неподвижных точек, является 6-мерный $GF(2)G_2(2)$-модуль. По лемме 3 и таблицам 3-модулярных брауэровых характеров для группы $G_2(2)$ получаем, что единственными абсолютно неприводимыми $\overline{G}$-модулями группы $G_2(2)$ над полем характеристики 3, на которых элемент порядка 7 действует без неподвижных точек, являются два $GF(3)G_2(2)$-модуля размерности 6 или 12. Следовательно, выполнен пункт (6) теоремы.

Предположим, что $\overline{G} \cong Aut(L_3(3))$. Тогда $r = 13$. С помощью леммы 3 и таблиц 2-модулярных брауэровых характеров для группы $Aut(L_3(3))$ (см. [7]) находим, что единственным абсолютно неприводимым $\overline{G}$-модулем над полем характеристики 2, на которых элемент порядка 13 из $\overline{G}$ действует без неподвижных точек, является 12-мерный $GF(2)Aut(L_3(3))$-модуль. По лемме 3, [3, теорема, 5(vii)] и таблицам 3-модулярных брауэровых характеров для группы $Aut(L_3(3))$ (см. [7]) получаем, что единственными абсолютно неприводимыми $\overline{G}$-модулями над полем характеристики 3, на которых элемент порядка 13 действует без неподвижных точек, являются три $GF(3)Aut(L_3(3))$-модуля размерности 6, 12 или 30. Следовательно, выполнен пункт (7) теоремы.

Предположим, что $\overline{G} \cong PGL_2(17)$. Тогда $r = 17$. С помощью леммы 3 и таблиц 2-модулярных брауэровых характеров для группы $PGL_2(17)$ (см. [7])

находим, что абсолютно неприводимыми $\overline{G}$-модулями над полем характеристики 2, на которых элемент порядка 17 из $\overline{G}$ действует без неподвижных точек, являются либо один из двух 16-мерных $GF(2)PGL_2(17)$-модулей, либо один из трех 16-мерных $\overline{G}$-модулей с полем определения $GF(2)(2\cos(2\pi/9))$. Из [3, теорема, 5(viii)] следует, что $GF(2)(2\cos(2\pi/9)) = GF(8)$. Применяя лемму 2, получаем, что этим трем модулям соответствует единственный 48-мерный $GF(2)PGL_2(17)$-модуль. С помощью леммы 3 и таблиц 3-модулярных брауэровых характеров для группы $PGL_2(17)$ (см. [7]) получаем, что единственными абсолютно неприводимыми $\overline{G}$-модулями над полем характеристики 3, на которых элемент порядка 17 действует без неподвижных точек, являются два 16-мерных $GF(3)PGL_2(17)$-модуля. Следовательно, выполнен пункт (8) теоремы.

Теорема доказана.

Список литературы

[1] С. Дольфи, Э. Джабара Э., М. С. Лючидо М.С., *C55-группы*, Сиб. мат. журн., **45**:6 (2004), 1285–1298. MR2123292

[2] А. С. Кондратьев, *О компонентах графа простых чисел конечных простых групп*, Мат. сб., **180**:6 (1989), 787–797. MR1015040

[3] А.С. Кондратьев, И. В. Храмцов, *О конечных трипримарных группах*, Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, **16**:3 (2010), 150–158.

[4] Ч. Кэртис, И. Райнер, *Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр*, М.: Наука, 1969. MR0248238

[5] A. S. Kondratiev, *Finite linear groups of small degree. II*, Commun. Algebra, **29**:9 (2001), 4103–4123. MR1857030

[6] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, R. A. Wilson, *Atlas of finite groups*, Oxford: Clarendon Press, 1985. MR0827219

[7] C. Jansen, K. Lux, R. Parker, R. Wilson, *An atlas of Brauer characters*, Oxford: Clarendon Press, 1995. MR1367961

[8] B. Huppert, N. Blackburn, *Finite groups II*, Berlin: Springer-Verlag, 1982. MR0650245

[9] M. S. Lucido, *Prime graph components of finite almost simple groups*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **102** (1999), 1–22; *addendum*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. **107** (2002), 189–190. MR1739529, MR1926210

[10] J. S. Williams, *Prime graph components of finite groups*, J. Algebra, **69**:2 (1981), 487–513. MR0617092

Анатолий Семенович Кондратьев
Институт математики и механики УрО РАН,
ул. С. Ковалевской, 16,
620990, Екатеринбург, Россия
E-mail address: a.s.kondratiev@imm.uran.ru

Игорь Владимирович Храмцов
Институт математики и механики УрО РАН,
ул. С. Ковалевской, 16,
620990, Екатеринбург, Россия
E-mail address: ihramtsov@gmail.com