S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 9, стр. 478–530 (2012) УДК 519.148
MSC 52C20

ВЫПУКЛЫЕ ПЯТИУГОЛЬНИКИ, ЗАМОЩАЮЩИЕ ПЛОСКОСТЬ (ТИПЫ: 11112, 11122)

О.Г. Багина

Abstract. We consider the problem of classifying the convex pentagons that tile the plane edge-to-edge. It is proved that in each such tiling of the plane by pentagons, there exists a tile whose set of vertex degrees can be one of the following: (3,3,3,3,3), (3,3,3,3,4), (3,3,3,3,5), (3,3,3,3,6), (3,3,3,4,4). This provides the possibility of searching which finally leads to exhaustive classification of such pentagons. We consider convex pentagons types 11112, 11122.

Keywords: convex pentagon, tiling the plane, plane.

1. Введение

Рассматривается задача замощения плоскости конгруэнтными выпуклыми пятиугольниками. Будем называть пятиугольник мозаичным, если существует замощение плоскости пятиугольниками, конгруэнтными данному, такое, что ни какие два пятиугольника не имеют общих внутренних точек. Замощенную таким образом плоскость называют мозаикой, а сам пятиугольник — плиткой этой мозаики.

Было найдено 14 типов мозаичных пятиугольников [3], [5], [1]. Но до сих пор нет доказательства полноты имеющегося перечня.

Мозаика называется нормальной (мозаикой "ребро к ребру"), если пересечение любых двух смежных ее плиток является ребром или вершиной каждой из них.

Некоторые мозаичные пятиугольники из известного списка не допускают нормальных мозаик, но есть мозаичные пятиугольники, замощающие плоскость нормально.

Bagina, O.G., Convex pentagons which tile the plane (types: 11112, 11122).

Поступила 25 мая 2012 г., опубликована 5 ноября 2012 г.

В настоящей работе рассматривается задача нахождения всех выпуклых пятиугольников, замощающих плоскость нормально. Работа является продолжением работы [1], опубликованной в 2011 г. в журнале Вестник КемГУ. Сформулируем основные определения и теоремы из [1]. Пусть $\mathbf{P}$ — произвольная нормальная мозаика из пятиугольников, конгруэнтных пятиугольнику P. Тем же символом P будем обозначать какую-нибудь плитку мозаики.

Пусть X_0, X_1, X_2, X_3, X_4 — последовательные вершины пятиугольника P , его углы — соответственно x_0, x_1, x_2, x_3, x_4. Длины сторон пятиугольника $C_i = |X_{i-1}X_i|$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$, индексы в последнем равенстве берутся по модулю 5.

Основной результат работы [1] и настоящей работы содержится в следующей теореме.

Теорема 1. *Выпуклый пятиугольник тогда и только тогда замощает плоскость нормально, когда он относится к одному из следующих типов:*

1. $x_0 + x_1 = 180°, C_0 = C_2$ *или* $C_3 = C_4$;
2. $x_0 + x_2 = 180°, C_1 = C_3, C_0 = C_2$;
3. $x_0 = x_2 = 90°, C_0 = C_1, C_2 = C_3$;
4. $x_2 = 2x_0 = 120°, C_0 = C_1, C_2 = C_3$;
5. $x_1 + x_3 = 180°, x_0 = 2x_3, C_0 = C_1 = C_2, C_3 = C_4$;
6. $x_0 + 2x_3 = 360°, x_2 + 2x_1 = 360°; C_0 = C_1 = C_2 = C_3$;
7. $x_1 + 2x_0 = 360°, x_2 + 2x_3 = 360°, C_0 = C_1 = C_2 = C_3$;
8. $x_1 + 2x_4 = 360°, x_2 + 2x_3 = 360°, C_0 = C_1 = C_2 = C_3$.

В дальнейшем мы будем обозначать вершины пятиугольника либо символом X_i, либо просто символом i, $i = 0, \ldots, 4$. А стороны пятиугольника либо X_iX_j, либо ij, либо просто i, где $i = 0, \ldots, 4$, $j = i + 1$ и все индексы берутся по модулю 5.

Назовем последовательность $\delta(P)$ из пяти цифр типом пятиугольника P. Каждая цифра последовательности $\delta(P)$ принимает значение от 1 до 5. Например, запись $\delta(P) = 11212$ означает, что в пятиугольнике P $C_0 = C_1 = C_3, C_2 = C_4, C_0 \neq C_2$. Будем говорить, что δ-тип пятиугольника P равен 11212. Будем также говорить, что в этом пятиугольнике P стороны 0, 1, 3 первого типа, а стороны 2 и 4 второго типа.

Обозначим $\delta(i)$ — тип i-й стороны пятиугольника P, $i = 0, \ldots, 4$. Стороны i, j пятиугольника P одинакового типа, если их длины равны.

Учитывая, что нумерацию можно начинать с любой вершины и менять направление нумерации, имеется ровно 12 различных δ-типов: 12345, 11234, 11232, 12134, 12123, 11213, 11212, 11223, 11123, 11122, 11112, 11111.

В [2] рассмотрен δ-тип 11111. Там было доказано, что равносторонний выпуклый пятиугольник тогда и только тогда замощает плоскость, когда сумма каких-нибудь двух углов равна 180°, либо углы этого пятиугольника удовлетворяют линейной системе уравнений

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_0 + 2x_3 & = & 360°, \\ x_2 + 2x_1 & = & 360°. \end{array} \right.$$

Таким образом, мозаичный равносторонний пятиугольник удовлетворяет условиям 1, 2, или 6 теоремы 1.

В [1] рассмотрены δ-типы: 12345, 11234, 11232, 12134, 12123, 11213, 11212, 11223, 11123.

В настоящей работе рассматриваются оставшиеся δ-типы: 11112, 11122. Эти два случая завершают доказательство теоремы 1. Отметим, что некоторые факты о пятиугольниках δ-типа 11112 рассматриваются японскими авторами в работе [4].

Степенью вершины плитки P называется число сходящихся в ней пятиугольников. Степень любой вершины не может быть меньше трех. Пусть $(\alpha_0, \ldots, \alpha_4)$ — строка, в которой $\alpha_0 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_4$ и каждое из чисел является степенью одной из вершин P. Такие строки будем называть набором степеней.

Доказательство теоремы 1 основывается на следующей теореме.

Теорема 2. *В любой нормальной пятиугольной мозаике найдется хотя бы один пятиугольник, для которого набор степеней вершин один из следующих:* $(3,3,3,3,3)$, $(3,3,3,3,4)$, $(3,3,3,3,5)$, $(3,3,3,3,6)$, $(3,3,3,4,4)$.

Эта теорема — предложение 1 из [1]. Пятиугольник мозаики, удовлетворяющий заключению теоремы 2, будем называть центральным.

Некоторое множество плиток, конгруэнтных P, называется короной для плитки P, если выполняются условия:

1) плитки этого множества замощают часть V плоскости;

2) плитка P содержится внутри V;

3) это множество минимально с условиями 1 и 2.

Для того, чтобы существовала мозаика, отвечающая заданному выпуклому пятиугольнику, очевидно необходимо, чтобы существовала корона для каждой плитки мозаики.

Работа содержит четыре главы. Первая глава включает в себя основные определения и формулировки теорем. Вторая глава содержит определение и свойства меток плиток мозаики. Понятие метки является основным инструментом, с помощью которого строится перебор, приводящий к доказательству теоремы 1. Главы 3 и 4 посвящены δ-типам 11112 и 11122 соответственно. Укажем краткое содержание этих глав.

Основные результаты главы 3 содержатся в теоремах 3 и 4. Теорема 3 утверждает, что произвольный мозаичный пятиугольник либо принадлежит одному из определенных множеств $T_1, \ldots, T_8$, либо имеет один из 14 конкретных наборов углов (для некоторой допустимой нумерации вершин). Множества T_i описываются системой линейных соотношений между углами в параграфе 3.1.

Доказательство теоремы 3 излагается в пяти параграфах 3.2 — 3.6 в соответствии со следующими возможными наборами степеней вершин, даваемых теоремой 2:

1. $v_3 = v_4 = 3$;
2. $v_0 = v_1 = v_2 = 3$;
3. $v_1 = v_2 = v_3 = 3$, $v_0 = v_4 = 4$;
4. $v_0 = v_2 = v_3 = 3$, $v_1 = v_4 = 4$;
5. $v_0 = v_1 = v_3 = 3$, $v_2 = v_4 = 4$.

Разбор указанных случаев предваряется леммами 3 — 11, в которых описываются мозаичные пятиугольники при специальных условиях. Например, лемма 10 утверждает, что если $x_0 = x_2$, то $P \in T_i$ для $i = 1$ или $i = 2$.

Во всех случаях схема доказательств следующая. Рассматриваются всевозможные наборы меток для плитки P. Каждому набору $V = \{w_1, \ldots, w_s\}$, где $w_k = i_k j_k \ldots$ — метка, $k = 1, \ldots, s$, ставится в соответствие система из $s + 1$

линейных уравнений, одного нелинейного уравнения и десяти неравенств:

$$\begin{aligned} x_{i_k} + x_{j_k} + \ldots &= 360, k = 1, \ldots, s, \\ x_0 + \ldots + x_4 &= 540, \\ S(x_0, \ldots, x_4) &= 0, \\ 0 < x_i < 180, & \quad i = 0, \ldots, 4. \end{aligned}$$

Здесь функция S вводится в лемме 2:

$$S = \sin\frac{x_0}{2}\sin\frac{2x_4 + x_0 - 180^\circ}{2} - \sin\frac{x_2}{2}\sin\frac{2x_3 + x_2 - 180^\circ}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}(\sin x_4 - \sin x_3 + \sin(x_2 + x_3) - \sin(x_0 + x_4)).$$

Будем называть такие системы уравнений и неравенств VS-системами.

Имея набор V из трех независимых меток (система меток независима, если независима соответствующая ей система линейных уравнений), выражаем все неизвестные через один параметр t, решив соответствующую систему линейных уравнений. Затем подставляем эти выражения в формулу для S. Тем самым получаем функцию от одной переменной $S(t)$. Определяем нули этой функции, после чего находим решения VS-системы. Результаты этого исследования записываются в таблицу 6, позволяющую контролировать все входящие параметры.

Теорема 4, содержащаяся в параграфе 3.7, утверждает, что пятиугольники четырнадцати типов, полученные в теореме 3, имеют короны, но ни одна из таких корон не может быть продолжена до мозаики.

Основные результаты главы 4 содержатся в теоремах 5 и 6. Теорема 5 утверждает, что произвольный мозаичный пятиугольник либо принадлежит одному из определенных множеств $T_1, \ldots, T_8$, либо имеет один из шести конкретных наборов углов (для некоторой допустимой нумерации вершин).

Доказательство теоремы 5 излагается в семи параграфах 4.2 — 4.8 в соответствии со следующими возможными наборами степеней вершин, даваемых теоремой 2:

1. $v_2 = v_3 = v_4 = 3$; 2. $v_1 = v_2 = v_3 = 3$; 3. $v_0 = v_2 = v_3 = 3$;
4. $v_0 = v_1 = v_3 = 3$; 5. $v_0 = v_1 = v_2 = v_4 = 3$;
6. $v_1 = v_3 = 4$; 7. $v_2 = v_3 = 4$.

Разбор указанных случаев предваряется леммами 14 — 17, в которых описываются мозаичные пятиугольники при специальных условиях. Как и в главе 3 во всех случаях составляются и исследуются VS-системы, в которых используется функция S из леммы 13:

$$S = 2\sin\frac{x_1}{2}\sin\frac{x_1 + 2x_2 + x_3 - 360^\circ}{2} - \sin\frac{2x_4 + x_3 - 180^\circ}{2}.$$

Результаты исследования записываются в таблицу 7.

Теорема 6, содержащаяся в параграфе 4.9, утверждает, что пятиугольники шести типов, полученные в теореме 5, имеют короны, но ни одна из таких корон не может быть продолжена до мозаики.

Указанные четыре теоремы завершают доказательство теоремы 1.

2. Метки

Пусть $i_1 i_2 \ldots i_k$ сочетание с повторениями на пяти символах: 0, 1, 2, 3, 4. Пусть на плоскости существует такое расположение пятиугольников $P_1, P_2, \ldots, P_k$, конгруэнтных P, для которого выполняются три условия (рис. 1(a)):

а) некоторая точка O плоскости является общей вершиной углов $i_1, i_2, \ldots, i_k$ пятиугольников $P_1, P_2, \ldots, P_k$, соответственно;

б) каждая другая точка некоторой достаточно малой окрестности O, не лежащая на сторонах пятиугольников, попадает внутрь ровно одного пятиугольника из списка;

в) каждая точка, лежащая на стороне, выходящей из O, одного из пятиугольников принадлежит ровно двум пятиугольникам из нашего списка, то есть стороны смежных пятиугольников равны.

Другими словами, конечная последовательность плиток $P_1, P_2, \ldots, P_k$, конгруэнтных P, образует "цикл" вокруг точки O, являющейся вершиной каждой из плиток.

Пятиугольники $P_1, P_2, \ldots, P_k$ замощают часть плоскости, для которой точка O является внутренней. В этом случае выполняется равенство $x_{i_1} + x_{i_2} + \ldots + x_{i_k} = 360°$.

Будем называть сочетание $i_1 i_2 \ldots i_k$ меткой P, если для него выполняются условия (а)-(в).

Множество всех меток P будем обозначать символом $\mathcal{M}(P)$ или даже $\mathcal{M}$, если из контекста ясно, о каком P идет речь. Элементы меток будем называть символами. Число символов метки называется ее длиной. Термин длина будем употреблять также для произвольных сочетаний. Длина метки не может быть меньше 3. Далее, если $i-$ один из символов метки v, то будем говорить, что v соответствует (отвечает, принадлежит и т.д) вершине i; или в вершине i имеет место метка v; или v — метка для вершины i и т.д.

Пусть мы имеем дело с мозаикой, например, мозаикой, изображенной на рисунке 1(b). Метки 330 и 441, отвечающие смежным вершинам 3 и 4, будем называть согласованными. Метки 330 и 001 не согласованы, так как не могут отвечать смежным вершинам (здесь они отвечают несмежным вершинам 3 и 0).

Теперь дадим общее определение согласованных меток. Метки v, w, отвечающие смежным вершинам i, j пятиугольника P, соответственно (рис. 1(c)), будем называть согласованными, если выполняются условия:

1) $v = ik\ldots$, $w = jl\ldots$;

2) k, l — смежные вершины пятиугольника P_1;

3) стороны $X_i X_j$, $X_k X_l$ пятиугольников P, P_1, соответственно, одинаковой длины.

Другими словами, метки v, w согласованы, если им отвечают циклы $P_1, \ldots, P_k$ и $P'_1, \ldots, P'_l$ вокруг вершин O и O', соответственно (рис. 1(d)). Причем, отрезок OO' является ребром, и инцидентные этим вершинам пары плиток в циклах совпадают.

В противном случае мы говорим, что метки несогласованы.

Число сочетаний с повторениями (в дальнейшем сочетаний), из пяти символов по m равно C^m_{5+m-1}. В частности, имеется 35 сочетаний по 3 и 70 сочетаний по 4. Не каждое сочетание при $m > 3$ может быть меткой какого-нибудь

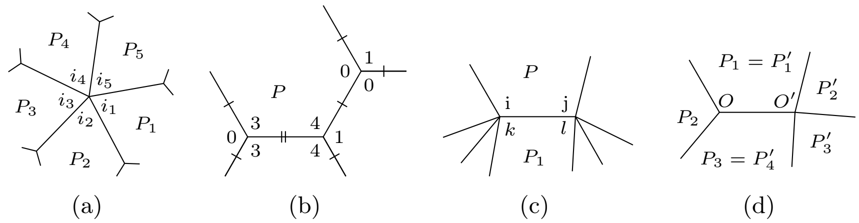


Рис. 1

пятиугольника. Например, не является меткой сочетание длины 4 с попарно различными символами.

Более того, каждая метка $v \in \mathcal{M}(P)$ содержит не более трех различных символов.

В самом деле, если $v = ik\ldots$ — метка, то $x_i + x_k + \ldots = 360°$. Поэтому ясно, что все пять символов $0, \ldots, 4$ не могут встретиться среди символов v, так как сумма всех внутренних углов выпуклого пятиугольника равна $540°$. Если l - один из символов, не входящих в v, а остальные четыре входят в v, то $x_l \geqslant 180°$. Противоречие.

3. Пятиугольники с четырьмя равными сторонами

3.1. **Основные формулы и вспомогательные утверждения.** В этой главе исследуем пятиугольники с четырьмя одинаковыми сторонами, то есть δ-тип 11112.

Понятно, что обсуждаемые утверждения не зависят от способа нумерации вершин. Всюду здесь мы придерживаемся нумерации, при которой первые четыре стороны имеют равные длины. Ясно, что для заданного пятиугольника таких нумераций имеется две. Одна из другой получается заменой $0 \leftrightarrow 2$, $3 \leftrightarrow 4$. Такую замену мы называем симметрией, а обе нумерации вершин — допустимыми. Одна из двух допустимых нумераций выбирается случайно.

Введем следующие множества выпуклых пятиугольников:

$T_1 = \bigcup_{i=0,\ldots,4}\{P|x_i + x_{i+1} = 180°\}$, индексы берутся по модулю 5.

$T_2 = \{P|x_0 + x_2 = 180°\}$.

$T_3 = \{P|x_0 = x_2 = 90°\}$.

$T_4 = \{P|x_2 = 2x_0 = 120° \ \vee x_0 = 2x_2 = 120°$.

$T_6 = \{P|x_0 + 2x_3 = 360°, x_2 + 2x_1 = 360° \ \vee x_2 + 2x_4 = 360°, x_0 + 2x_1 = 360°\}$.

$T_7 = \{P|x_2 + 2x_3 = 360°, x_1 + 2x_0 = 360° \ \vee x_0 + 2x_4 = 360°, x_1 + 2x_2 = 360°\}$.

$T_8 = \{P|x_2 + 2x_3 = 360°, x_1 + 2x_4 = 360° \ \vee x_0 + 2x_4 = 360°, x_1 + 2x_3 = 360°\}$.

Определения множеств T_6, T_7 и T_8 в терминах меток, введенных в главе 2, можно переписать так:

$P \in T_6 \Leftrightarrow \{112, 330\} \subset \mathcal{M}(P)$ или $\{110, 442\} \subset \mathcal{M}(P)$;

$P \in T_7 \Leftrightarrow \{001, 332\} \subset \mathcal{M}(P)$ или $\{221, 440\} \subset \mathcal{M}(P)$;

$P \in T_8 \Leftrightarrow \{331, 440\} \subset \mathcal{M}(P)$ или $\{441, 332\} \subset \mathcal{M}(P)$.

Докажем, что справедлива

Теорема 3. *Если P мозаичный пятиугольник, для которого $\delta(P) = 11112$, то $P \in T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4 \cup T_6 \cup T_7 \cup T_8$ либо P имеет один из четырнадцати наборов углов (для некоторой допустимой нумерации вершин):*

1. $x_0 \approx 93{,}06°, x_1 = 120°, x_2 \approx 133{,}47°, x_3 \approx 73{,}47°, x_4 = 120°$;

2. $x_0 \approx 94,56^\circ, x_1 \approx 113,64^\circ, x_2 \approx 132,72^\circ, x_3 \approx 75,9^\circ, x_4 \approx 123,18^\circ$;
3. $x_0 \approx 88,71^\circ, x_1 \approx 135,65^\circ, x_2 \approx 74,78^\circ, x_3 \approx 135,65^\circ, x_4 \approx 105,21^\circ$;
4. $x_0 \approx 81,2^\circ, x_1 \approx 139,4^\circ, x_2 \approx 69,7^\circ, x_3 \approx 139,4^\circ, x_4 \approx 110,3^\circ$;
5. $x_0 = x_1 = x_3 = 120^\circ, x_2 \approx 94,34^\circ, x_4 \approx 85,66^\circ$;
6. $x_0 \approx 108,28^\circ, x_1 \approx 125,86^\circ, x_2 \approx 78,05^\circ, x_3 \approx 140,98^\circ, x_4 \approx 86,83^\circ$;
7. $x_0 \approx 129,13^\circ, x_1 = 90^\circ, x_2 \approx 101,74^\circ, x_3 = 135^\circ, x_4 \approx 84,13^\circ$;
8. $x_0 \approx 126,42^\circ, x_1 \approx 77,86^\circ, x_2 \approx 107,16^\circ, x_3 \approx 141,07^\circ, x_4 \approx 87,49^\circ$;
9. $x_0 \approx 83,32^\circ, x_1 = 120^\circ, x_2 \approx 78,34^\circ, x_3 \approx 138,34^\circ, x_4 = 120^\circ$;
10. $x_0 \approx 124,23^\circ, x_1 \approx 82,82^\circ, x_2 \approx 111,54^\circ, x_3 \approx 124,23^\circ, x_4 \approx 97,18^\circ$;
11. $x_0 \approx 75,96^\circ, x_1 \approx 142,02^\circ, x_2 \approx 66,05^\circ, x_3 \approx 142,02^\circ, x_4 \approx 113,95^\circ$;
12. $x_0 \approx 85,88^\circ, x_1 \approx 137,06^\circ, x_2 \approx 68,53^\circ, x_3 \approx 145,74^\circ, x_4 \approx 102,79^\circ$;
13. $x_0 \approx 128,22^\circ, x_1 = x_4 \approx 85,48^\circ, x_2 \approx 103,56^\circ, x_3 \approx 137,26^\circ$;
14. $x_0 = 360^\circ - 2x_3, x_1 = x_3, x_2 = 180^\circ - x_4,\ P \notin T_1 \cup T_2$.

В первых тринадцати случаях этой теоремы имеем с точностью до подобия единственный пятиугольник, в случае 14 имеем бесконечное множество различных пятиугольников, углы которых задаются системой уравнений

$$x_0 = 360^\circ - 2x_3, x_1 = x_3, x_2 = 180^\circ - x_4, S = 0,$$

где S — функция из леммы 2.

Всюду в этой главе символом P обозначается выпуклый пятиугольник, для которого $\delta(P) = 11112$ и выбрана одна из двух допустимых нумераций вершин. Укажем несколько свойств таких пятиугольников.

Лемма 1. *Углы P удовлетворяют неравенствам:*

$$x_0 + 2x_1 + x_2 > 360^\circ, \qquad x_0 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 < 720^\circ.$$

Доказательство. Пусть α, β, γ, δ — углы, указанные на рисунке 2. Тогда $x_0 = 180^\circ - 2\alpha$, $x_2 = 180^\circ - 2\beta$. Сложив почленно эти равенства с неравенством $x_1 > \alpha + \beta$, получим первое из неравенств $x_0 + 2x_1 + x_2 > 360^\circ$.

Так как, кроме того, $x_3 = \gamma + \beta$, $x_4 = \delta + \alpha$, то $x_0 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 360^\circ + 2\gamma + 2\delta < 720^\circ$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Углы P обращают в ноль функцию*

$$S = \sin\frac{x_0}{2}\sin\frac{2x_4 + x_0 - 180^\circ}{2} - \sin\frac{x_2}{2}\sin\frac{2x_3 + x_2 - 180^\circ}{2} =$$
$$= \frac{1}{2}(\sin x_4 - \sin x_3 + \sin(x_2 + x_3) - \sin(x_0 + x_4)).$$

Доказательство. Применить теорему синусов к треугольнику $\triangle X_1X_3X_4$ (см. рис. 2), затем тригонометрические тождества перехода от произведения к сумме и формулы приведения. Лемма доказана.

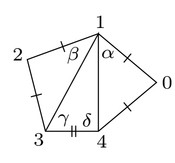


Рис. 2

Немедленным следствием леммы 1 является следующее утверждение.

Лемма 3. *Справедливы утверждения:*
1) $0112 \notin \mathcal{M}(P)$;
2) $\{330, 442\} \not\subseteq \mathcal{M}(P)$;
3) $\{332, 440\} \not\subseteq \mathcal{M}(P)$.

Лемма 4. *Если* $\{002, 441\} \subset \mathcal{M}(P)$ *или* $\{220, 331\} \subset \mathcal{M}(P)$, *то* $P \in T_1$.

Доказательство. Из первого включения следует $x_2/2 = 180° - x_0$, $2x_4 = 360° - x_1$, $2x_3 + x_2 = 360° - x_1$. Подставим эти выражения в первое представление S из леммы 2. После простейших преобразований S принимает вид

$$S = \sin\frac{x_0}{2}\cos\frac{x_0 - x_1}{2} - \sin x_0 \cos\frac{x_1}{2} = -\sin\frac{x_0}{2}\cos\frac{x_0 + x_1}{2}.$$

Поскольку $S = 0$, то $x_0 + x_1 = 180° \Rightarrow P \in T_1$. Второе утверждение из первого получается заменой нумерации. Лемма доказана.

Лемма 5. *Справедливы утверждения:*
1) $\{001, 442\} \not\subseteq \mathcal{M}(P)$;
2) $\{221, 330\} \not\subseteq \mathcal{M}(P)$.

Доказательство. Как и выше доказываем только одно утверждение. Пусть $\{001, 442\} \subset \mathcal{M}(P)$. Тогда $2x_4 + x_0 = 360° + x_0 - x_2$, $2x_3 + x_2 = 2x_0$. Подставим эти выражения в первое представление S из леммы 2. После простейших преобразований S принимает вид

$$S = \sin\frac{x_0}{2}\cos\frac{x_0 - x_2}{2} - \sin\frac{x_2}{2}\cos x_0 = \cos\frac{x_0}{2}\sin\frac{x_0 + x_2}{2}.$$

Теперь видно, что $S \neq 0$ при любых значениях $x_0, x_2 \in (0, 180°)$, противоречие. Лемма доказана.

Лемма 6. 1) *Если* $ijk \in \mathcal{M}(P)$, *где* i, j, k *— три последовательных по модулю 5 символа, то* $P \in T_1$.

2) *Пусть некоторая перестановка символов* i, j, k *— представляет собой последовательные по модулю 5 символы. Если* $\{iik, jjk\} \subset \mathcal{M}(P)$, *то* $P \in T_1$.

Доказательство. Пусть l, m — оставшиеся символы. Тогда в первом случае сразу получаем $x_l + x_m = 180°$ Поскольку символы l, m соседние по модулю 5, то по определению $P \in T_1$.

Во втором случае из условия следует, что $x_i = x_j$. Тогда $ijk \in \mathcal{M}(P)$ и мы приходим к первому случаю. Лемма доказана.

Лемма 7. 1) *Если* $134 \in \mathcal{M}(P)$, *то* $P \in T_2$.

2) *Если* $\{331, 441\} \subset \mathcal{M}(P)$, *то* $P \in T_2$.

Доказательство. В первом случае сразу получаем $x_0 + x_2 = 180°$. Тогда по определению $P \in T_2$.

Во втором случае из условия следует, что $x_3 = x_4$. Тогда $134 \in \mathcal{M}(P)$. Лемма доказана.

Пусть существует мозаика, составленная из плиток, конгруэнтных пятиугольнику P. В силу теоремы 2 главы 1 существует так называемая центральная плитка этой мозаики, которая обладает тем свойством, что три ее вершины имеют степень 3, а две оставшиеся имеют степень 4 или четыре вершины степени 3, а пятая степени $\leqslant 6$. Всюду дальше символом P всегда обозначается выпуклый пятиугольник, удовлетворяющий условию $\delta(P) = 11112$ и являющийся центральной плиткой некоторой мозаики.

Пусть v_i — степень i-ой вершины P. В силу сказанного, а также учитывая, что имеет место "симметрия" $0 \leftrightarrow 2$, $3 \leftrightarrow 4$, для доказательства нашей теоремы достаточно рассмотреть пять случаев:

1. $v_3 = v_4 = 3$;
2. $v_0 = v_1 = v_2 = 3$;
3. $v_1 = v_2 = v_3 = 3$, $v_0 = v_4 = 4$;
4. $v_0 = v_2 = v_3 = 3$, $v_1 = v_4 = 4$;
5. $v_0 = v_1 = v_3 = 3$, $v_2 = v_4 = 4$.

Далее мы рассмотрим каждый из указанных выше пяти случаев. Но вначале еще несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 8. *Если $v_3 = 3$ или $v_4 = 3$ и плитки P и прилегающая к P по стороне* 34 *ориентированы одинаково, то $P \in T_1 \cup T_2$.*

Доказательство. Пусть, скажем, v_3=3, рис. 3. Тогда $34i \in \mathcal{M}(P)$ для некоторого $i = 0, 1, 2$. Если $i = 0, 2$, то $P \in T_1$, лемма 6; если $i = 1$, то $P \in T_2$, лемма 7. Лемма доказана.

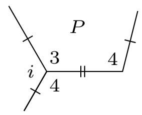


Рис. 3

Лемма 9. *Все возможные метки длины три можно разбить на две группы:* $000, 111, 222, 110, 001, 220, 002, 112, 221, 012$ *— 10 меток, содержащих лишь символы* $0, 1, 2$*;* $33i, 44i, i34$*,* $i = 0, 1, 2$*, — 9 меток, содержащих символы* 3 *или* 4.

Доказательство. Следует из того, что из трех ребер, выходящих из одной вершины, лишь одно может быть ребром второго типа. Лемма доказана.

Лемма 10. *Если $x_0 = x_2$, то $P \in T_i$ для $i = 1$ или $i = 2$.*

Доказательство. Из условия следует, что $x_3 = x_4$. Пусть $v_3 = 3$. Поскольку из $34i \in \mathcal{M}$, $i = 0, 1, 2$, следует $P \in T_1$ или $P \in T_2$, леммы 6, 7, то метки вершины 3, подлежащие рассмотрению, имеют вид: $33i$, $i = 0, 1, 2$.

Если $330 \in \mathcal{M}$, то $442 \in \mathcal{M}$, а это невозможно, лемма 5. Точно также устанавливается, что $332 \notin \mathcal{M}$. Если же $331 \in \mathcal{M}$, то $341 \in \mathcal{M}$.

Случай, когда $v_4 = 3$, получается из предыдущего заменой нумерации.

Пусть $v_3 = v_4 = 4$. Тогда $v_0 = v_1 = v_2 = 3$. Рассмотрим метки вершины 3. Каждая такая метка имеет вид $ijkl$, где все символы либо равны 3 или 4, либо $i, j \leqslant 2$, $k, l \geqslant 3$. В первом случае $x_3 = x_4 = 90^\circ$, то $P \in T_1$. Во втором случае — обязательно $i = j$ (учесть равенство углов). Тогда можно считать, что метка имеет вид $ii33$, $i = 0, 1, 2$. Если $2233 \in \mathcal{M}$ или $0033 \in \mathcal{M}$, то $P \in T_1$.

Будем считать, что вершине 3 отвечает 1133. Точно так же можно считать, что вершине 4 отвечает метка 1144. Далее, так как $v_0 = 3$, то метки вершины 0 имеют длину 3. Метки длины три, согласованные с меткой 1144, имеют вид $0ij$,

$i, j = 0, 1, 2$. Если метка содержит символ 1, то $012 \in \mathcal{M}$ и $P \in T_1$; если метка не содержит 1, то $x_0 = x_2 = 120°$. Точно такие же рассуждения для вершины 1 позволяют считать, что $x_1 = 120°$. Таким образом, $x_0 = x_1 = x_2 = 120°$, а тогда $P \in T_1$. Лемма доказана.

Пусть $w = ij\ldots$ — произвольная метка, поставим ей в соответствие линейное уравнение:

$$x_i + x_j + \ldots \quad = \quad 360.$$

Каждому набору меток $V = \{w_1, \ldots, w_s\}$ поставим в соответствие систему из $s+1$ линейных уравнений и десяти неравенств:

$$\begin{aligned} x_{i_k} + x_{j_k} + \ldots &= 360, k = 1, \ldots, s, \\ x_0 + \ldots + x_4 &= 540, \\ 0 < x_i < 180, & \quad i = 0, \ldots, 4. \end{aligned}$$

Эту систему назовем V-системой. Добавим к этой системе еще одно уравнение:

$$\begin{aligned} x_{i_k} + x_{j_k} + \ldots &= 360, k = 1, \ldots, s, \\ x_0 + \ldots + x_4 &= 540, \\ S(x_0, \ldots, x_4) &= 0, \\ 0 < x_i < 180, & \quad i = 0, \ldots, 4. \end{aligned}$$

Здесь S — это функция из леммы 2. Будем называть такую систему уравнений и неравенств VS-системой. Если из контекста ясно о каком наборе V меток идет речь, то будем говорить просто об S-системе, опуская указание на набор меток V.

Наше исследование построено следующим образом. Имея набор V из трех независимых меток, выражаем все неизвестные через один параметр t, решив соответствующую систему линейных уравнений. Затем подставляем эти выражения в формулу для S. Тем самым получаем функцию от одной переменной $S(t)$. Определяем нули этой функции, после чего находим решения VS-системы.

Почти всегда нам достаточно знать лишь приближенные значения нулей $S(t)$, а иногда и вовсе лишь сам факт существования нулей. Поэтому, как правило, мы пренебрегаем их точными значениями.

Результаты этого исследования записываются в таблицу 6, которая составляется следующим образом.

В первом столбце указывается номер пункта, к которому относится строка таблицы.

Во втором столбце указывается совокупность трех независимых меток.

В третьем столбце указывается область допустимых значений для параметра t, учитывая, что углы определяют выпуклый пятиугольник.

В столбцах 4 — 8 записывается общее решение линейной V-системы. Под общим решением записывается решение нелинейной VS-системы, если решение существует.

Если пятиугольник с найденными углами относится к какому-нибудь из множеств T_i, то в девятом столбце указывается это множество.

Если $P \notin T_i$, то в десятом столбце либо указываются дополнительные метки, либо дается указание на то, что функция S не имеет нулей.

Доказательство следующего утверждения использует указанные выше соображения.

Лемма 11. *Если $x_0 = x_1$ или $x_2 = x_1$, то $P \in T_i$ для некоторого $i = 1, \dots, 8$ или углы P это — набор углов* (5) *условия теоремы 3.*

Доказательство. Будем доказывать наше утверждение в предположении, что $x_0 = x_1$. Второе утверждение получается из первого перенумерацией вершин. В силу условия достаточно рассмотреть три случая: 1) $v_3 = v_4 = 3$, 2) $v_1 = v_3 = 3$, 3) $v_1 = v_4 = 3$.

1) Пусть $v_3 = v_4 = 3$. Поскольку из $34i \in \mathcal{M}$, $i = 0, 1, 2$, следует $P \in T_1$ или $P \in T_2$, леммы 6, 7, то метки вершин 3 и 4, подлежащие рассмотрению, исчерпываются списком: $33i, 44j$, $i, j = 0, 1, 2$.

Включения $\{330, 442\} \subset \mathcal{M}$ и $\{330, 442\} \subset \mathcal{M}$ в силу леммы 5 невозможны. Если $\{330, 441\} \subset \mathcal{M}$, то $P \in T_8$; если $\{332, 442\} \subset \mathcal{M}$, то $P \in T_1$, лемма 6. Этим исчерпан случай, когда $v_3 = v_4 = 3$.

2) Пусть $v_1 = v_3 = 3$. Если $112 \in \mathcal{M}$, то $012 \in \mathcal{M}$, а значит $P \in T_1$. Теперь, учитывая лемму 9, можно считать, что меткой вершины 1 является одна из следующих $\mathtt{xx}1, 221, 331, 441$. Здесь и ниже $\mathtt{x}$ означает символ 0 или 1.

Для вершины 3 достаточно рассмотреть две метки $331, 332$ (учесть дополнительно, что $x_0 = x_1$).

Если $\{331, 1\mathtt{xx}\} \subset \mathcal{M}$, то $x_0 = x_1 = x_2 = 120°$. С учетом таблицы 6, 0.1, мы получаем набор углов (5) теоремы. Ему соответствуют короны (см. рис. 12(a),рис. 12(b), рис. 13) со следующими наборами меток при вершинах 0-4: $(010, 110, 2442, 313, 4422)$, $(010, 111, 2244, 303, 4422)$, $(011, 100, 2442, 313, 4422)$.

Если $\{331, 221\} \subset \mathcal{M}$ или $\{331, 441\} \subset \mathcal{M}, x_0 = x_1$, то $P \in T_1$, лемма 6.

Пусть 331 отвечает обеим вершинам 1 и 3. Мы помним, что по крайней мере еще одна вершина имеет степень три, то есть $v_4 = 3$, или $v_2 = 3$, или $v_0 = 3$. Случай $v_4 = 3$ рассмотрен в предыдущем пункте.

Пусть $v_2 = 3$. Только две метки вершины 2 согласованы с метками в вершинах 1 и 3: $221, 222$ (учесть $x_0 = x_1$). Если $221 \in \mathcal{M}$, то $P \in T_1$. Если $222 \in \mathcal{M}$, то согласно таблице 6, 0.3, S-система, определяемая набором меток $331, 222$ и равенством $x_0 = x_1$ не имеет решений.

Если $v_0 = 3$, то метки вершины 0, согласованные с меткой 331 вершины 1, имеют вид $02i$, $i = 0, 1, 2$. Во всех трех случаях $P \in T_1$ в силу $x_0 = x_1$ и лемм 6, 4.

Пусть теперь $332 \in \mathcal{M}$. Если дополнительно $1\mathtt{xx} \in \mathcal{M}$, то $P \in T_7$, определение T_7; если $331 \in \mathcal{M}$, то $x_1 = x_2 = x_0$, далее используем лемму 10; если $441 \in \mathcal{M}$, то $P \in T_8$, определение T_8. Наконец, если $221 \in \mathcal{M}$, то согласно таблице 6, 0.4, S-система, определяемая набором меток $332, 221$ и равенством $x_0 = x_1$ не имеет решений. Этим случай $v_1 = v_3 = 3$ исчерпан.

3) Пусть $v_1 = v_4 = 3$. Этот случай исследуем по той же схеме. Достаточно рассмотреть две метки $441, 442$ вершины 4.

Пусть $441 \in \mathcal{M}$. Если дополнительно $1\mathtt{xx} \in \mathcal{M}$ или $331 \in \mathcal{M}$, то $P \in T_1$; если $221 \in \mathcal{M}$, то $P \in T_7$.

Если вершинам 1 и 4 отвечает одна и та же метка 441, то вспоминаем, что по крайней мере еще одна вершина имеет степень три, то есть $v_3 = 3$, или $v_2 = 3$, или $v_0 = 3$. Случай $v_3 = 3$ рассмотрен выше.

Если $v_2 = 3$, то метки вершины 2, согласованные с меткой 441 вершины 1, имеют вид $02i$, $i = 0, 1, 2$. Тогда $P \in T_1$ при $i = 0, 1$ и $P \in T_7$ при $i = 2$.

Если $v_0 = 3$, то метки вершины 0, согласованные с меткой 441 вершины 1, имеют вид $00i$, $i = 0, 1, 2$. Тогда $P \in T_1$ во всех трех случаях (учитывать $x_0 = x_2$ и лемму 6).

Пусть $442 \in \mathcal{M}$. Если дополнительно $1\mathtt{xx} \in \mathcal{M}$, то $P \in T_6$; если $331 \in \mathcal{M}$, то $P \in Q_2$ и далее лемма 5; если $441 \in \mathcal{M}$, то $x_2 = x_1 = x_0$, далее используем лемму 10.

Наконец, если $221 \in \mathcal{M}$, то согласно таблице 6, 0.2, в этом случае S-система имеет два решения. Набор углов для одного решения противоречит лемме 5, для второго — набор углов не имеет метки, отвечающей вершине 3. Лемма полностью доказана.

3.2. **Случай $v_3 = v_4 = 3$.** В этом пункте докажем, что при указанном условии $P \in T_i$, $i = 1, 2, 6, 8$, или P имеет углы указанные в теореме, наборы $(4), (9)$.

В силу леммы 8 можно считать, что P и плитка, прилегающая к ее стороне 34, ориентированы противоположно, рис. 4. Тогда в вершинах 3 и 4 возможны лишь следующие метки: $33i$, $44i$, $i = 0, 1, 2$. Рассмотрим всевозможные наборы из двух меток $\{33i, 44j\}$, $i, j = 0, 1, 2$. Учитывая симметрию достаточно рас-

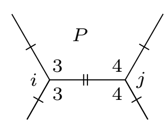


Рис. 4

смотреть лишь шесть из них: $\{33i, 44i\} \subset \mathcal{M} \Rightarrow P \in T_1 \cup T_2$, $i = 0, 1, 2$, лемма 6; включения $\{330, 442\} \subset \mathcal{M}$ и $\{332, 440\} \subset \mathcal{M}$ невозможны в силу леммы 3; $\{331, 440\} \subset \mathcal{M} \Rightarrow P \in T_8$, определение T_8.

Удобно представлять все разобранные случаи в виде таблицы, где строки поименованы метками вершины 3, а столбцы — метками вершины 4. На пересечении строк и столбцов указаны утверждения, из которых следуют рассматриваемые случаи: символ R_2 отсылает к лемме 3, символ T_1 — к лемме 6 или к определению T_1, символ T_8 — к определению T_8.

В силу отмеченной симметрии заполнению подлежит лишь верхний треугольник таблицы 1. Пустая клетка означает, что случай, требует дополнительного исследования.

Таблица 1

	442	441	440
330	R_2		T_1
331		T_1	T_8
332			R_2

Рассмотрим этот оставшийся случай. Итак, пусть $\{330, 441\} \subset \mathcal{M}$. Тогда $0122 \in \mathcal{M}$ и $012, 220, 221 \notin \mathcal{M}(P)$.

Поскольку P — центральная плитка, то кроме вершин 3 и 4 по меньшей мере еще одна вершина имеет степень 3. Поочередно рассмотрим три случая: 1) $v_0 = 3$, 2) $v_2 = 3$, 3) $v_1 = 3$ и $v_0 = v_2 = 4$.

1) Пусть $v_0 = 3$. Для вершины 0 с учетом сказанного выше возможны лишь следующие метки: $000, 001, 002$.

Если $001 \in \mathcal{M}$ или $002 \in \mathcal{M}$, то $P \in T_1$, леммы 6, 4.

Если $000 \in \mathcal{M}$, то $x_0 = x_3 = 120°$, $x_2 = x_4 - 60°$. Подставим эти выражения во второе представление для функции S из леммы 2 и воспользуемся тригонометрическими формулами сложения: $S = \sin x_4 - \sqrt{3}/4$. Стало быть $x_4 \approx 154.8°$ или $x_4 \approx 25.2°$. С другой стороны, из леммы 1 и указанных выше значений углов следует, что $x_4 < 140°$. Так как $441 \in \mathcal{M}$, то $x_4 > 90°$. Таким образом, оба значения угла x_4 не лежат в промежутке $(90°, 140°)$. Полученное противоречие означает, что $000 \notin \mathcal{M}$.

2) Пусть $v_2 = 3$. Для вершины 2 возможны лишь следующие метки: $112, 234, 442$.

Если $234 \in \mathcal{M}$, то $P \in T_1$ по лемме 6; $442 \notin \mathcal{M}$ в силу леммы 3; если $112 \in \mathcal{M}$, то $P \in T_6$ по определению T_6.

3) Пусть $v_1 = 3$ и $v_0 = v_2 = 4$. В вершине 1 возможны лишь следующие метки: $001, 110, 111, 112, 331, 441, 134$.

Метки 001 и 112 уже рассмотрены выше. Если $134 \in \mathcal{M}$ или $331 \in \mathcal{M}$, то $P \in T_2$ по лемме 7.

Если $110 \in \mathcal{M}$, то

$$x_0 = 4t - 360°, x_1 = x_3 = 360° - 2t, x_2 = 180° - t, x_4 = t.$$

Это набор углов (4) из условия нашей теоремы. Ему соответствует короны (см. рис. 11(c)) со следующими наборами меток при вершинах 0-4: (0122, 110, 0122, 330, 441), (0122, 110, 2244, 330, 441).

Отметим, что согласно таблице 6, I.1, существует ровно одно решение S-системы, определяющее единственный набор углов выпуклого пятиугольника.

Если $111 \in \mathcal{M}$, то $x_0 = 360° - 2t$, $x_1 = x_4 = 120°$, $x_2 = 180° - t$, $x_3 = t$. Это набор углов (9) из условия нашей теоремы. Ему соответствует короны (см. рис. 18) Набор меток при вершинах 0–4 этих корон имеет вид (0212, 111, 2021, 303, 441). Согласно таблице 6, I.2, имеется ровно одно решение S-системы, определяющее единственный набор углов выпуклого пятиугольника.

Пусть теперь вершине 1 соответствует метка 441 (рис. 5).

Вершине 0 в этом случае могут отвечать лишь следующие метки длины 4: $0000, 0001, 0002, 0012, 0022$.

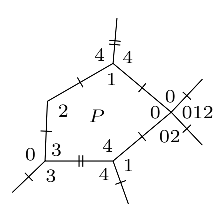


Рис. 5

Если $0001 \in \mathcal{M}$ или $0012 \in \mathcal{M}$, то $x_0 = x_2$ и можно применять лемму 10; если $0022 \in \mathcal{M}$, то $P \in T_2$.

Если $0000 \in \mathcal{M}$, то $x_0 = 90°$, $x_1 = 360° - 2x_4$, $x_2 = x_4 - 45°$, $x_3 = 135°$. Из леммы 1 следует, что $x_4 < 135°$. С другой стороны, подставляя найденные значения во второе выражение для S, лемма 2, получим $-2S = \cos x_4 + \sqrt{2}/2$.

Тогда $x_4 = 135°$ единственное решение уравнения $S = 0$, удовлетворяющее условиям $0 < x_4 < 180$. Противоречие показывает, что $0000 \notin \mathcal{M}$.

Если $0002 \in \mathcal{M}$, то $x_0 = 144° - 2t$, $x_1 = 360° - 10t$, $x_2 = -72° + 6t$, $x_3 = 108° + t$, $x_4 = 5t$. Из леммы 1 следует, что $x_4 < 135°$. Кроме того, из условия $440 \in \mathcal{M}$ следует, что $x_4 > 90°$. Таким образом, $18 < t < 27$. С другой стороны, подставляя найденные значения в первое выражение для S из леммы 2, получим уравнение $S = 2\sin(4t - 18)\sin(18 + t)\cos(54 - 2t)) = 0$. Легко видеть, что в промежутке $(18, 27)$ это уравнение не имеет корней. Противоречие. Это значит $0002 \notin \mathcal{M}$.

Этим утверждение пункта 2 доказано.

3.3. **Случай $v_0 = v_1 = v_2 = 3$.** В этом пункте докажем, что при указанном условии $P \in T_i$, $i = 1, 2, 6, 7$, или P имеет углы указанные в теореме, наборы $(1), (2)$.

Если $P \notin T_1$, то в вершинах 0 и 2 возможны лишь по семь меток: 000, 001, 110, 002, 220, 330, 440 — для вершины 0; 222, 221, 112, 220, 022, 442, 332 — для вершины 2. Мы расположили метки вершин так, что метки, получающиеся друг из друга симметрией $0 \leftrightarrow 2$, $3 \leftrightarrow 4$ стояли на одинаковых местах. Составим 7×7 таблицу, строки который помечены метками вершины 2, а столбцы — метками вершины 0 (см. таблица 2). Если можно сделать какое-либо заключение о нашем P, из условия $\{u, v\} \subset \mathcal{M}(P)$, где u, v — метки вершин 2 и 0, то это кратко указывается на пересечении соответствующей строки и столбцы. Это может быть указание на одно из предыдущих утверждений или на возможные метки для вершины 1. Если метка для вершины 1 только одна, то она явно указывается; и если по этой метке и меткам u, v можно что-то сказать о P, то такая ссылка ставится рядом с этой меткой. Если же таких меток несколько, то указывается число возможных меток. В силу отмеченной симметрии заполняется только верхний треугольник таблицы.

Таблица 2. $v_0 = v_1 = v_2 = 3$

	000	001	110	002	220	330	440
222	$x_0 = x_2$	3	2(A)	$x_0 = x_2$	$x_0 = x_2$	112 $x_1 = x_2$	110 T_1
221		T_1	4(C)	3	$x_0 = x_1$	Q_2	T_7
112			$x_0 = x_2$	T_1	2(B)	T_6	001
220				$x_0 = x_2$	111(D)	T_1	110 T_1
002					$x_0 = x_2$	112 T_6	110 T_1
442						R_2	$x_0 = x_2$
332							R_2

Отметим, что если в вершине 1 допустимы две метки, то это всегда метки 110 или 112; если таких меток три, то это — метки $110, 112, 111$; наконец, если их четыре, то это — $001, 110, 112, 221$.

Если в таблице стоит $x_0 = x_2$, то необходимо применить лемму 10; если $x_0 = x_1$, то лемму 11; если R_2, то лемму 3; если Q_2, то лемму 5.

Остается исследовать те клетки таблицы, где нет никаких указаний на предыдущие утверждения. Таких клеток семь.

Клетка $(222, 001)$ и $(221, 002)$. Если дополнительно в $\mathcal{M}$ входит одна из меток $110, 112, 111$, то $x_0 = x_1 = x_2 = 120°$, но тогда $P \in T_1$.

Клетка $(112, 440)$. Если $001 \in \mathcal{M}$, то S-система, определяемая тремя метками $112, 001, 440$, не имеет решений, таблица 6, II.1.

Дальше рассматриваются те места таблицы, которые помечены символами $A - D$.

A. $(222, 110)$**.** Если дополнительно в $\mathcal{M}$ входит метка 112, то $x_0 = x_1 = x_2 = 120^\circ$.

Пусть вершине 1 соответствует метка 110.

Если $v_3 = 3$, то 331 — единственная метка вершины 3. Тогда S-система, определяемая тремя метками $222, 110, 331$, не имеет решений, таблица 6, II.A.1.

Если $v_4 = 3$, то для вершины 4 возможны лишь две метки: 440 и 442. В первом случае $P \in T_1$, лемма 6; во втором случае $P \in T_6$.

Пусть $v_3 = v_4 = 4$. В вершине 4 возможны лишь следующие 7 меток длины 4: 0044, 2244, 0144, 0244, 1244, 0034, 2234.

Если $0044 \in \mathcal{M}$, то $P \in T_1$. Если $2234 \in \mathcal{M}$, то $x_0 = 240^\circ$. Противоречие.

Для каждой из пяти оставшихся меток $u \in \{0144,\ 0244,\ 1244,\ 2244,\ 0034\}$ найдем решения S-системы, определяемой тремя метками $222, 110, u$. Как это видно из таблицы 6, II.A.2-6, в первых двух случаях решений нет. В трех оставшихся имеется ровно по одному решению, которые однако не дают подходящей метки для вершины 3.

Этим заканчивается пункт A.

B. $(221, 110)$ Если дополнительно в $\mathcal{M}$ входит одна из меток 001, 112, то $x_0 = x_1 = x_2 = 120^\circ$. Далее рассмотрим одновременно два варианта: вершине 1 отвечает метка 110 или 221.

Пусть $v_3 = 3$. Для вершины 3 возможны метки: 330, 331, 332. В силу леммы 5 $330 \notin \mathcal{M}$; если $331 \in \mathcal{M}$, то $P \in T_1$, лемма 6; если $332 \in \mathcal{M}$, то то S-система, определяемая тремя метками 221, 110, 332, не имеет решений, таблица 6, II.B.1.

Пусть $v_4 = 3$. Для вершины 4 возможны лишь две метки: 440, 442. Если $440 \in \mathcal{M}$, то $P \in T_1$, лемма 6; если $442 \in \mathcal{M}$, то $P \in T_6$.

Пусть $v_3 = v_4 = 4$. В вершине 4 возможны лишь следующие 7 меток длины 4: 0044, 2244, 0144, 0244, 1244, 0034, 2234.

Если $0044 \in \mathcal{M}$, то $P \in T_1$; если $2234 \in \mathcal{M}$, то $x_1 = 0$, противоречие; если $0034 \in \mathcal{M}$, то $x_0 = 108^\circ$, $x_2 = 72^\circ \Rightarrow P \in T_2$.

Для метки 1244 существует единственное решение S-системы, определяемой тремя метками 221, 110, 1244. Однако в этом случае нет метки для вершины 3, таблица 6, II.B.3.

Для каждой из трех оставшихся меток $u \in \{0144, 0244, 2244\}$ S-система, определяемая тремя метками $221, 110, u$, не имеет решений, таблица 6, II.B.2, 4, 5.

Этим заканчивается пункт B.

C. $(112, 220)$**.** Если дополнительно в $\mathcal{M}$ входит метка 110, то $P \in T_1$, лемма 6.

Далее рассматривается случай, когда вершине 1 соответствует метка 112,

Пусть $v_3 = 3$. Если 330 — метка для вершины 3, то $P \in T_6$; если $332 \in \mathcal{M}$, то $P \in T_1$, лемма 6. Других меток для вершины 3 быть не может.

Пусть $v_4 = 3$. Можно считать, что вершине 4 отвечает метка 441. Для этого набора из трех меток получаем набор углов (2) из условия теоремы: $x_0 = 1080^\circ - 8t$, $x_1 = 360^\circ - 2t$, $x_2 = 4t - 360^\circ$, $x_3 = -540^\circ + 5t$, $x_4 = t$. Мы видим, что $0133 \in \mathcal{M}$. Это дает возможность построить короны, метки последовательных вершин которых: (022, 112, 211, 3013, 441). Отметим, что

S-система, определяемая заданными метками, имеет единственное решение, таблица 6, II.C.1. Короны показаны на рисунке 9(a).

Пусть $v_3 = v_4 = 4$. Для вершины 3 имеются лишь следующие семь меток: 2233, 0033, 0133, 0233, 1233, 0034, 2234.

Для первой и последней меток $P \in T_1$. Для каждой метки $u \in \{0033,\ 0133,\ 0233,\ 1233,\ 0034\}$ имеется единственное решение S-системы, определяемой тремя метками 112, 220, u. Как это видно из таблицы 6, II.C.5, для метки $u = 1233$ это решение приводит к набору углов, для которого $P \in T_1$. Для четырех оставшихся меток, таблица 6, II.C.2-4,6, найденные решения не приводят к новым коронам, так как в каждом случае нет подходящей метки для вершины 4.

Этим заканчивается пункт C.

D. $220, 111, 220$**.** Пусть $v_3 = 3$. Можно считать, что 331 — метка для вершины 3. Тогда в силу леммы 4 $P \in T_1$.

Пусть $v_4 = 3$. Можно считать, что 441 — метка для вершины 4. Тогда имеет место еще одна метка 0133. Решение системы линейных уравнений, соответствующей трем меткам $220, 111, 441$: $x_0 = 240 - 2t$, $x_1 = x_4 = 120°$, $x_2 = t + 60°$, $x_3 = t$. Это набор углов (1) из условия теоремы. Для него имеются короны с набором меток (022, 111 ,220, 3103, 441), рис 8. Указанному набору углов соответствует единственное решение S-системы, таблица 6, II.D.1.

Пусть $v_3 = v_4 = 4$. Вершине 4 соответствует одна из восьми меток: 0144, 1144, 1244, 1134, 3334, 3344, 3444, 4444.

Для метки 3344 $P \in T_1$, если $1134 \in \mathcal{M}$, то соответствующая система линейных уравнений дает $x_0 = 240°$; если $0144 \in \mathcal{M}$, соответствующая S-система не имеет решений, таблица 6, II.D.2. Для меток $1144, 1244$ согласно таблице 6, II.D.3,4, соответствующие S-системы имеют ровно по одному решению, для которых нет подходящих меток вершины 3. Для меток 3334, 3444, 4444 согласно таблице 6, II.D.5-7, единственные решения S-систем таковы, что $x_3 + x_4 = 180°$ $\Rightarrow P \in T_1$.

Этим пункт D и пункт 3 исчерпаны.

3.4. **Случай** $v_1 = v_2 = v_3 = 3$**,** $v_0 = v_4 = 4$**.** В этом пункте докажем, что при указанном условии $P \in T_i$, $i = 1, 2, 6, 7, 8$.

Если $P \notin T_1$, то возможны лишь следующие метки: 111, 001, 110, 112, 221, 331, 441 — для вершины 1; 330, 331, 332 — для вершины 3.

Составим $3 \times 7-$таблицу, строки который помечены метками вершины 3, а столбцы — метками вершины (см. таблица 3). Если можно сделать какое-либо заключение о нашем P, из условия $\{u, v\} \subset \mathcal{M}(P)$, где u, v — метки вершин 3 и 1, то это кратко указывается на пересечении соответствующей строки и столбца. Все возможные метки для вершины 2 выписаны в соответствующей ячейке таблицы. Не выписывалась метка 134 и те метки вершины 2, которые состоят из последовательных символов. Единственное исключение — место (330, 441), где указанная там метка единственно возможная. Рядом с каждой такой меткой также кратко указывается причина, по которой P может быть отнесено к тому или иному типу. Если рассматриваемый случай уже встречался нам ранее, то указывается ссылка на соответствующую строку из таблицы 6 или строку, которая содержит метки, получающиеся из исследуемого набора выбором другой допустимой нумерации. Таких ссылок четыре. Требуют комментариев две из них: II.C.1, II.D.1. В обоих случаях необходима допустимая перенумерация, и в обоих случаях среди имеющихся меток нет метки для вершины 0.

В остальном все обозначения такие же, как и в предыдущей таблице.

Таблица 3. $v_1 = v_2 = v_3 = 3$

	111	001	110	112	221	331	441
330	221 $x_1 = x_2$	112 T_6 442 R_2	221 Q_2 112 $x_0 = x_2$ 442 R_2	T_6	Q_2	$x_0 = x_1$	012 T_1
331	002 II.D.1 220 Q_1 222 $x_1 = x_2$	221 T_1	222 II.A.1 221 T_1 220 Q_1 002 II.C.1	222 $x_1 = x_2$ 221 T_1 220 Q_1 002 T_1	T_1	220 Q_1 222 (B)	T_2
332	221 $x_1 = x_2$	T_7	221 II.B.1 112 T_1	T_1	112 T_1 332 (A)	$x_1 = x_2$	T_8

Нам остается изучить два случая, отмеченные в таблице символами A, B.

A. $221, 332, 332$**.** Рассмотрим всевозможные метки длины четыре в вершине 4. Их ровно девять. Отбрасывая те из них, которые немедленно приводят к $P \in T_1$ рассмотрим семь оставшихся: 0144, 0244, 1244, 1144, 2244, 3444, 4444. Для каждой из этих меток соответствующая S-система не имеет решений, таблица 6, III.A.1-7.

B. $331, 222, 331$**.** Как и в предыдущем случае необходимо рассмотреть те же самые семь меток. Для меток 0244, 1144 соответствующие S-системы не имеют решений, таблица 6, III.B.2,4. Для меток 0144, 1244, 4444 соответствующие S-системы имеют по одному решению, таблица 6, III.B.1, 3, 7. Однако, во всех трех случаях наличие пятиугольника с такими углами противоречит лемме 3. Для меток $2244, 3444$ соответствующие S-системы имеют по одному решению, таблица 6, III.B.5,6. Но эти решения не приводят к новой короне, так как в обоих случаях нет меток длины 4, отвечающих вершине 0.

Этим доказано утверждение этого пункта. И этим пункт 4 исчерпан.

3.5. **Случай** $v_0 = v_2 = v_3 = 3$**,** $v_1 = v_4 = 4$**.** В этом пункте докажем, что при указанном условии $P \in T_i$, $i = 1, 2, 6, 7, 8$, или P имеет углы указанные в теореме, наборы (2), (6) – (8), (10), (12), (13).

Если $P \notin T_1$, то как отмечалось в пункте 2 в вершинах 0 и 2 возможны лишь по семь меток: 000, 001, 110, 002, 220, 330, 440 — для вершины 0; 222, 221, 112, 220, 022, 442, 332 — для вершины 2. Составим такую же как и в пункте 2 $7 \times 7-$таблицу, строки который помечены метками вершины 2, а столбцы — метками вершины 0 (см. таблица 4). Понятно, что в этом случае сохраняются все утверждения про P, вытекающие из наличия лишь двух меток, что и указывается в таблице 4. Кроме того, в каждой клеточке таблицы, где невозможно сделать вывод о P по двум меткам вершин 0 и 2, перечисляются всевозможные метки вершины 3. Отметим, что в силу 8 можно считать и мы считаем, что плитка, примыкающая к P по стороне 34 ориентирована противоположно. Поэтому метки вершины 3 имеют вид $33i$, $i = 0, 1, 2$. Рядом с каждой такой меткой также кратко указывается причина, по которой P может быть отнесено к тому или иному типу. Иногда по имеющимся меткам можно отнести P к разным типам. Мы выбираем лишь один, исходя из довольно случайных обстоятельств.

Заметим еще, что симметрии в этом случае нет и нам необходимо заполнить все 49 клеток таблицы. Все обозначения точно такие же, что и в таблицах 2, 3.

Таблица 4. $v_0 = v_2 = v_3 = 3$

	000	001	110	002	220	330	440
222	$x_0 = x_2$	331(F)	331(G)	$x_0 = x_2$	$x_0 = x_2$	331 $x_0 = x_1$	331 T_8
221	330 Q_2 331 T_1 332 (H)	T_1	330 Q_2 331 T_1 332 (H)	330 Q_2 331 T_1 332 (H)	$x_0 = x_1$	Q_2	T_7
112	330 T_6 332 T_1	330 T_6 332 T_1	$x_0 = x_2$	T_1	330 T_6 332 T_1	T_6	330 T_6 332 T_1
220	$x_0 = x_2$	331 Q_1	T_1	$x_0 = x_2$	331 Q_1	331 Q_1	331 Q_1
002	$x_0 = x_2$	$x_2 = x_1$	331 (I)	331 (A)	$x_0 = x_2$	331 $x_0 = x_2$	331 T_8
442	330 R_2	330 R_2	T_6	330 R_2	330 R_2	R_2	$x_0 = x_2$
332	332 (B)	T_7	332 (C)	332 (D)	332 (E)	$x_0 = x_2$	R_2

Случаи, в которых информации о P нет, помечены символами A-I. Начнем с четырех F-I.

F. $001, 222, 331$**.** Учитывая, что $v_4 = 4$ и ограничившись двумя последними метками, мы видим, что все необходимые случаи разобраны в пункте 3.B, таблица 6, III.B.1-7. Лишь в одном из названных случаев среди дополнительных меток встречается метка 001. Это — случай III.B.5. Однако среди дополнительных меток там нет метки длины 4, отвечающей вершине 1.

G. $110, 222, 331$**.** Этот случай разобран в пункте 2.A, таблица 6, II.A.1.

H. $221, 332$**.** Точно также как и пункте F замечаем, что этот случай полностью разобран в пункте 3.A, таблица 6, III.A.1-7. Соответствующие S-системы во всех случаях не имеют решений.

I. $110, 002, 331$**.** Мы видим, что $1244 \in \mathcal{M}$. Симметричный данному набору меток является набор из трех меток $220, 112, 441$. Для него в пункте 2.C доказано (см. также таблица 6, II.C.1), что существуют короны и дополнительно существует лишь одна метка длины 4. Это означает, что для нашего набора меток с условием $v_1 = v_4 = 4$ существуют короны с набором меток: $011, 1442, 200, 313, 4421$. Корона для P с симметричной нумерацией вершин показана на рис. 9(b). В таблице 6, IV.1, указано решение S-системы соответствующей данному набору меток. Мы видим, что это набор углов, симметричный набору (2) условия теоремы.

Теперь перейдем к пунктам A-E.

A. $002, 002, 331$**.** Нетрудно вычислить, что 1244 — тоже метка. Однако в этой ситуации она не может соответствовать вершине 1. Имеется лишь пять различных меток длины 4, отвечающих вершине 1: 1110, 1111, 1112, 1134, 1144. Для метки 1134 выполняется равенство $x_0 + x_1 = 180°$ и следовательно $P \in T_1$. Если имеет место метка 1144, то $x_0 = x_3$, и тогда $P \in T_7$.

Для каждой из трех оставшихся меток имеются короны при этом $P \notin T_i$ для всех i. Короны имеют следующие последовательности меток: $(002, u, 002, 331, 1244)$, где $u \in \{1110, 1111, 1112\}$, рис. 17, 16, 23.

Из таблицы 6, IV.A.1-3, видно, что имеется ровно по одному решению S-систем, соответствующих каждому из трех наборов меток. Следовательно указаны все короны и в этом случае.

Это наборы углов (8),(7),(13) теоремы.

B. $000, 332, 332$**.** Тогда для вершины 4 допустимо лишь пять меток: 1144, 0144, 1244, 3444, 4444. Если $1144 \in \mathcal{M}$, то $x_0 = x_2$, теперь можно применить лемму 10. Если $1244 \in \mathcal{M}$, то $x_0 = x_1$, затем применяем лемму 11. Для метки 0144 — $x_3 + x_4 = 180°$, значит $P \in T_1$. Для каждой из двух оставшихся меток 3444, 4444 S-система, определяемая метками, имеет ровно по одному решению, таблица 6, IV.B.2,3. Однако, в каждом из этих двух случаев нет меток длины 4, отвечающих вершине 1.

Этим случай B исчерпан.

C. $110, 332, 332$**.** Отметим, что в этом случае обязательно имеет место метка 0244. Однако, она не отвечает вершине 1. Кроме нее для вершины 4 допустимы еще лишь четыре метки: 0044, 0144, 1244, 2244. В первом и четвертом случаях $x_0+x_4 = 180°$, во втором — $x_3+x_4 = 180°$, стало быть во всех трех случаях $P \in T_1$. Для метки 1244 выполняется равенство $x_0 = x_1$, значит можно применить лемму 11.

Обратимся теперь к вершине 1. Если $1122 \in \mathcal{M}$, то $P \in T_1$. Кроме названной еще допустимы лишь три метки: 0012, 0122, 1222.

Если $0012 \in \mathcal{M}$, то $441 \in \mathcal{M}$, а тогда $P \in T_8$. В двух оставшихся случаях S-системы имеют ровно по одному решению, таблица 6, IV.C.1, 2. Следовательно для каждого из них получается новый пятиугольник, имеющий корону.

Для метки 0122 имеются короны, они изображены на рис. 22(a) и рис. 22(b), где $i, j = 0, 2$, а суммы $i + 2$, $j + 2$ берутся по модулю 4. Набор из пяти меток для всех четырех корон один и тот же: (011, 1022, 233, 323, 4402).

Для метки 1222 имеются короны, рис. 15(a) и рис. 15(b). Набор меток каждой вершины короны один: (011, 1222, 233, 323, 4402)

Это наборы углов (12),(6) теоремы.

D. $002, 332, 332$**.**

Для вершины 4 допустимы шесть меток: 1144, 0144, 1244, 3444, 3344, 4444. Если $3344 \in \mathcal{M}$, то $P \in T_1$. Если $0144 \in \mathcal{M}$, то $x_0 + x_4 = 180°$, а тогда $P \in T_1$. Если $1244 \in \mathcal{M}$, то $001 \in \mathcal{M}$, а тогда $P \in T_7$.

Если $3444 \in \mathcal{M}$ или $4444 \in \mathcal{M}$ S-система имеет ровно по одному решению, таблица 6, IV.D.1, 2. В вершине 1 должна быть обязательно метка вида $12ij$, но среди меток для полученных углов нет такой метки.

Если $1144 \in \mathcal{M}$, то согласно таблице 6, IV.D.3, существует единственное решение S-системы. Для него получается новый набор углов, для которого имеются короны: $(002, 1112, 233, 323, 4411)$. Короны изображены на рисунке 19. Эти короны соответствует набору углов (10) теоремы.

E. $220, 332, 332$**.** Для вершины 4 имеется лишь пять меток:
$0144, 1144$, 1244, 3344, 3444. Для меток 0144 и 3344 — $x_3 + x_4 = 180°$, значит $P \in T_1$. Для метки 1144 получаем $x_0 = x_2$, далее лемма 10. $1244 \in \mathcal{M}$, то $001 \in \mathcal{M}$, а тогда $P \in T_7$.

Для оставшейся метки 3444 S-система, определяемая метками, имеет ровно одно решение, таблица 6, IV.E. Однако, в этом случае нет меток длины 4, отвечающих вершине 1.

Этим исчерпан рассматриваемый в этом пункте случай.

3.6. **Случай** $v_0 = v_1 = v_3 = 3$**,** $v_2 = v_4 = 4$**.** В этом пункте докажем, что при указанном условии $P \in T_i$, $i = 1, 2, 6, 7, 8$, или P имеет углы указанные в теореме, наборы (1), (3), (6), (11), (12), (14).

Если $P \notin T_1$, то как отмечалось в пункте 2 в вершинах 0 и 1 возможны лишь по семь меток: 000, 001, 110, 002, 220, 330, 440 — для вершины 0; 111, 001, 110, 112, 221, 331, 441 — для вершины 1. Составим такую же как и в пункте 4 $7 \times 7-$таблицу, строки который помечены метками вершины 1, а столбцы — метками вершины 0. Все пояснения к таблице из пункта 4 сохраняют силу для новой таблицы 5.

Заметим, что симметрии здесь тоже нет, нам необходимо заполнить все 49 клеток таблицы. Все обозначения точно такие же, что и в таблице 4. Прочерк в клетке таблицы 5 означает, что соответствующие метки несогласованы.

Таблица 5. $v_0 = v_1 = v_3 = 3$

	000	001	110	002	220	330	440
111	$x_0 = x_1$	$x_0 = x_1$	—	330 V.3 331 II.D.1 332 V.4	330 V.7 331 Q_1 332 V.8	—	—
001	—	330 A 331 B 332 T_7	$x_0 = x_1$	—	—	—	330 T_1 331 T_8 332 R_2
110	$x_0 = x_1$	$x_0 = x_1$	330 C 331 D 332 E	330 V.5 331 IV.1 332 V.6	T_1	—	T_1
112	330 T_6 331 V.1 332 T_1	330 T_6 331 V.2 332 T_7	$x_0 = x_2$	T_1	330 T_6 331 Q_1 332 V.9	T_6	—
221	—	T_1	330 Q_2 331 T_1 332 II.B.1	—	—	Q_2	—
331	—	—	—	330 $x_0 = x_1$ 331 F 332 $x_2 = x_1$	Q_1	—	—
441	330 I.1 331 T_2 332 T_8	T_1	—	Q_1	—	—	—

Случаи, в которых информации о P нет, помечены либо латинскими буквами A —E, либо ссылками на таблицу 6.

Римская цифра отсылает к таблице 6, в которой в соответствующей строке указано решение S-системы, определяемой данным набором меток. Таких клеток 13. S-Система не имеет ни одного решения (II.B.1, V.8, V.9). В остальных случаях S-система имеет ровно одно решение. Для этого решения либо нет ни одной дополнительной метки (I.1, V.1, V.3), либо дополнительные метки для вершины 2 не могут быть согласованы с метками, отвечающим вершинам 1 и 3 (II.D.1, IV.1, V.2, V.4, V.6, V.7). Наконец, в одном случае (V.5) имеющаяся метка для вершины 4 не может быть согласована с меткой вершины 0.

Рассмотрим теперь позиции, помеченные латинскими буквами A — E.

A. В этом случае вершинам 0 и 1 отвечает одна и та же метка 001, вершине 3 — метка 330, а вершине 4 может отвечать одна метка из 0144, 1144, 1244, 3444, 4444, рис. 6.

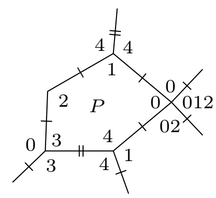


Рис. 6

Для меток $0144, 1244$ выполняется равенство $x_3 + x_4 = 180°$, значит $P \in T_1$; для меток $3444, 4444$ соответствующие S-системы не имеют решений, таблица 6, V.A.2,3; для метки 1144 имеется два решения соответствующей S-системы, но одно решение не удовлетворяет заключению леммы 3, а для второго нет ни одной метки длины 4, таблица 6, V.A.1.

B. Единственное отличие от предыдущего случая состоит в том, что вершине 3 отвечает метка 331, рис. 6. Вершине 4 может отвечать одна из перечисленных там меток.

Для меток $1144, 1244$ имеем $x_1 = x_2$, далее все решает лемма 11; для метки 4444 S-система не имеет решений, таблица 6, V.B.3; для меток 0144, 3444 единственное решение S-системы удовлетворяет условию $x_1 + x_2 = 180°$, т.е. $P \in T_1$, таблица 6, V.B.1,2.

C. Здесь вершинам 0 и 1 отвечает метка 110, вершине 3 — метка 330, вершине 4 отвечает одна из четырех меток: 0144, 0244, 1244, 2244, рис. 7. Еще одну метку 0044 мы исключили, иначе сразу $P \in T_1$.

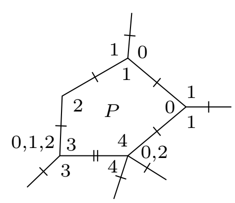


Рис. 7

Если $1244 \in \mathcal{M}$, то $x_3 + x_4 = 180°$, значит $P \in T_1$. Для меток $0144, 0244$ соответствующие S-системы не имеют решений, таблица 6, V.C.1,2.

Метка 2244 является следствием двух меток 110 и 330. Эта метка отвечает обеим вершинам 2 и 4. В результате получается корона со следующим набором меток: (011, 101, 2244, 303, 4422), рис. 24. Это — набор углов (14) условия теоремы.

Частным случаем являются три пятиугольника, у которых вершине 2 отвечает одна из меток: $0012, 0122, 1222$, таблица 6, V.C.3-5. Мы получаем в этом случае три короны, метки которых следующие: (011, 101, 2001, 303, 4422), (011, 101, 2021, 303, 4422), (011, 101, 2221, 303, 4422). Пятиугольники вместе с короной изображены на рисунках 20(a), 20(b) 11(a), 11(b), 10.

Это — наборы углов (11), (4) и (3) условия теоремы.

D. Наборы меток в вершинах 0, 1, 4 такие же, что и в предыдущем случае. Вершине 3 отвечает метка 331, рис. 7.

Если одна из меток $0144, 0244$ входит в $\mathcal{M}$, то $x_3+x_4=180°$, значит $P\in T_1$. Если $2244\in\mathcal{M}$, то $x_0=x_1$, далее остается применить лемму 11. Для метки 1244 единственное решение S-системы не имеет меток длины 4, таблица 6, V.D.

E. Наборы меток в вершинах 0, 1, 4 такие же, что и в предыдущем случае. Вершине 3 отвечает метка 332, рис. 7.

Если $0144\in\mathcal{M}$, то $x_3+x_4=180°$, значит $P\in T_1$; если $1244\in\mathcal{M}$, то $x_0=x_1$, далее лемма 11; если $2244\in\mathcal{M}$, то $x_0=x_2$, лемма 10.

Метка 0244 является следствием двух меток 110 и 332. Однако, эта метка для вершины 2 несовместна с метками вершин 1 и 3.

Исследуем вопрос о других метках в вершине 2. В предположении $P\notin T_1$ имеется лишь три метки, отвечающие вершине 2: $0012, 0122, 1222$.

Для метки 0012 S-система имеет единственное решение, для которого $P\in T_8$, таблица 6, V.E.1.

Для метки 0122 S-система имеет единственное решение, для которого не имеется других меток, таблица 6, V.E.2. В этом случае получается короны, отвечающие одному и тому же набору меток: (011, 101, 2021, 323, 4402). Короны отличаются друг от друга лишь порядком символов 0 и 2 в метках вершин 2 и 4, рисунки 21(a), 21(b).

Это — набор углов (12) условия теоремы.

Отметим, что последний набор углов уже встречался см. таблица 6, IV.C.1, но короны отличаются степенями вершин: степень вершины 1 для короны из пункта 4 равна 4, а для последней короны — 3.

Наконец, для метки 1222 имеется тоже единственное решение S-системы, таблица 6, V.E.3. В этом случае имеются, отвечающие одному и тому же набору меток: (011, 101, 2221, 323, 4402). Короны отличаются друг от друга лишь порядком символов 0 и 2 в метке вершины 4, рисунки 14(a), 14(b).

Этот последний набор углов тоже уже встречался см. таблица 6, IV.C.2. Короны отличаются как и в предыдущем случае степенью вершины 1. Это — набор углов (6) условия теоремы.

F. Здесь вершине 0 отвечает метка 002, вершинам 1 и 3 отвечает одна и та же метка 331, вершине 4 отвечает одна из пяти меток: 0144, 1144, 1244, 3444, 4444.

Отметим, что метка 1244 является следствием меток 002 и 331. Однако, эта метка не может соответствовать вершине 2, так как она не совместна с метками вершин 1 и 3.

Если $0144\in\mathcal{M}$ или $4444\in\mathcal{M}$, то x_0+x_2, лемма 10; если $1144\in\mathcal{M}$, то $x_0=x_1$, далее лемма 11; если $3444\in\mathcal{M}$, то S-система имеет единственное решение, для которого нет других меток, таблица 6, V.F.1. Таким образом, в этом случае нет меток для вершины 2.

Закончим наше обсуждение исследованием меток вершины 2. Их всего четыре: 0122, 0222, 1222, 2222. Для первых трех соответствующие S-системы не имеют решений, для последней метки имеется ровно одно решение, для которого $P\in T_1$, таблица 6, V.F.2-4

Этим пункт 6 исчерпан, который завершает доказательство теоремы 3.

Таблица 6. Решения S-систем для $\delta(P) = 11112$

Номер	Заданные метки	ОГС	Общее решение СЛУ, решение S-системы					Тип	Дополнительные метки
			x_0	x_1	x_2	x_3	x_4		
0.1	000, 111, 333	(0, 180)	120	120	$180-t$	120	t		
			120	120	94.34	120	85.66		2244
0.2	221, 220, 442	(102,85, 128,57)	$-360+4t$	$-360+4t$	$360-2t$	$900-7t$	t		
			53.75	53.75	153.13	175.94	103.44	R_2	
			104.94	104.94	127.53	86.35	116.24		
0.3	330, 222, 331	(0, 60)	$160-2t$	$160-2t$	120	$100+t$	$3t$		Нет нулей
0.4	220, 221, 332	(0, 25,71)	$1080/7-4t$	$1080/7-4t$	$720/7+2t$	$900/7-t$	$7t$		Нет нулей
I.1	000, 330, 441	(90, 180)	120	$360-2t$	$-60+t$	120	t		
			120	51.32	94.34	120	154.34	R_2	
I.2	110, 330, 441	(90, 135)	$-360+4t$	$360-2t$	$180-t$	$360-2t$	t		
			81.19	139.4	69.7	139.4	110.3		344, 2244, 0223, 02222, 013, 0122
I.3	111, 330, 441	(90, 180)	$360-2t$	120	$-60+t$	t	120		
			83.33	120	78.34	138.34	120		444, 0224, 0122
I.4	0034, 330, 441	(30, 60)	$120-2t$	$360-6t$	$-60+4t$	$120+t$	$3t$		Нет нулей
II.A.1	110, 222, 331	(5, 50)	$200-4t$	$80+2t$	120	$140-t$	$3t$		Нет нулей
II.A.2	110, 222, 4401	(45, 90)	$360-4t$	$2t$	120	$60+t$	t		Нет нулей
II.A.3	110, 222, 4402	(30, 120)	$240-2t$	$60+t$	120	120	t		Нет нулей
II.A.4	110, 222, 4412	(40, 75)	$-120+4t$	$240-2t$	120	$300-3t$	t		
			152.45	103.78	120	95.66	68.11		1244
II.A.5	110, 222, 4422	(90, 180)	$360-2t$	t	120	t	60		
			166.5	96.75	120	96.75	60		444444, 24444, 033, 013
II.A.6	110, 222, 3400	(20, 180)	80	140	120	$200-t$	t		
			80	140	120	75.63	124.37		0002
II.B.1	110, 221, 332	(4,5, 27)	$216-8t$	$72+4t$	$144-2t$	$108+t$	$5t$		Нет нулей
II.B.2	110, 221, 4422	(45, 90)	$360-4t$	$2t$	$180-t$	$2t$	t		Нет нулей
II.B.3	110, 221, 4412	(51,42, 67,5)	$-360+8t$	$360-4t$	$2t$	$540-7t$	t		
			158.26	100.87	129.56	86.52	64.78		14444, 1244
II.B.4	110, 221, 4402	(4,5, 27)	$216-8t$	$72+4t$	$144-2t$	$108+t$	$5t$		Нет нулей
II.B.5	110, 221, 4401	(45, 90)	$360-4t$	$2t$	$180-t$	$2t$	t		Нет нулей
II.C.1	220, 112, 441	(112,5, 135)	$1080-8t$	$360-2t$	$-360+4t$	$-540+5t$	t		
			94.56	113.64	132.72	75.9	123.18		0133
II.C.2	220, 112, 3300	(90, 135)	$-360+4t$	t	$360-2t$	$540-4t$	t		
			100.12	115.03	129.94	79.88	115.03		244, 124
II.C.3	220, 112, 3301	(112,5, 135)	$1080-8t$	$360-2t$	$-360+4t$	$-540+5t$	t		
			94.56	113.64	132.72	75.9	123.18		144, 0133
II.C.4	220, 112, 3302	(45, 90)	$360-4t$	$180-t$	$2t$	t	$2t$		
			85.88	111.47	137.06	68.53	137.06		114, 1133, 044, 0334, 03333, 024, 0233
II.C.5	220, 112, 3312	(9,64, 25,7)	$1800/7-8t$	$1080/7-2t$	$360/7+4t$	$540/7-t$	$7t$		
			72	108	144	54	162	T_1	
II.C.6	220, 112, 3422	(0, 22,04)	1080/7	900/7	720/7	$1080/7-7t$	$7t$		
			154.29	128.57	102.86	97.85	56.44		
II.D.1	220, 111, 441	(30, 120)	$240-2t$	120	$60+t$	t	120		
			93.07	120	133.47	73.47	120		444, 0334, 0133
II.D.2	220, 111, 0144	(30, 120)	$240-2t$	120	$60+t$	120	t		Нет нулей
II.D.3	220, 111, 4411	(90, 180)	$360-2t$	120	t	t	60		
			153.56	120	103.22	103.22	60		444444, 14444, 033, 023

Таблица 6. Продолжение

Номер	Заданные метки	ОГС	Общее решение СЛУ, решение S-системы					Тип	Дополнительные метки
			x_0	x_1	x_2	x_3	x_4		
II.D.4	220, 111, 4412	(40, 75)	$-120+4t$	120	$240-2t$	$300-3t$	t		
			145.75	120	107.13	100.69	66.44		1244
II.D.5	220, 111, 3334	(15, 60)	$240-4t$	120	$60+2t$	$120-t$	$3t$		
			120	120	120	90	90	T_1	
II.D.6	220, 111, 3444	(60, 105)	$-240+4t$	120	$300-2t$	$360-3t$	t		
			120	120	120	90	90	T_1	
II.D.7	220, 111, 4444	(60, 150)	$300-2t$	120	$30+t$	t	90		
			120	120	120	90	90	T_1	
III.A.1	221, 332, 0144	(45, 90)	$2t$	$360-4t$	$2t$	$180-t$	t		Нет нулей
III.A.2	221, 332, 0244	(4,5, 27)	$216-8t$	$72+4t$	$144-2t$	$108+t$	$5t$		Нет нулей
III.A.3	221, 332, 1244	(45, 90)	$2t$	$360-4t$	$2t$	$180-t$	t		Нет нулей
III.A.4	221, 332, 1144	(0, 45)	$135-t$	$180-4t$	$90+2t$	$135-t$	$4t$		Нет нулей
III.A.5	221, 332, 2244	(18, 45)	$270-5t$	$4t$	$180-2t$	$90+t$	$2t$		Нет нулей
III.A.6	221, 332, 3444	(75, 90)	$-540+8t$	$1080-12t$	$-360+6t$	$360-3t$	t		Нет нулей
III.A.7	221, 332, 4444	(90, 135)	$450-3t$	$-360+4t$	$360-2t$	t	90		Нет нулей
III.B.1	331, 222, 0144	(30, 120)	120	$240-2t$	120	$60+t$	t		
			120	60	120	150	90	R_2	
III.B.2	331, 222, 0244	(30, 90)	$240-2t$	$2t$	120	$180-t$	t		Нет нулей
III.B.3	331, 222, 1244	(30, 120)	120	$240-2t$	120	$60+t$	t		
			120	60	120	150	90	R_2	
III.B.4	331, 222, 1144	(0, 90)	$150-t$	$180-2t$	120	$90+t$	$2t$		Нет нулей
III.B.5	331, 222, 2244	(90, 180)	t	$360-2t$	120	t	60		
			154.34	51.32	120	154.34	60		444444, 24444, 013, 001
III.B.6	331, 222, 3444	(60, 90)	$420-4t$	$-360+6t$	120	$360-3t$	t		
			142.82	55.77	120	152.11	69.3		
III.B.7	331, 222, 4444	(90, 180)	$-30+t$	$360-2t$	120	t	90		
			120	60	120	150	90	R_2	
IV.1	110, 002, 331	(4,5, 27)	$72+4t$	$144-2t$	$216-8t$	$108+t$	$5t$		
			132.72	113.64	94.56	123.18	75.9		1244
IV.A.1	002, 1110, 331	(6,42, 21,4)	$360/7+6t$	$720/7-2t$	$1800/7-12t$	$900/7+t$	$7t$		
			126.42	77.86	107.15	141.07	87.49		1244, 0111
IV.A.2	002, 1111, 331	(45, 135)	$45+t$	90	$270-2t$	135	t		
			129.13	90	101.74	135	84.13		1244
IV.A.3	002, 1112, 331	(30, 60)	$3t$	$2t$	$360-6t$	$180-t$	$2t$		
			128.22	85.48	103.56	137.26	85.48		334, 2444, 1244, 1124
IV.B.2	000, 332, 3444	(60, 90)	120	$420-4t$	$-360+6t$	$360-3t$	t		
			120	133.06	70.41	144.8	71.73		
IV.B.3	000, 332, 4444	(90, 180)	120	$-30+t$	$360-2t$	t	90		
			120	101.41	97.18	131.41	90		
IV.C.1	110, 332, 0122	(22,5, 45)	$360-8t$	$4t$	$2t$	$180-t$	$3t$		
			85.88	137.06	68.53	145.74	102.79		0244, 02222
IV.C.2	110, 332, 1222	(6,42, 21,4)	$1800/7-12t$	$360/7+6t$	$720/7-2t$	$900/7+t$	$7t$		
			108.28	125.86	78.05	140.98	86.83		0244
IV.D.1	002, 332, 3444	(60, 90)	$360-3t$	$180-t$	$-360+6t$	$360-3t$	t		
			133.43	104.48	93.13	133.43	75.52		1144, 0444, 023
IV.D.2	002, 332, 4444	(90, 180)	t	90	$360-2t$	t	90		

Таблица 6. Продолжение

Номер	Заданные метки	ОГС	Общее решение СЛУ, решение S-системы					Тип	Дополнительные метки
			x_0	x_1	x_2	x_3	x_4		
			126.87	90	106.26	126.87	90		1111, 023
IV.D.3	002, 332, 1144	(30, 60)	$270-3t$	$180-2t$	$-180+6t$	$270-3t$	$2t$		
			124.23	82.82	111.54	124.23	97.18		1112, 023
IV.E	220, 332, 3444	(75, 90)	$1080-12t$	$-540+8t$	$-360+6t$	$360-3t$	t		
			142.26	85.16	108.87	125.57	78.14		
V.1	000, 112, 331	(5, 50)	120	$80+2t$	$200-4t$	$140-t$	$3t$		
			120	133.95	92.09	113.02	80.93		
V.2	001, 112, 331	(0, 45)	$135-t$	$90+2t$	$180-4t$	$135-t$	$4t$		
			113.12	133.76	92.47	113.12	87.53		2244, 013
V.3	002, 111, 330	(5, 50)	$80+2t$	120	$200-4t$	$140-t$	$3t$		
			131.17	120	97.66	114.42	76.75		
V.4	002, 111, 332	(90, 180)	t	120	$360-2t$	t	60		
			141.79	120	76.43	141.79	60		444444, 14444, 1144, 023
V.5	002, 110, 330	(0, 45)	$90+2t$	$135-t$	$180-4t$	$135-t$	$4t$		
			129.94	115.03	100.12	115.03	79.88		2244, 013
V.6	002, 110, 332	(45, 90)	$2t$	$180-t$	$360-4t$	$2t$	t		
			137.06	111.47	85.88	137.06	68.53		24444, 2344, 1144, 113, 0244, 023
V.7	220, 111, 330	(90, 180)	$360-2t$	120	t	t	60		
			153.56	120	103.22	103.22	60		444444, 14444, 1144, 023
V.8	220, 111, 332	(5, 50)	$200-4t$	120	$80+2t$	$140-t$	$3t$		Нет нулей
V.9	220, 112, 332	(0, 45)	$180-4t$	$135-t$	$90+2t$	$135-t$	$4t$		Нет нулей
V.A.1	001, 330, 1144	(0, 45)	$90+2t$	$180-4t$	$135-t$	$135-t$	$4t$		
			133.42	93.16	113.29	113.29	86.84		023, 022
			164.15	31.71	97.93	97.93	148.29	R_2	023, 022
V.A.2	001, 330, 3444	(75, 90)	$-360+6t$	$1080-12t$	$-540+8t$	$360-3t$	t		Нет нулей
V.A.3	001, 330, 4444	(90, 135)	$360-2t$	$-360+4t$	$450-3t$	t	90		Нет нулей
V.B.1	001, 331, 0144	(45, 90)	$2t$	$360-4t$	$180-t$	$2t$	t		
			144	72	108	144	72	T_1	
V.B.2	001, 331, 3444	(60, 90)	$360-3t$	$-360+6t$	$180-t$	$360-3t$	t		
			144	72	108	144	72	T_1	
V.B.3	001, 331, 4444	(90, 180)	t	$360-2t$	90	t	90		Нет нулей
V.C.1	110, 330, 0144	(45, 90)	$360-4t$	$2t$	$180-t$	$2t$	t		Нет нулей
V.C.2	110, 330, 0244	(0, 90)	$180-2t$	$90+t$	$180-2t$	$90+t$	$2t$		Нет нулей
V.C.3	110, 0012, 330	(0, 60)	$2t$	$180-t$	$180-3t$	$180-t$	$3t$		
			75.96	142.02	66.05	142.02	113.95		2244, 013, 0023, 00022
V.C.4	110, 0122, 330	(90, 135)	$-360+4t$	$360-2t$	$180-t$	$360-2t$	t		
			81.19	139.4	69.7	139.4	110.3		344, 2244, 144, 0223, 02222, 013
V.C.5	110, 1222, 330	(90, 120)	$720-6t$	$-180+3t$	$180-t$	$-180+3t$	t		
			88.71	135.65	74.78	135.65	105.22		2244, 2223, 013
V.D	110, 331, 1244	(4,5, 27)	$72+4t$	$144-2t$	$216-8t$	$108+t$	$5t$		
			132.72	113.64	94.56	123.18	75.9		002
V.E.1	110, 0012, 332	(90, 120)	$-360+4t$	$360-2t$	$720-6t$	$-180+3t$	t		
			77.34	141.33	64	148	109.33	T_8	
V.E.2	110, 0122, 332	(22,5, 45)	$360-8t$	$4t$	$2t$	$180-t$	$3t$		
			85.88	137.06	68.53	145.74	102.79		0244, 02222
V.E.3	110, 1222, 332	(6,42, 21,4)	$1800/7-12t$	$360/7+6t$	$720/7-2t$	$900/7+t$	$7t$		

Таблица 6. Продолжение

Номер	Заданные метки	ОГС	Общее решение СЛУ, решение S-системы					Тип	Дополнительные метки
			x_0	x_1	x_2	x_3	x_4		
			108.28	125.86	78.05	140.98	86.83		0244
V.F.1	002, 331, 3444	(67,5, 90)	$-180+4t$	$-360+6t$	$720-8t$	$360-3t$	t		
			132	108	96	126	78		1244
V.F.2	002, 331, 0122	(90, 120)	$360-2t$	$720-6t$	$-360+4t$	$-180+3t$	t		Нет нулей
V.F.3	002, 331, 0222	(54, 144)	144	$288-2t$	72	$36+t$	t		Нет нулей
V.F.4	002, 331, 1222	(30, 60)	$180-t$	$360-6t$	$2t$	$3t$	$2t$		Нет нулей
V.F.5	002, 331, 2222	(45, 135)	135	$270-2t$	90	$45+t$	t		
			135	135	90	112.5	67.5	T_1	

3.7. **Продолжение корон до мозаик.**

Теорема 4. *Пятиугольники, имеющие один из четырнадцати наборов углов, перечисленных в теореме 3, имеют короны, но ни одна из таких корон не может быть продолжена до мозаики.*

Доказательство. Далее рассматриваются 14 пунктов в соответствии с наборами углов, перечисленных в теореме 3. Во многих случаях пятиугольник может иметь несколько корон, но на соответствующих рисунках обычно приводится одна из корон. Количество возможных корон и пояснения к рисункам приведены в тексте.

1. Углы пятиугольника:

$$x_0 \approx 93,06^\circ, x_1 = 120^\circ, x_2 \approx 133,47^\circ, x_3 \approx 73,47^\circ, x_4 = 120^\circ.$$

Пятиугольник P с такими углами имеет четыре короны (рис. 8). Символы m, n меток вершины 2 принимают значения: $m = 0, n = 2$ или $m = 2, n = 0$. В вершине 3 плитка, смежная с P по вершине, может занимать два положения. Во всех случаях препятствием для продолжения замощения плоскости служит вершина, обведенная на рисунке кружочком.

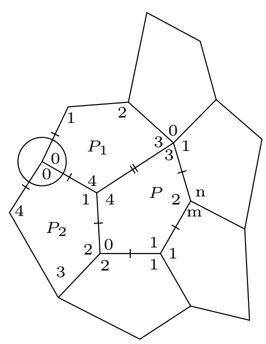


Рис. 8

В указанной вершине возможны лишь метки вида $00i_1 \dots i_k$, $k = 1, 2 \dots$. Все возможные метки для этого пятиугольника приведены в таблице 6, II.D.1. Среди меток, указанных в таблице, меток такого вида нет.

2. Углы пятиугольника:

$$x_0 \approx 94,56\circ, x_1 \approx 113,64^\circ, x_2 \approx 132,72^\circ, x_3 \approx 75,9^\circ, x_4 \approx 123,18^\circ.$$

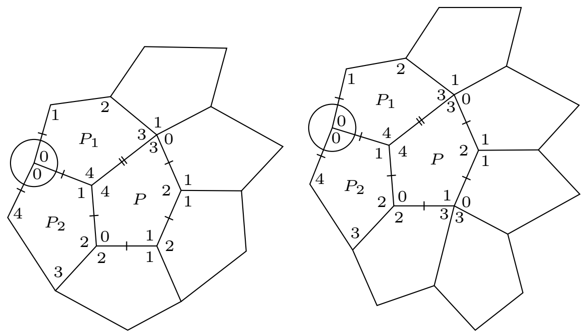
Пятиугольник P с такими углами имеет четыре короны (рис. 9(a), 9(b)). В вершине 3 плитка, смежная с P по вершине, может занимать два положения. Во всех случаях препятствием для продолжения замощения плоскости служат вершины, обведенные на рисунках кружочком.

В указанной вершине возможны лишь метки вида $00i_1 \dots i_k$, $k = 1, 2 \dots$. Все возможные метки для этого пятиугольника приведены в таблице 6, II.C.1. Среди меток, указанных в таблице, меток такого вида нет.

3. Углы пятиугольника:

$$x_0 \approx 88,71^\circ, x_1 \approx 135,65^\circ, x_2 \approx 74,78^\circ, x_3 \approx 135,65^\circ, x_4 \approx 105,22^\circ.$$

Пятиугольник P с такими углами имеет четыре короны (рис. 10). В вершинах 2 и 4 плитки, смежные с P по этим вершинам, могут занимать по два положения.



(a) (b)

Рис. 9

Во всех случаях препятствием для продолжения замощения плоскости служит вершина, обведенная на рисунке кружочком.

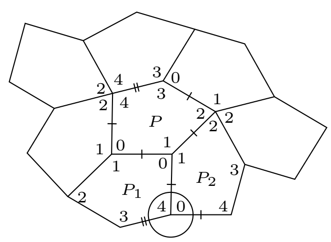


Рис. 10

В указанной вершине возможны лишь метки вида $04i_1 \dots i_k$, $k = 1, 2 \dots$. Все возможные метки для этого пятиугольника приведены в таблице 6, V.C.5. Среди меток, указанных в таблице, меток такого вида нет.

4. Углы пятиугольника:

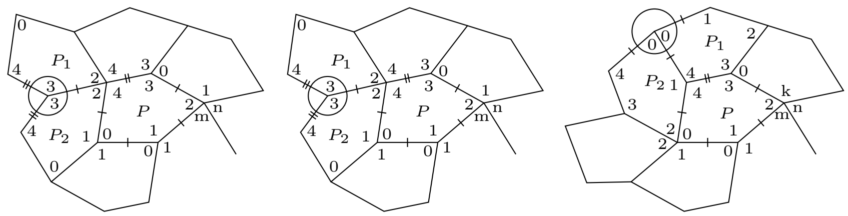
$$x_0 \approx 81,2^\circ, x_1 \approx 139,4^\circ, x_2 \approx 69,7^\circ, x_3 \approx 139,4^\circ, x_4 \approx 110,3^\circ.$$

Пятиугольник P с такими углами имеет 18 корон. Символы m, n меток вершины 2 на рисунках 11(a), 11(b) принимают значения: $m = 0, n = 2$ или $m = 2, n = 0$. На рисунке 11(c) символы m, n, k меток вершины 2 принимают значения: $m = 0, n = 2, k = 1$, или $m = 2, n = 0, k = 1$, или $m = 2, n = 4, k = 4$, в вершине 0 плитка, смежная с P по вершине, может занимать два положения.

Препятствием для продолжения замощения плоскости служат вершины, обведенные на рисунках кружочком.

На рисунке 11(a) в указанной вершине возможны лишь метки вида $33i_1 \dots i_k$, $k = 1, 2 \dots$. При этом не может быть метки из трех символов, иначе плитка имела бы две стороны типа 2, и по крайней мере два символа из набора $i_1 \dots i_k$ обязательно должны принадлежать множеству $\{3, 4\}$.

Все возможные метки для этого пятиугольника приведены в таблице 6, I.2 и V.C.4. Среди меток, указанных в таблице, меток такого вида нет.



(a) (b) (c)

Рис. 11

На рисунке 11(b) в указанной вершине возможны лишь метки вида $13i_1 \dots i_k$, $k = 1, 2 \dots$. При этом по крайней мере один из символов набора $i_1 \dots i_k$ обязательно должен принадлежать множеству $\{3, 4\}$.

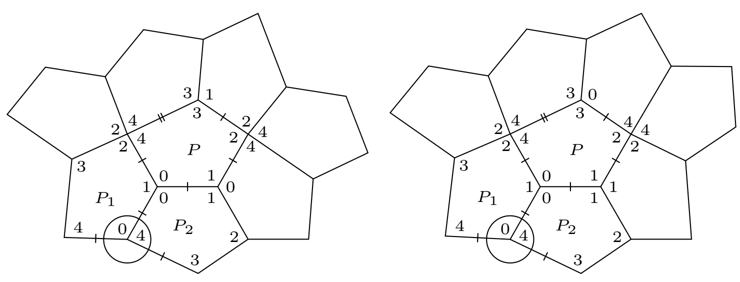
Среди меток, указанных в таблице 6, I.2 и V.C.4, меток такого вида нет.

На рисунке 11(c) в указанной вершине возможны лишь метки вида $00i_1 \dots i_k$, $k = 1, 2 \dots$. Среди меток, указанных в таблице 6, I.2 и V.C.4, меток такого вида нет.

5. Углы пятиугольника:

$$x_0 = x_1 = x_3 = 120^\circ, x_2 \approx 94,34^\circ, x_4 \approx 85,66^\circ.$$

Пятиугольник P с такими углами имеет 6 корон (рис. 12(a), 12(b), 13). На всех рисунках в вершине 2 плитка, смежная с P по вершине, может занимать два положения. Препятствием для продолжения замощения плоскости служат вершины, обведенные на рисунках кружочком.



(a) (b)

Рис. 12

В указанной вершине возможны лишь метки вида $04i_1 \dots i_k$ или $02i_1 \dots i_k$, $k = 1, 2 \dots$. Все возможные метки для этого пятиугольника приведены в таблице 6, 0.1. Среди меток, указанных в таблице, меток такого вида нет.

6. Углы пятиугольника:

$$x_0 \approx 108,28^\circ, x_1 \approx 125,86^\circ, x_2 \approx 78,05^\circ, x_3 \approx 140,98^\circ, x_4 \approx 86,83^\circ.$$

Пятиугольник P с такими углами имеет 16 корон (рис. 14(a), 14(b), 15(a), 15(b)). Символы m, n меток вершины 4 на рисунках принимают значения: $m = 0, n = 2$ или $m = 2, n = 0$. Во всех случаях препятствием для продолжения замощения плоскости служат вершины, обведенные на рисунках кружочком.

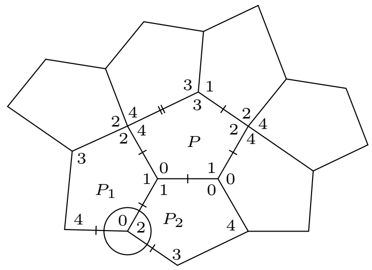
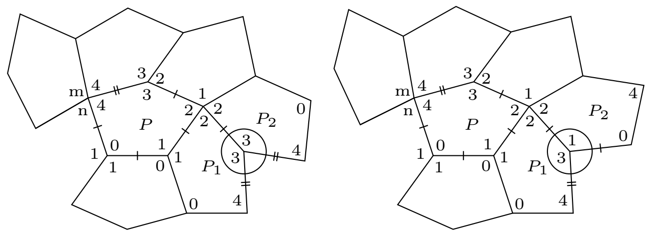
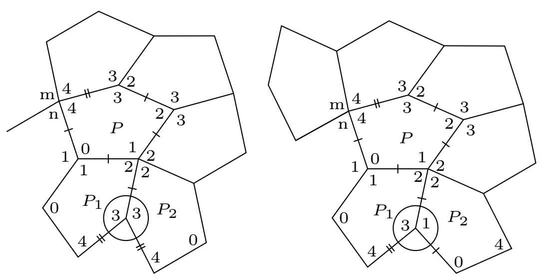


Рис. 13



(a) (b)

Рис. 14



(a) (b)

Рис. 15

На рисунках 14(a) и 15(a) в указанной вершине возможны метки вида $33i_1 \dots i_k$, $k = 1, 2 \dots$. При этом не может быть метки из трех символов, иначе плитка имела бы две стороны типа 2, и по крайней мере два символа набора $i_1 \dots i_k$ обязательно должны принадлежать множеству $\{3, 4\}$.

Все возможные метки для этого пятиугольника приведены в таблице 6, IV.C.2 и V.E.3. Среди меток, указанных в таблице, меток такого вида нет.

На рисунках 14(b) и 15(b) в указанной вершине возможны метки вида $13i_1 \dots i_k$, $k = 1, 2 \dots$. При этом по крайней мере один из символов набора $i_1 \dots i_k$ обязательно должно принадлежать множеству $\{3, 4\}$.

Среди меток, указанных в таблице 6, IV.C.2 и V.E.3, меток такого вида нет.

7. Углы пятиугольника:

$$x_0 \approx 129,13^\circ, x_1 = 90^\circ, x_2 \approx 101,74^\circ, x_3 = 135^\circ, x_4 \approx 84,13^\circ.$$

Пятиугольник P с такими углами имеет восемь корон (рис. 16). Символы m, n меток вершины 0 на рисунке принимают значения: $m = 0, n = 2$ или $m = 2, n = 0$. В вершинах 1 и 4 плитки, смежная с P по этим вершинам, могут занимать по два положения. Препятствием для продолжения замощения плоскости служит вершина, обведенная на рисунке кружочком.

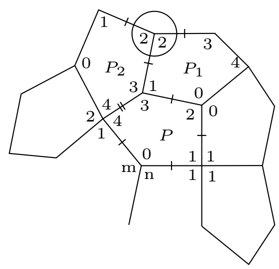


Рис. 16

В указанной вершине возможны лишь метки вида $22i_1 \dots i_k$, $k = 1, 2 \dots$. Все возможные метки для этого пятиугольника приведены в таблице 6, IV.A.2. Среди меток, указанных в таблице, меток такого вида нет.

8. Углы пятиугольника:

$$x_0 \approx 126,42^\circ, x_1 \approx 77,86^\circ, x_2 \approx 107,15^\circ, x_3 \approx 141,07^\circ, x_4 \approx 87,49^\circ.$$

Пятиугольник P с такими углами имеет восемь корон (рис. 17). Символы m, n меток вершины 0 на рисунке принимают значения: $m = 0, n = 2$ или $m = 2, n = 0$. В вершинах 1 и 4 плитки, смежные с P по этим вершинам, могут занимать по два положения. Во всех случаях препятствием для продолжения замощения плоскости служит вершина, обведенная на рисунке кружочком.

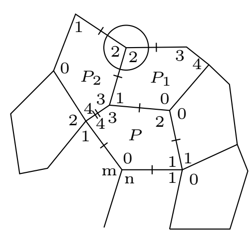


Рис. 17

В указанной вершине возможны лишь метки вида $22i_1 \dots i_k$, $k = 1, 2 \dots$. Все возможные метки для этого пятиугольника приведены в таблице 6, IV.A.1. Среди меток, указанных в таблице, меток такого вида нет.

9. Углы пятиугольника:

$$x_0 \approx 83,32^\circ, x_1 = 120^\circ, x_2 \approx 78,34^\circ, x_3 \approx 138,34^\circ, x_4 = 120^\circ.$$

Пятиугольник P с такими углами имеет восемь корон (рис. 18). Символы m, n меток вершины 2 на рисунке принимают значения: $m = 0, n = 2$ или $m = 2, n = 0$. В вершинах 0 и 2 плитки, смежные с P по этим вершинам, могут занимать два положения. Препятствием для продолжения замощения плоскости служит вершина, обведенная на рисунке кружочком.

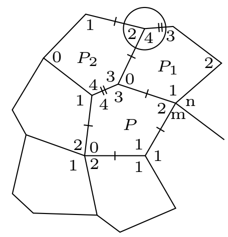


Рис. 18

В указанной вершине возможны лишь метки вида $24i_1 \ldots i_k$, $k = 1, 2 \ldots$, при этом по крайней мере одно из чисел из набора $i_1 \ldots i_k$ обязательно должно принадлежать множеству $\{3, 4\}$. Все возможные метки для этого пятиугольника приведены в таблице 6, I.3. Среди меток, указанных в таблице, меток такого вида нет.

10. Углы пятиугольника:

$$x_0 \approx 124,23^\circ, x_1 = 82,82^\circ, x_2 \approx 111,54^\circ, x_3 \approx 124,23^\circ, x_4 = 97,18^\circ.$$

Пятиугольник P с такими углами имеет восемь корон (рис. 19). Символы m, n меток вершины 0 на рисунке принимают значения: $m = 0, n = 2$, тогда $k = 4, l = 3$, или $m = 2, n = 0$, тогда $k = 3, l = 4$. В вершинах 1 и 4 плитки, смежные с P по этим вершинам, могут занимать два положения. Во всех случаях препятствием для продолжения замощения плоскости служит вершина, обведенная на рисунке кружочком.

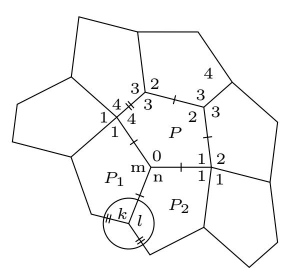


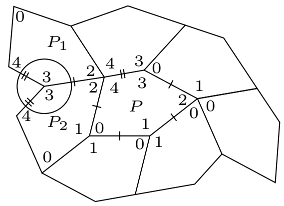
Рис. 19

В указанной вершине возможны лишь метки вида $34i_1 \ldots i_k$, $k = 1, 2 \ldots$, при этом не может быть метки из трех символов, и по крайней мере два символа набора $i_1 \ldots i_k$ обязательно должны принадлежать множеству $\{3, 4\}$. Все возможные метки для этого пятиугольника приведены в таблице 6, IV.D.3. Среди меток, указанных в таблице, меток такого вида нет.

11. Углы пятиугольника:

$$x_0 \approx 75,96^\circ, x_1 \approx 142,02^\circ, x_2 \approx 66,05^\circ, x_3 \approx 142,02^\circ, x_4 \approx 113,95^\circ.$$

Пятиугольник P с такими углами имеет четыре короны (рис. 20(a), 20(b)). В вершине 0 плитка, смежная с P по вершине, может занимать два положения. Препятствием для продолжения замощения плоскости служат вершины, обведенные на рисунках кружочком.



(a) (b)

Рис. 20

На рисунке 20(a) в указанной вершине возможны лишь метки вида $33i_1 \dots i_k$, $k = 1, 2 \dots$. При этом не может быть метки из трех символов, иначе плитка имела бы две стороны типа 2, и по крайней мере два символа набора $i_1 \dots i_k$ обязательно должны принадлежать множеству $\{3, 4\}$.

Все возможные метки для этого пятиугольника приведены в таблице 6, V.C.3. Среди меток, указанных в таблице, меток такого вида нет.

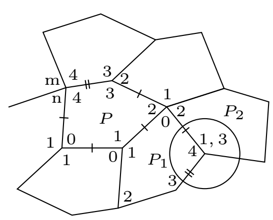
На рисунке 20(b) в указанной вершине возможны лишь метки вида $13i_1 \dots i_k$, $k = 1, 2 \dots$. При этом по крайней мере один из символов набора $i_1 \dots i_k$ обязательно должно принадлежать множеству $\{3, 4\}$.

Среди меток, указанных в таблице 6, V.C.3, меток такого вида нет.

12. Углы пятиугольника:

$$x_0 \approx 85,88^\circ, x_1 \approx 137,06^\circ, x_2 \approx 68,53^\circ, x_3 \approx 145,74^\circ, x_4 \approx 102,79^\circ.$$

Пятиугольник P с такими углами имеет 32 короны (рис. 21(a), 21(b), 22(a), 22(b)). Символы m, n меток вершины 4 на рисунках принимают значения: $m = 0, n = 2$ или $m = 2, n = 0$. Препятствием для продолжения замощения плоскости служат вершины, обведенные на рисунках кружочком.



(a) (b)

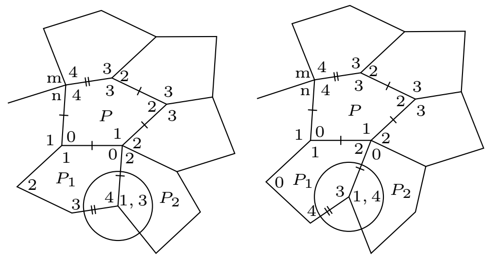
Рис. 21

В коронах в указанных вершинах возможны лишь метки вида:

а) $34i_1 \dots i_k$, $k = 1, 2 \dots$, при этом не может быть метки из трех символов, иначе плитка имела бы две стороны типа 2, и по крайней мере два символа набора $i_1 \dots i_k$ обязательно должны принадлежать множеству $\{3, 4\}$;

б) $13i_1 \dots i_k$ или $14i_1 \dots i_k$, $k = 1, 2 \dots$, при этом по крайней мере один из символов набора $i_1 \dots i_k$ обязательно должно принадлежать множеству $\{3, 4\}$.

Все возможные метки для этого пятиугольника приведены в таблице 6, IV.C.1 и V.E.2. Среди меток, указанных в таблице, меток такого вида нет.



(a) (b)

Рис. 22

13. Углы пятиугольника:

$$x_0 \approx 128,22^\circ, x_1 = x_4 \approx 85,48^\circ, x_2 \approx 103,56^\circ, x_3 \approx 137,26^\circ.$$

Пятиугольник P с такими углами имеет восемь корон (рис. 23). В вершинах 1 и 4 плитки, смежные с P по этим вершинам, могут занимать два положения. Препятствием для продолжения замощения плоскости служит вершина, обведенная на рисунке кружочком.

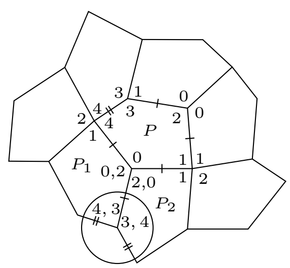


Рис. 23

В указанной вершине возможны лишь метки вида $34i_1 \dots i_k$, $k = 1, 2 \dots$, при этом не может быть метки из трех символов, и по крайней мере два символа набора $i_1 \dots i_k$ обязательно должны принадлежать множеству $\{3, 4\}$. Все возможные метки для этого пятиугольника приведены в таблице 6, IV.A.3. Среди меток, указанных в таблице, меток такого вида нет.

14. Углы пятиугольника:

$$x_0 = 360^\circ - 2x_3, x_1 = x_3, x_2 = 180^\circ - x_4, P \notin T_1 \cup T_2.$$

Пятиугольник P с такими углами имеет две короны (рис. 24). В вершине 4 плитка, смежная с P по этой вершине, может занимать два положения. Препятствием для продолжения замощения плоскости служит, например, вершина, обведенная на рисунке кружочком.

Рассмотрим вначале метки длины 3 и 4, которые могут отвечать этой вершине.

Если этой вершине отвечает метка длины 3, то это 034 или 440. В обоих случаях мы немедленно получаем, что $P \in T_1$, противоречие.

Для дальнейшего полезно вспомнить, что никакая метка не может содержать более трех различных символов. С учетом этого метки длины четыре

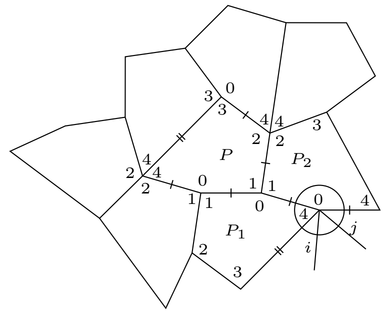


Рис. 24

вершины A должны быть взяты лишь из следующего списка:

$$0044, 0034, 0144, 0244.$$

Если $0044 \in \mathcal{M}(P)$ или $2244 \in \mathcal{M}(P)$, то $x_0 = x_2$. Тогда $P \in T_i$ для $i = 1$ или $i = 2$, лемма 10.

Для двух оставшихся меток соответствующие им S-системы не имеют решений.

Учитывая условие на углы можно считать, что метки, длина которых больше четырех, имеют один из четырех типов:

$$0\ldots04\ldots4, 0\ldots014\ldots4, 0\ldots024\ldots4, 0\ldots034\ldots4.$$

При этом для первых трех типов число четверок обязательно четно, а для последнего это число нечетно. Мы докажем. что на самом деле наличие таких меток ведет к противоречию.

Некоторые дополнительные свойства углов P. Пусть α, β, γ — углы, указанные на рис. 25. Тогда $x_0 = 180^\circ - 2\alpha$, $x_4 = \alpha + \beta + \gamma$. Из треугольника 014 находим, что диагональ 14 равна $2\cos\alpha$. Треугольник 124 прямоугольный с прямым углом в вершине 1. Поэтому

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{2\cos\alpha}.$$

Далее по теореме синусов из треугольника 234 получаем

$$\sin\gamma = \cos\alpha\sin\beta.$$

Таким образом

$$\beta = \operatorname{arctg}\frac{1}{2\cos\alpha}, \gamma = \arcsin(\cos\alpha\sin\beta).$$

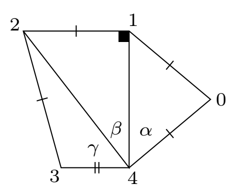


Рис. 25

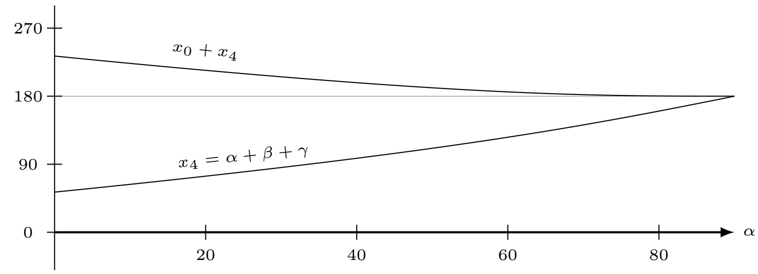


Рис. 26

Следовательно x_4 и $x_0 + x_4$ — функции от α. На рис. 26 изображены графики этих функций. Мы видим, что первая функция монотонно возрастает при изменении α в промежутке $(0, 90^\circ)$, а вторая — монотонно убывает на том же промежутке. Отсюда выводим, что для пятиугольника, удовлетворяющего указанным условиям выполняются неравенства:

$$x_0 > 53^\circ, x_0 + x_4 > 180^\circ.$$

Учитывая равенство $x_2 + x_4 = 180^\circ$ и неравенство $x_1 = x_3 > 90^\circ$, приходим к выводу, что перечисленные выше метки могут иметь длину, большую четырех только при условии, что они содержат не более одного нуля. Пусть число четверок равно $2k$ для меток первых трех типов и $2k-1$ — для меток последнего типа.

Тогда для меток первого типа получается неравенство:

$$x_0 + 2kx_4 > 180^\circ + (2k-1)x_4, 2k-1 \leqslant 3.$$

Единственная метка, удовлетворяющая этим неравенствам, это метка 04444. Однако соответствующая этой метке S-система не имеет решений.

Для меток второго типа получается:

$$x_0 + x_1 + 2kx_4 > 270^\circ + (2k-1)x_4, 2k-1 \leqslant 1.$$

Но тогда $k \leqslant 1$ и стало быть наша метка имеет длину не большую четырех.

Длина меток третьего типа с учетом равенства $x_0 + x_2 = 180^\circ$ тоже не может быть больше четырех.

Наконец для меток четвертого типа мы можем сделать точно такой же вывод. Этим наше утверждение полностью доказано.

Этим доказано, что во всех случаях корона не может быть продолжена до мозаики.

4. Пятиугольники δ-типа 11122

4.1. **Основные формулы и вспомогательные утверждения.** В этой главе будет исследован случай, когда длины трех идущих подряд сторон одинаковы и одинаковы длины оставшихся двух сторон, то есть δ-тип 11122.

Как и в главе 3 обсуждаемые утверждения не зависят от способа нумерации вершин пятиугольника. Всюду здесь мы придерживаемся нумерации, при которой первые три стороны имеют равные длины и две оставшиеся стороны имеют равные длины. Для заданного пятиугольника таких нумераций имеется две. Одна из другой получается заменой $0 \leftrightarrow 1$, $2 \leftrightarrow 4$. Такую замену мы называем симметрией, а обе нумерации вершин — допустимыми. Одна из двух допустимых нумераций выбирается случайно.

Введем следующие множества выпуклых пятиугольников:

$T_1 = \{P|x_0 + x_1 = 180°\} \cup \{P|x_2 + x_3 = 180°\} \cup \{P|x_3 + x_4 = 180°\}$,

$T_3 = \{P|x_1 = x_3 = 90°\} \cup \{P|x_0 = x_3 = 90°\}$,

$T_4 = \{P|x_1 = 2x_3 = 120°\} \cup \{P|x_3 = 2x_1 = 120°\} \cup \{P|x_0 = 2x_3 = 120°\} \cup \{P|x_3 = 2x_0 = 120°\}$,

$T_5 = \{P|x_1 + x_3 = 180°, x_0 = 2x_3\} \cup \{P|x_0 + x_3 = 180°, x_1 = 2x_3\}$.

Наша цель — доказать следующее утверждение.

Теорема 5. *Если P мозаичный пятиугольник, для которого $\delta(P) = 11122$, то $P \in T_1 \cup T_3 \cup T_4 \cup T_5$ либо P имеет один из следующих наборов углов:*

1. $x_0 = x_1 = x_3 = 120°$, $x_2 = x_4 = 90°$;
2. $x_0 = 140°$, $x_1 = 80°$, $x_2 \approx 117{,}88°$, $x_3 = 120°$, $x_4 \approx 82{,}12°$;
3. $x_0 = 120°$, $x_1 \approx 84{,}74°$, $x_2 = 120°$, $x_3 = 120°$, $x_4 \approx 95{,}26°$;
4. $x_0 \approx 141{,}33°$, $x_1 \approx 77{,}34°$, $x_2 \approx 102{,}66°$, $x_3 \approx 154{,}67°$, $x_4 \approx 64°$;
5. $x_0 \approx 141{,}33°$, $x_1 \approx 77{,}34°$, $x_2 \approx 122°$, $x_3 \approx 116°$, $x_4 \approx 83{,}33°$;
6. $x_0 = 150°$, $x_1 = 90°$, $x_2 = 105°$, $x_3 = 120°$, $x_4 = 75°$.

Учитывая "симметрию" $0 \leftrightarrow 1$, $2 \leftrightarrow 4$, для всех наборов углов, кроме набора (1), есть симметричный набор.

Всюду в этой главе символом P обозначается выпуклый пятиугольник, для которого $\delta(P) = 11122$ и выбрана одна из двух допустимых нумераций вершин. Укажем несколько свойств таких пятиугольников.

Лемма 12. *Если $\delta(P) = 11122$, то углы пятиугольника P удовлетворяют условиям:*

1) $x_1 + 2x_2 + x_3 > 360°$, $x_0 + 2x_4 + x_3 > 360°$;

2) $x_0 + x_1 > 120°$.

Доказательство. 1) Пусть α, β, γ — углы, выбранные так, как указано на рис. 27. Тогда $\alpha = 90° - x_1/2$, $\beta = 90° - x_3/2$, $\gamma = 90° - x_0/2$. Так как $x_2 > \alpha + \beta$ и $x_4 > \beta + \gamma$, то $x_1 + 2x_2 + x_3 > 360°$ и $x_0 + 2x_4 + x_3 > 360°$.

2) Если $x_0 > 60°$ и $x_1 > 60°$, то доказывать нечего. Пусть, например, $x_0 \leqslant 60°$. Тогда $\alpha \leqslant 60°$ и $x_0 + x_1 > \alpha + x_1 = 180° - \alpha > 120°$. Лемма доказана.

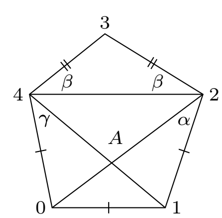


Рис. 27

Лемма 13. *Если $\delta(P) = 11122$, то углы пятиугольника P обращают в нуль функцию S*

$$S = 2\sin\frac{x_1}{2}\sin\frac{x_1 + 2x_2 + x_3 - 360°}{2} - \sin\frac{2x_4 + x_3 - 180°}{2}.$$

Доказательство. Применить теорему синусов к треугольнику $\triangle X_0X_2X_4$ на рис. 27. Лемма доказана.

Лемма 14. *Пусть $\delta(P) = 11122$. Если $x_3 + 2x_2 = 360^\circ$, то $x_1 \leqslant 90^\circ$.*
Если $x_3 + 2x_4 = 360^\circ$, то $x_0 \leqslant 90^\circ$.
Если $x_0 = x_1$, то $x_2 = x_4$.

Доказательство. Из условия $x_3+2x_2 = 360^\circ$ и равенства $c_3 = c_4$ следует, что $\angle X_1X_2X_4 = 90^\circ$. Пусть точка Y выбрана так, что $X_1X_2X_4Y$ — прямоугольник. Если $x_1 > 90^\circ$, то X_0 лежит вне полосы, ограниченной прямыми X_2X_4 и X_1Y. Ширина этой полосы равна $c_2 = |X_1X_2|$. Тогда $c_0 = |X_4X_0| > c_2$. Противоречие с условием.

Случай $x_3 + 2x_4 = 360^\circ$ симметричен разобранному.

Пусть $x_0 = x_1$, тогда $\triangle\ X_0X_1X_2 =\triangle\ X_0X_1X_4$ (рис. 27). Тогда $\gamma = \alpha$ и $\angle X_2X_0X_1 = \angle X_4X_1X_0 \Rightarrow\triangle\ X_0X_1A$ и $\triangle\ X_2X_4A$ — равнобедренные $\Rightarrow \angle X_1X_4X_2 = \angle X_0X_2X_4 \Rightarrow x_2 = x_4$.

Лемма доказана.

Пусть существует мозаика, составленная из плиток, конгруэнтных пятиугольнику P. В силу теоремы 2 главы 1 существует так называемая центральная плитка этой мозаики, которая обладает тем свойством, что три ее вершины имеют степень 3, а две оставшиеся имеют степень 4 или четыре вершины степени 3, а пятая степени $\leqslant 6$. Всюду дальше символом P всегда обозначается выпуклый пятиугольник, удовлетворяющий условию $\delta(P) = 11122$ и являющийся центральной плиткой некоторой мозаики.

Пусть v_i — степень i-ой вершины P. В силу сказанного, а также учитывая, что имеет место "симметрия" $0 \leftrightarrow 1$, $2 \leftrightarrow 4$, для доказательства теоремы достаточно рассмотреть семь случаев:

1. $v_2 = v_3 = v_4 = 3$; 2. $v_1 = v_2 = v_3 = 3$; 3. $v_0 = v_2 = v_3 = 3$;
4. $v_0 = v_1 = v_3 = 3$; 5. $v_0 = v_1 = v_2 = v_4 = 3$;
6. $v_1 = v_3 = 4$; 7. $v_2 = v_3 = 4$.

Используя понятие метки, введенное в главе 2, рассмотрим еще несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 15. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *Если $v_i = 4$, то метка i-й вершины не может состоять из четырех попарно различных чисел;*

2) *Если iik, $jjk \in \mathcal{M}$ и i, j, k попарно различны, то сумма двух оставшихся углов равна 180°;*

3) *Если $234 \in \mathcal{M}$ или $012 \in \mathcal{M}$, то $P \in T_1$;*

4) *Если 110, $220 \in \mathcal{M}$, то $P \in T_1$;*

5) *Если 220, $441 \in \mathcal{M}$, $x_3 = 90^\circ$, то $P \in T_1$;*

6) *Если $024 \in \mathcal{M}$, $x_3 = 90^\circ$, то $P \in T_3$;*

7) *Если 220, $440 \in \mathcal{M}$, $x_3 = 90^\circ$, то $P \in T_3$;*

8) *Если 024, $111 \in \mathcal{M}$, то $P \in T_4$;*

9) *Если 024, $333 \in \mathcal{M}$, то $P \in T_4$;*

10) *Если 220, 440, $333 \in \mathcal{M}$, то $P \in T_4$;*

11) *Если 024, $110 \in \mathcal{M}$, то $P \in T_5$;*

12) *Если 220, 440, $111 \in \mathcal{M}$, то $P \in T_4$;*

13) *Если 2433, $024 \in \mathcal{M}$, то $P \in T_5$;*

14) *Все утверждения остаются верными при заменах* $0 \leftrightarrow 1$, $2 \leftrightarrow 4$, *выполняемых по отдельности или одновременно.*

Доказательство. 1) и 2) Следуют из того, что сумма внутренних углов выпуклого пятиугольника равна $540°$.

3) Если $234 \in \mathcal{M}$, то $x_0 + x_1 = 180° \Rightarrow P \in T_1$. Аналогично для метки 012.

4) Из условия следует, что $x_1 = x_2$. Тогда $012 \in \mathcal{M}$ и можно применить пункт (iii) этой леммы.

5) Из условия следует, что $x_0 + 2x_2 + x_1 + 2x_4 = 720°2$. Так как сумма всех углов пятиугольника равна $540°$, то $x_2 + x_4 = 180° + x_3$. Тогда $x_0 + x_1 = 360° - 2x_3$. Ток как $x_3 = 90°$, то $x_0 + x_1 = 180° \Rightarrow P \in T_1$.

6) Так как $024 \in \mathcal{M}$, то по (ii) $x_1 + x_3 = 180° \Rightarrow x_1 = 90° \Rightarrow P \in T_3$.

7) Из условия следует, что $x_2 = x_4$. Тогда $024 \in \mathcal{M}\ P$ и можно применить пункт (6) этой леммы.

8) Из условия следует, что $x_1 = 120°$ и $x_1 + x_3 = 180° \Rightarrow x_3 = 60° \Rightarrow P \in T_4$.

9) Аналогичен пункту (8).

10) Из условия следует, что $x_3 = 120°, x_2 = x_4$. Тогда $024 \in \mathcal{M}\ P$ и можно применить пункт (9) этой леммы.

11) Из условия следует, что $x_1 + x_3 = 180°$ и $x_0 = 360° - 2x_1 \Rightarrow x_0 = 2x_3 \Rightarrow P \in T_5$.

12) Из условия следует, что $x_2 = x_4$. Далее применим пункт (10) этой леммы.

13) Из условия следует, что $x_1 + x_3 = 180°$ и $x_0 = 2x_3 \Rightarrow P \in T_5$.

Лемма доказана.

Лемма 16. 1) *Каждая из строк* 0344 *или* 1322 *не может быть меткой;*

2) *Наборы из трех меток* 333, 221, 440 *или* 333, 220,441 *невозможны.*

Доказательство. 1) Наличие таких меток противоречит лемме 12(1).

2) Если имеет место один из указанных наборов, то простые вычисления дают $x_0 + x_1 = 120°$. Последнее невозможно в силу леммы 12(1). Лемма доказана.

Лемма 17. *Если* a — *ребро, выходящее из вершины* 2 *или* 4, *и* $\delta(a) = 2$, *то* $P \in T_1$.

Доказательство. Как видно из рисунка 28 метками вершины 2 могут быть лишь 234 и 223. В первом случае $P \in T_1$, лемма 15. Во втором — $x_1 \leqslant 90°$, лемма 14. С другой стороны, метка 223 в вершине 2 влечет метки 110 или 111 в вершине 1. В любом случае $x_1 > 90°$. Противоречие.

Второе утверждение доказывается аналогично. Лемма доказана.

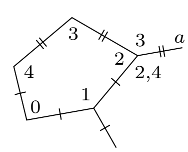


Рис. 28

4.2. **Случай** $v_2 = v_3 = v_4 = 3$. Обозначим a, b, c — ребра, выходящие из вершин 3, 4, 2 соответственно. Если $\delta(a) = 1$, то $\delta(b) = \delta(c) = 2$ (рис. 29(a)). Из этого же рисунка можно усмотреть все возможные метки вершин 2 и 4. Если $234 \in \mathcal{M}$, то $P \in T_1$; если 223 и 443 — метки, то $P \in T_1$, лемма 15.

Если $\delta(a) = 2$, то $x_3 = 120°$ и $\delta(b) = \delta(c) = 1$ (рис. 29(b)). Все возможные метки вершины 2: 220, 221, 240, 241; для вершины 4: 440, 441, 420, 421. Если $024 \in \mathcal{M}$ или $124 \in \mathcal{M}$, то $P \in T_4$; если имеют место метки 220, 440 или 221, 441, то $P \in T_4$, лемма 15.

Наборы меток 220, 441 или 221, 440, с учетом метки 333 иметь место не могут в силу леммы 16.

Этим пункт 2 полностью исследован.

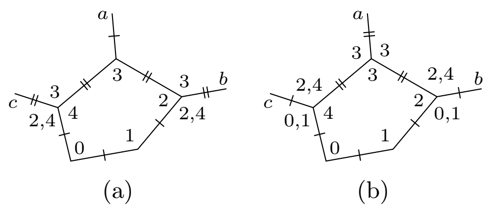


Рис. 29

Далее как и в главе 3 составляем V и VS-системы, используя функцию S из леммы 13. Результаты исследования систем записываем в таблицу 7, которая составляется аналогично таблице 6 главы 3.

4.3. **Случай** $v_1 = v_2 = v_3 = 3$**.** Обозначим a, b, c — ребра, выходящие из вершин 3, 2, 1 соответственно.

Если $\delta(a) = 1$ (рис. 30(a)) то $\delta(b) = 2$ и по лемме 17 $P \in T_1$. Пусть $\delta(a) = 2$. Тогда $\delta(b) = 1$ (рис. 30(b)). Если меткой является 024 или 124, то $P \in T_4$, лемма 15. Рассмотрим поочередно случаи, когда в вершине 2 имеет место одна из двух меток 221 или 220.

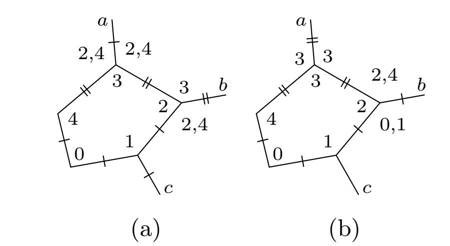


Рис. 30

А. Пусть $221 \in \mathcal{M}$. Если $\delta(c) = 1$, то на рисунке 31(a) $k = 0, 1$ и в вершине 1 возможны лишь метки 001 или 110 . В первом случае по лемме 15 $P \in T_1$. Во втором — функция S не имеет нулей в области геометрического смысла, таблица 7, II.1.

Если $\delta(c) = 2$, то на рисунке 31(a) $k = 2, 4$ в вершине 1 возможны лишь метки 124 или 221. Для первой метки $P \in T_4$, лемма 15.

Пусть в вершине 1 имеет место метка 221. Рассмотрим два случая: $v_0 = 3$ и $v_0 = v_4 = 4$.

Пусть $v_0 = 3$, d — ребро, выходящее из вершины 0. Тогда $\delta(d) = 1$. Возможные метки в вершине: 001, 110 (рис. 31(b)). Оба случая рассмотрены в начале пункта **А**.

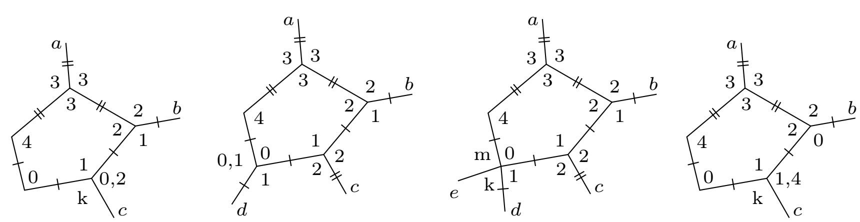
Пусть $v_0 = v_4 = 4$ и d, e — ребра, выходящие из вершины 0. Тогда $\delta(d) = 1$.

Пусть $\delta(e) = 1$, тогда на рисунке 31(c) $k, m = 0, 1$. В вершине 0 возможны лишь такие метки: 0001, 0011, 0111. Во втором случае $P \in T_1$. В третьем случае функция S в области геометрического смысла не имеет нулей (таблица 7, II.3). В первом случае функция S имеет единственный нуль (таблица 7, II.2). Однако нет ни одной метки, содержащей вершину 4. Этим разобран случай, когда $\delta(e) = 1$.

Пусть $\delta(e) = 2$, тогда на рисунке 31(c) $k, m = 2, 4$. Тогда в вершине 0 возможны метки: 0122, 0124, 0144. В первом случае $x_0 = 0$, во втором $x_3 = 180°$. В третьем случае функция S в области геометрического смысла имеет единственный нуль (таблица 7, II.4), однако в этом случае плитка $P \in T_1$. Этим полностью разобран случай **A**.

B. Пусть $220 \in \mathcal{M}$ для вершины 2. Если $\delta(c) = 1$, то на рисунке 31(d) $k = 0, 1$ и в вершине 1 имеет место метка 110 или 111. В первом случае $x_3 + x_4 = 180°$ $\Rightarrow P \in T_1$. Во втором случае функция S в области геометрического смысла не имеет нулей (таблица 7, II.5).

Пусть $\delta(c) = 2$, тогда на рисунке 31(d) $k = 2, 4$. Тогда метками вершины 1 могут быть лишь 124, 441. В первом случае $P \in T_4$, лемма 15. Второй случай в силу леммы 16(2) невозможен. Этим пункт 3 полностью исследован.



(a) (b) (c) (d)

Рис. 31

4.4. **Случай** $v_0 = v_2 = v_3 = 3$. Можно считать, что $v_1 = v_4 = 4$. Иначе $v_1 = 3$, и мы приходим к пункту 2; или $v_4 = 3$, и мы оказываемся в условиях пункта 1.

Пусть a и c — ребра, выходящие из вершин 3 и 0 соответственно, b — ребро, выходящее из вершины 4 и являющееся стороной плитки, смежной с P по стороне 04 (рис. 32(a)).

Далее поочередно рассматриваются 4 случая в зависимости от значений $\delta(a)$ и $\delta(b)$.

A. Пусть $\delta(a) = 1$, $\delta(b) = 1$ (рис. 32(a)).

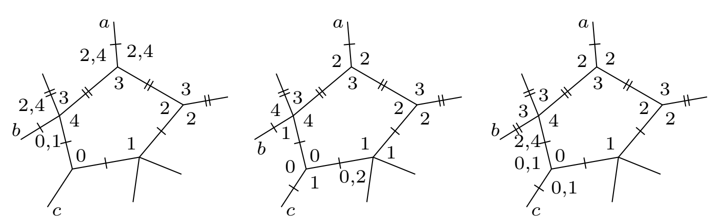
Можно считать, что в вершине 2 имеет место метка 223, иначе $P \in T_1$ (лемма 15). Тогда такая же метка и в вершине 3, иначе $P \in T_1$. Из лемм 15 и 16 следует, что в вершине 4 возможна лишь метка 1344. Легко видеть, что если 223, 1344 — метки, то $2x_0 + x_1 = 360°$, то есть имеет место метка 001.

В вершине 0, помимо указанной, возможны еще лишь следующие метки: 000, 220, 024. Для метки 000 получаем, что $x_0 = x_1 = 120°$. Из леммы 3 следует, что $x_2 = x_4$. Тогда наличие меток 223, 1344 означает, что $x_1 = 0$. Противоречие.

Для меток 220, 024 функция S имеет в области геометрического смысла по одному нулю (таблица 7, III.A.1, III.A.2), но в каждом из этих двух случаев нет подходящей метки длины четыре для вершины 1.

Пусть в вершине 0 имеет место метка 001. Тогда в вершине 1 имеет место одна из меток (рис. 32(b)): 1100, 1110, 1122, 1124. Для метки 1100 $x_1 = 0$. Для метки 1110 функция S в области геометрического смысла не имеет нулей (таблица 7, III.A.3). Для меток 1122, 1124 прямые вычисления показывают, что мы получаем наборы углов (4) и (5), указанных в формулировке нашей теоремы. Согласно таблице 7, III.A.4, III.A.5, в каждом из этих случаев имеется ровно по одному нулю функции S. В обоих случаях имеется по одной короне. Наборы меток для корон: (001, 1221, 223, 322, 4341), (001, 1241, 223, 322, 4341). Короны изображены на рисунках 43, 44. Этим полностью разобран случай **A**.

B. Пусть $\delta(a) = 1$, $\delta(b) = 2$. В вершинах 3 и 2 по-прежнему имеет место метка 223. Тогда в вершине 4 возможны лишь такие метки: 3344, 2433 (рис. 32(c)). Для метки 3344 $P \in T_1$. В случае метки 2433 обратимся к меткам вершины 0. Так как $\delta(c) = 1$, то метками этой вершины могут быть только 011, 001. Если имеет место метка 011, то $x_1 > 90°$. С другой стороны, в силу леммы 14 $x_1 \leqslant 90°$, противоречие.



(a) (b) (c)

Рис. 32

Для метки 001, таблица 7, III.B, функция S имеет единственный нуль, для которого однако нет подходящей метки для вершины 1. Этим случай **B** полностью разобран.

C. Пусть $\delta(a) = 2$, $\delta(b) = 1$ или $\delta(b) = 2$. Тогда $x_3 = 120°$. Метками вершины 2 могут быть лишь 240, 241, 220, 221. Если имеют место первые две метки, то $P \in T_4$, лемма 15. Далее поочередно рассмотрим случаи меток 220 и 221.

C.0. Пусть $220 \in \mathcal{M}$ для вершины 2. Если $\delta(c) = 1$, то метками вершины 0 могут быть только строки 000, 001, 110; если $\delta(c) = 2$, то 220, 440, 024.

Для меток 440, 024 $P \in T_4$; если $110 \in \mathcal{M}$, то $P \in T_1$, лемма 15.

Для метки 000 получается набор углов (3), указанный в условии теоремы. Мы получаем короны, изображенные на рисунке 42. Набор меток для корон: (000, 1144, 202, 333, 4411). Дополнительно заметим, что согласно таблице 7 III.C.1 в этом случае получается ровно один нуль функции S.

Для метки 001 в таблице 7 III.C.2 указан единственный нуль функции S. Там же указано, что нет дополнительных меток вершин 1 и 4.

Пусть вершина 0 имеет такую же метку 220, что и вершина 2. С учетом леммы 4 имеется три метки вершины 4, согласованные с метками 333 и 220 вершин 3 и 0 соответственно: 0144, 2411, 1144, рис. 33.

Для метки 0144 как это следует из таблицы 7, III.C.3 функция S не имеет нулей.

Для метки 2411 получается набор углов (6), указанный в условии теоремы. Мы получаем короны, изображенные на рисунках 45(a), 45(b). Наборы меток для корон: (022, 1111, 202, 333, 4211), (022, 1124, 202, 333, 4211). Отметим также, что согласно таблице 7 III.C.4 в этом случае функция S имеет ровно один нуль.

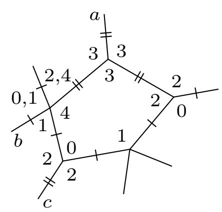


Рис. 33

Для метки 1144 вторично получается набор углов (3), указанный в условии теоремы.

Этим полностью исследован случай метки 220 в вершине 2.

C.1. Пусть $221 \in \mathcal{M}$ для вершины 2. Мы уже отмечали, что метками вершины 0 могут быть лишь строки 000, 001, 011, 022, 044, 024.

Как и выше метка 024 влечет $P \in T_4$, метка 001 влечет $P \in T_1$. Если имеет место метка 220, то $x_0 = x_1$. Тогда по лемме 3 $x_2 = x_4$. Отсюда следует с учетом метки 333, что $x_0 = x_1 = 60°$. Последнее противоречит лемме 12. Наличие метки 440 противоречит лемме 16(2).

Для метки 000 функция S имеет единственный нуль, для которого соответствующий пятиугольник лежит в T_1, таблица 7 III.C.5. Случай с меткой 110 уже встречался в пункте 2.A (см. таблицу 7, II.1).

Этим полностью исследован случай **C**, а значит пункт 4.

4.5. **Случай** $v_0 = v_1 = v_3 = 3$**.** Как и выше можно считать, что $v_2 = v_4 = 4$.

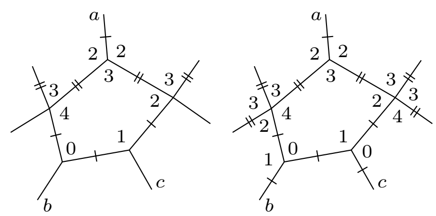
Пусть a, b, c — ребра, выходящие из вершин 3, 0, 1 соответственно.

A. Пусть $\delta(a) = 1$. Тогда в вершине 3 могут быть лишь следующие метки: 223, 443, 234. Для метки 234 $P \in T_1$, а метка 443 переходит в 223 при упоминавшейся уже симметрии. Поэтому можно считать, что $223 \in \mathcal{M}$ для вершины 3 (рис. 34(a)). Тогда $x_1 \leqslant 90°$, лемма 14.

Можно считать, что $2433 \in \mathcal{M}$ для вершины 2, так как любая другая метка вершины 2 либо содержит четыре различных символа, либо содержит 223, либо имеет вид 2233. В последнем случае $P \in T_1$, а первые два ведут к противоречию.

По похожей причине такая же метка 2433 должна быть и в вершине 4. Тогда $\delta(b) = 1$, $\delta(c) = 1$ (рис. 34(b)). Значит в вершине 0 или 1 обязательно есть метка 110. Тогда $x_1 > 90°$, что противоречит неравенству, указанному выше. Этим рассмотрение случая A закончено.

B. Пусть $\delta(a) = 2$. Пусть вначале $\delta(b) = 1$, $\delta(c) = 1$. Всевозможные метки вершины 0: 000, 001, 011; всевозможные метки вершины 1: 111, 110, 100. Если метки в этих вершинах различны, то $x_0 = x_1 = x_3 = 120°$ и $x_2 = x_4 = 90°$. Это — набор углов (1) из условия теоремы. Существуют 150 корон для такого



(a) (b)

Рис. 34

пятиугольника, некоторые из которых представлены на рисунках 39(a), 39(b), 40(a), 40(b).

Можно считать, следовательно, что метки вершин 0 и 1 одинаковы, а с учетом симметрии можно считать, что это — метка 001. Этой метке соответствует единственный вариант, представленный на рис. 35(a).

Рассмотрим метки вершины 4. Отбрасывая те, что очевидно невозможны, мы получим ровно шесть меток: 1144, 0144, 2411, 2444, 2244, 4444.

Для метки 1144 функция S имеет единственный нуль, таблица 7, IV.B.1, для которого нет подходящей метки для вершины 2.

Для метки 0144, функция S имеет единственный нуль, таблица 7, IV.B.2, для которого $P \in T_4$.

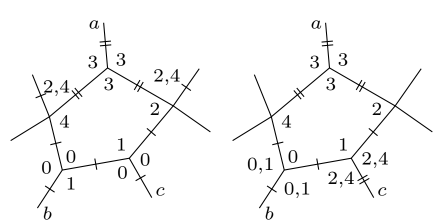
Для метки 2411 получается набор углов (2) из условия теоремы. Соответствующие короны изображены на рис. 41. Набор меток: (001, 100, 2114, 333, 4211). Функция S в этом случае имеет единственный нуль, таблица 7, IV.B.3.

Для метки 2444, функция S имеет два нуля, таблица 7, IV.B.4. Для одного из них $P \in T_4$. Для второго получается набор углов (1) из условия теоремы.

Если $2244 \in \mathcal{M}$, то $x_2 + x_4 = 180°$. Тогда, учитывая равенство $x_3 = 120°$, получаем $x_0 = x_1 = 120°$. Тогда по лемме 12 $x_2 = x_4$. В результате еще раз получается набор углов (1) из условия теоремы.

Для метки 4444 функция S не имеет нулей, таблица 7, IV.B.5.

Пусть теперь $\delta(b) = 1$, $\delta(c) = 2$, рис. 35(b). Если $124 \in \mathcal{M}$, то $P \in T_4$, лемма 15. Можно считать стало быть, что вершина 1 имеет метку 221 или 441.



(a) (b)

Рис. 35

Если имеется еще $001 \in \mathcal{M}$, то в силу леммы 15 $P \in T_1$. Следовательно для метки 221 можно считать, что в вершине 0 имеется метка 110. Такой набор меток нам уже встречался в пункте 2.A (см. также таблицу 7, II.1). Для метки

441 можно считать, что в вершине 0 имеет место метка 000. В результате мы получаем набор меток, симметричный рассмотренному в пункте 2.B (см. также таблицу 7, II.5).

Случай $\delta(b) = 2$, $\delta(c) = 1$ симметричен только что рассмотренному. Этим завершается пункт 5.

4.6. **Случай $v_0 = v_1 = v_2 = v_3 = 3$.** Пусть a, b, c, d — ребра, выходящие из вершин 2, 4, 0, 1, соответственно. В силу симметрии достаточно рассмотреть два различных случая: 1) $\delta(a) = 1$, $\delta(b) = 1$; 2) $\delta(a) = 2$.

Если $\delta(a) = 2$, то $P \in T_1$ в силу леммы 17. Пусть $\delta(a) = 1$ и $\delta(b) = 1$ (рис. 36(a)). Тогда в вершине 2 возможны лишь следующие метки: 220, 221, 240, 241. Заменой $0 \leftrightarrow 1$, $2 \leftrightarrow 4$ из этих меток получаются всевозможные метки для вершины 4: 441, 440, 421, 420.

С учетом указанной замены могут представиться лишь следующие два случая: 1) метки вершин 2 и 4 содержат 0; 2) метка вершины 2 содержит 1, а метка вершины 4 — 0. В каждом из этих двух случаев имеется три варианта в зависимости от типов ребер c и d:

1)$\delta(c) = 1$, $\delta(d) = 1$; 2)$\delta(c) = 2$, $\delta(d) = 1$; 3)$\delta(c) = 1$, $\delta(d) = 2$.

Отметим, что оба ребра c и d не могут быть одновременно второго типа. В каждом из перечисленных шести случаев имеется восемь различных наборов из четырех меток для вершин 2, 4, 0, 1. Все эти наборы меток можно усмотреть из рисунков 36(a), 36(b), 36(c), где на первых двух рисунках $i = 0$, $j = 1$ или $i = 1$, $j = 0$; на третьем — $i = 2$, $j = 1$ или $i = 4$, $j = 0$.

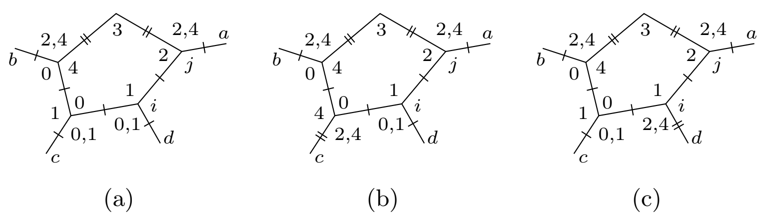


Рис. 36

Все 48 наборов приведены в следующих шести таблицах. Полужирным шрифтом выделены те метки, которые позволяют заключить на основании леммы 15 к какому типу относится пятиугольник. Тип указан в последнем столбце каждой таблицы.

2	4	0	1	T_i
022	**044**	100	**111**	T_4
022	044	**011**	011	T_1
022	**024**	100	**111**	T_4
022	024	**011**	011	T_1
024	044	100	**111**	T_4
024	**044**	**011**	011	T_1
024	024	100	**111**	T_4
024	024	**011**	011	T_5

2	4	0	1	T_i
022	044	**044**	**011**	T_1
022	044	**024**	**111**	T_4
022	024	**044**	**011**	T_1
022	024	**024**	**111**	T_4
024	044	**044**	**011**	T_1
024	044	**024**	**111**	T_4
024	024	**044**	**011**	T_1
024	024	**024**	**111**	T_4

2	4	0	1	T_i
022	044	**100**	**144**	T_1
022	**044**	**011**	124	T_1
022	024	**100**	**144**	T_1
022	024	**011**	124	T_1
024	044	**100**	**144**	T_1
024	**044**	**011**	124	T_1
024	024	**100**	**144**	T_1
024	**024**	**011**	124	T_5

2	4	0	1	T_i
122	044	**100**	011	T_1
122	044	011	**100**	T_1
122	024	**100**	011	T_1
122	024	011	**100**	T_1
124	**044**	100	**011**	T_1
124	**044**	**011**	100	T_1
124	**024**	**100**	**011**	T_4
124	**024**	**011**	100	T_5

2	4	0	1	T_i
122	**044**	024	**011**	T_1
122	044	044	**100**	T_1
122	**024**	024	**011**	T_5
122	024	044	**100**	T_1
124	**044**	024	**011**	T_1
124	044	044	**100**	T_5
124	024	**024**	**011**	T_4
124	024	044	**100**	T_5

2	4	0	1	T_i
122	044	**100**	124	T_1
122	**044**	**011**	122	T_1
122	024	**100**	124	T_1
122	**024**	**011**	122	T_5
124	044	**100**	124	T_5
124	**044**	**011**	122	T_1
124	024	**100**	**124**	T_5
124	**024**	**011**	122	T_5

Этим рассмотрение пункта 6 завершается.

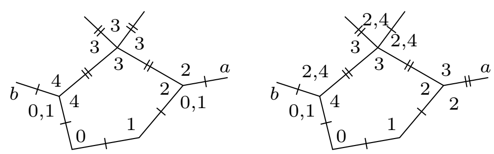
4.7. **Случай $v_1 = v_3 = 4$.** Пусть a, b — ребра, выходящие из вершин 2, 4, соответственно.

A. Пусть $\delta(a) = 1$ и $\delta(b) = 1$ (рис. 37(a)). Тогда $x_3 = 90°$.

Если $024 \in \mathcal{M}$ или $124 \in \mathcal{M}$, то $P \in T_3$, лемма 15. Можно считать стало быть, что в вершине 2 имеют место метки: 220 или 221; в вершине 4: 440 или 441.

Имеется четыре различных комбинации этих меток. Если 220, 440 или 221, 441 являются метками, то $P \in T_3$, лемма 15. Если $220, 441 \in \mathcal{M}$ или 221, $440 \in \mathcal{M}$, то $P \in T_1$, лемма 15.

B. Пусть $\delta(a) = 2$ (рис. 37(b)). Можно считать, что в вершине 2 имеет место метка 223, а в вершине 3 — метка 2433, иначе $P \in T_1$. Далее, если $\delta(b) = 2$, то $P \in T_1$ по лемме 17. Можно считать стало быть, что $\delta(b) = 1$.



(a) (b)

Рис. 37

Тогда в вершине 4 может быть лишь одна из следующих меток: 024, 124, 440, 441. Для меток 024 и 124 получается $P \in T_5$, лемма 15. Для метки 440 функция S, таблица 7, VI.1, не имеет нулей. Для метки 441 функция S, таблица 7, VI.2, имеет единственный нуль, однако среди дополнительных меток нет метки длины три, содержащей 0. Этим исчерпан пункт 7.

4.8. **Случай $v_2 = v_3 = 4$.** Пусть a — ребро, выходящее из вершин 4, b — ребро, выходящее из вершины 2, изображенное на (рис. 38(a)).

A. Пусть $\delta(a) = \delta(b) = 1$. Тогда $x_3 = 90°$.

Вершина 4 может иметь метки: 024, 124, 440, 441 (рис. 38(a)). Если имеет место первая или вторая метка, то $P \in T_3$, лемма 15. Поэтому можно считать, что в вершине 4 одна из двух оставшихся меток. Считая, что вершины 0 и 1 также не имеют меток 024, 124, выпишем всевозможные наборы трех меток вершин 4, 0, 1. Всего таких наборов имеется 16. Они приведены в следующих двух таблицах.

4	0	1	T_i
440	001	111	T_1
440	001	**110**	T_1
440	**001**	**441**	T_1
440	**110**	110	T_1
440	**110**	001	T_1
440	**110**	221	T_1
440	440	**110**	T_1
440	440	001	?

4	0	1	T_i
441	**001**	001	T_1
441	**001**	110	T_1
441	**001**	221	T_1
441	000	110	T_1
441	000	111	T_1
441	000	441	?
441	**220**	**110**	T_1
441	**220**	111	T_1

Полужирным шрифтом выделены те метки, которые позволяют заключить на основании леммы 15 к какому типу относится пятиугольник. Тип указан в последнем столбце каждой таблицы. В трех случаях тип указан, шрифт не выделен. В этих случаях сначала выводим, что $x_0 = x_1$, а затем применяем лемму 15. Отметим, что единственное место, где используется тот факт, что $x_3 = 90^\circ$, это последний набор меток второй таблицы.

Рассмотрим два случая, где в последнем столбце стоят вопросительные знаки. Если имеют место метки 440, 001, 3333 или 441, 000, 3333, то функция S не имеет нулей, таблица 7, VII.1, VII.2. Следовательно пятиугольников с такими наборами меток не существует.

B. Пусть $\delta(a) = 1, \delta(b) = 2$ (рис. 38(b)). Можно считать, что меткой вершины 3 является строка 2433, иначе $P \in T_1$. Если дополнительно в какой-то вершине имеет место метка 024 или 124, то $P \in T_5$, лемма 15. Вершина 4 может иметь лишь метки: 024, 124, 440, 441. Ввиду сказанного можно ограничиться только двумя последними метками. Всевозможные наборы трех меток вершин 4, 0, 1 тогда точно такие же, что и в предыдущем случае. Поэтому, а также в силу замечания там сделанного, осталось изучить случаи, содержащие в последнем столбце таблиц вопросительные знаки и набор меток из последней строки второй таблицы (в предыдущем случае в этом месте использовался тот факт, что $x_3 = 90^\circ$).

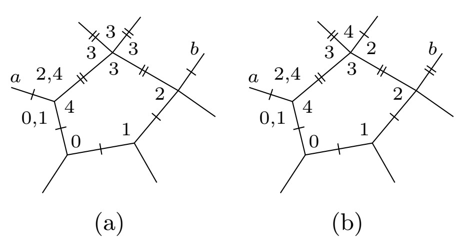


Рис. 38

Если имеет место набор меток 440, 001, 2433, то функция S не имеет нулей, таблица 7, VII.3. Для набора меток 441, 000, 2433 функция S имеет единственный нуль, таблица 7, VII.4, соответствующие углы в этом случае таковы, что $P \in T_1$.

Если имеет место набор меток 441, 220, 111, 2433, то соответствующая ему система линейных уравнений имеет единственное решение, для которого $x_4 = 120^\circ$, $x_3 = 60^\circ \Rightarrow x_3 + x_4 = 180^\circ \Rightarrow P \in T_1$.

Если $\delta(a) = 2$, то по лемме 17 $P \in T_1$. Этим пункт 8 завершается, и завершается доказательство теоремы 5.

Таблица 7. Решения S-систем для $\delta(P) = 11122$

Номер	Заданные метки	ОГС	Общее решение СЛУ, решение S-системы					Тип	Дополнительные метки
			x_0	x_1	x_2	x_3	x_4		
II.1	110, 221, 333	(5, 50)	$200-4t$	$80+2t$	$140-t$	120	$3t$		Нет нулей
II.2	0001, 221, 333	(90, 120)	$-120+2t$	$720-6t$	$-180+3t$	120	t		
			97.03	68.91	145.54	120	108.51		нет меток с углом 4
II.3	0111, 221, 333	(6, 36)	$216-6t$	$48+2t$	$156-t$	120	$5t$		Нет нулей
II.4	0144, 221, 333	(30, 120)	120	$240-2t$	$60+t$	120	t		
			120	60	150	120	90	T_1	
II.5	111, 220, 333	(30, 120)	$240-2t$	120	$60+t$	120	t		Нет нулей
III.A.1	220, 223, 1344	(45, 90)	$2t$	$360-4t$	$180-t$	$2t$	t		
			141.33	77.34	109.33	141.33	70.67		2244, 14444, 133, 0144, 013, 001
III.A2	024, 223, 1344	(0, 90)	$90+t$	$180-2t$	$180-t$	$2t$	90		
			141.33	77.34	128.67	102.66	90		4444, 1133, 001
III.A.3	1110, 223, 1344	(54, 144)	144	72	$36+t$	$288-2t$	t		Нет нулей
III.A.4	1122, 223, 1344	(15, 60)	$120+t$	$120-2t$	$60+2t$	$240-4t$	$3t$		
			141.33	77.34	102.66	154.67	64		11144, 034, 0114, 001
III.A.5	1124, 223, 1344	(6, 36)	$108+2t$	$144-4t$	$72+3t$	$216-6t$	$5t$		
			141.33	77.34	122	116	83.33		001
III.B	001, 223, 2433	(15, 60)	$60+2t$	$240-4t$	$120+t$	$120-2t$	$3t$		
			141.33	77.34	160.67	38.67	122		33344, 1344, 124, 0033
III.C.1	000, 220, 333	(0, 180)	120	$180-t$	120	120	t		
			120	84.74	120	120	95.26		222, 1144
III.C.2	001, 220, 333	(5, 50)	$80+2t$	$200-4t$	$140-t$	120	$3t$		
			136.13	87.74	111.94	120	84.19		нет меток с углами 1 и 4
III.C.3	220, 333, 0144	(30, 120)	$240-2t$	120	$60+t$	120	t		Нет нулей
III.C.4	220, 333, 2411	(10, 60)	$200-2t$	$140-2t$	$80+t$	120	$3t$		
			150	90	105	120	75		2244, 1344, 1111, 013
III.C.5	000, 221, 333	(30, 120)	120	$240-2t$	$60+t$	120	t		
			120	60	150	120	90	T_1	
IV.B.1	001, 333, 1144	(0, 90)	$90+t$	$180-2t$	$150-t$	120	$2t$		
			132.85	94.3	107.15	120	85.7		023
IV.B.2	001, 333, 0144	(45, 90)	$2t$	$360-4t$	$60+t$	120	t		
			150	60	135	120	75	T_4	
IV.B.3	001, 333, 2411	(20, 180)	140	80	$200-t$	120	t		
			140	80	117.88	120	82.12		1113
IV.B.4	001, 333, 2444	(60, 105)	$300-2t$	$-240+4t$	$360-3t$	120	t		
			150	60	135	120	75	T_4	
			120	120	90	120	90		4444, 2222, 111, 000
IV.B.5	001, 333, 4444	(60, 150)	$30+t$	$300-2t$	t	120	90		
			120	120	90	120	90		2222, 111, 000
VI.1	223, 2433, 440	(30, 60)	$360-6t$	$-60+4t$	$120+t$	$120-2t$	$3t$		Нет нулей
VI.2	223, 2433, 441	(30, 60)	$-60+4t$	$360-6t$	$120+t$	$120-2t$	$3t$		
			124.42	83.38	166.1	27.79	138.31		33344, 003333, 0013
VII.1	001, 3333, 440	(90, 135)	$360-2t$	$-360+4t$	$450-3t$	90	t		Нет нулей
VII.2	000, 3333, 441	(90, 180)	120	$360-2t$	$-30+t$	90	t		Нет нулей
VII.3	001, 2433, 440	(108, 135)	$360-2t$	$-360+4t$	$720-5t$	$-180+2t$	t		
			120	120	120	60	120	T_1	
VII.4	000, 2433, 441	(90, 140)	120	$360-2t$	$-240+3t$	$300-2t$	t		

Таблица 7. Продолжение

Номер	Заданные метки	ОГС	Общее решение СЛУ, решение S-системы					Тип	Дополнительные метки
			x_0	x_1	x_2	x_3	x_4		
			120	120	120	60	120	T_1	

4.9. **Продолжение корон до мозаик.**

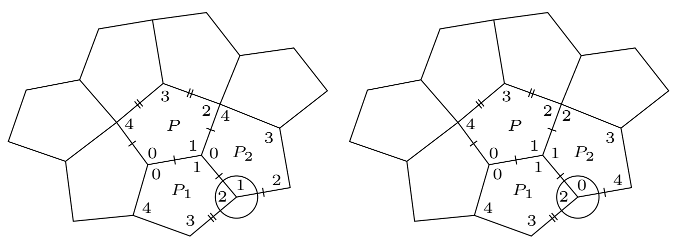
Теорема 6. *Пятиугольники, имеющие один из шести наборов углов, перечисленных в теореме* 5, *имеют короны, но ни одна из таких корон не может быть продолжена до мозаики.*

Доказательство. Далее рассматриваются 6 пунктов в соответствии с наборами углов, перечисленных в теореме 5. Во многих случаях пятиугольник может иметь несколько корон, но на соответствующих рисунках обычно приведена одна из корон. Количество возможных корон и пояснения к рисункам приведены в тексте.

1. Углы пятиугольника:

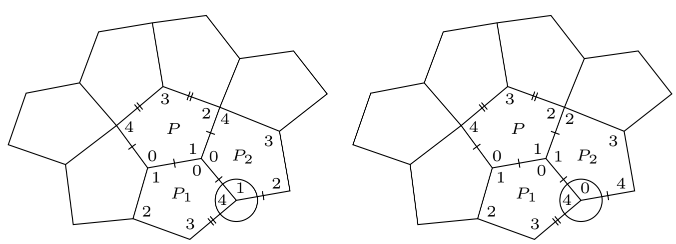
$$x_0 = x_1 = x_3 = 120°, x_2 = x_4 = 90°.$$

Пятиугольник P с такими углами имеет ровно 150 корон. Однако имеется лишь четыре различных варианта расположения пятиугольников P_1 и P_2, смежных с P по сторонам 01 и 12 соответственно (рис. 39(a), 39(b), 40(a), 40(b)).



(a) (b)

Рис. 39



(a) (b)

Рис. 40

Во всех четырех случаях препятствием для продолжения замощения плоскости служит вершина, обведенная на рисунках кружочком. В указанных вершинах возможны метки вида: $12i_1 \ldots i_k$, $02i_1 \ldots i_k$, $14i_1 \ldots i_k$, $04i_1 \ldots i_k$, $k = 1, 2 \ldots$. Но пятиугольник P имеет только метки: 333, 111, 110, 100, 000, $xxxx$, где $x = 2$ или $x = 4$.

2. Углы пятиугольника:

$$x_0 = 140°, x_1 = 80°, x_2 \approx 117,88°, x_3 = 120°, x_4 \approx 82,12°.$$

Пятиугольник P с такими углами имеет четыре короны (рис. 41). В вершинах 2 и 4 одна из смежных плиток может занимать два положения. Во всех случаях препятствием для продолжения замощения плоскости служит вершина, обведенная на рисунке кружочком.

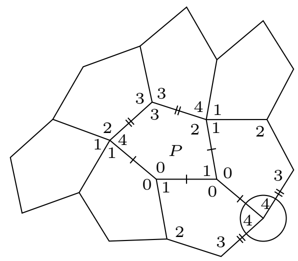


Рис. 41

В указанной вершине возможны лишь метки вида $44i_1 \dots i_k$, $k = 1, 2 \dots$. Все возможные метки для этого пятиугольника приведены в таблице 7, IV.B.3. Среди меток, указанных в таблице, меток такого вида нет.

3. Углы пятиугольника:

$$x_0 = 120^\circ, x_1 \approx 84,74^\circ, x_2 = 120^\circ, x_3 = 120^\circ, x_4 \approx 95,26^\circ.$$

Пятиугольник P с такими углами имеет шесть корон. Пятиугольники P_1 и P_2, смежные с P по сторонам 23 и 34 соответственно могут быть расположены во всех коронах только одним способом (рис. 42). Символы k, l, m, n, p меток вершин 0 и 1 на рисунке принимают значения: $k = 0, l = 0, m = 1, n = 4, p = 4$, или $k = 0, l = 0, m = 4, n = 4, p = 1$, или $k = 2, l = 2, m = 1, n = 4, p = 4$. В вершине 4 одна из смежных плиток может занимать два положения.

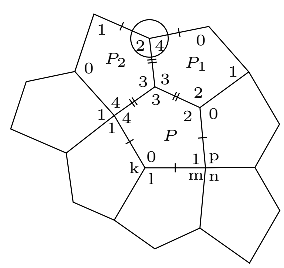


Рис. 42

Во всех случаях препятствием для продолжения замощения плоскости служит вершина, обведенная на рисунке кружочком. В указанной вершине возможны метки вида $24i_1 \dots i_k$, $k = 1, 2 \dots$. Все возможные метки для этого пятиугольника приведены в таблице 7, III.C.1. Среди меток, указанных в таблице, меток такого вида нет.

4. Углы пятиугольника:

$$x_0 \approx 141,33^\circ, x_1 \approx 77,34^\circ, x_2 \approx 102,66^\circ, x_3 \approx 154,67^\circ, x_4 \approx 64^\circ.$$

Пятиугольник P имеет одну корону (рис. 43). Препятствием для продолжения замощения плоскости служит вершина, обведенная на рисунке кружочком.

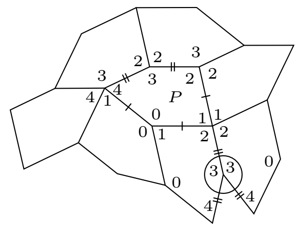


Рис. 43

В указанной вершине возможны метки вида $33i_1 \dots i_k$, $k = 1, 2 \dots$. Все возможные метки для этого пятиугольника приведены в таблице 7, III.A.4. Среди меток, указанных в таблице, меток такого вида нет.

5. Углы пятиугольника:

$$x_0 \approx 141,33^\circ, x_1 \approx 77,34^\circ, x_2 \approx 122^\circ, x_3 \approx 116^\circ, x_4 \approx 83,33^\circ.$$

Пятиугольник P имеет одну корону (рис. 44). Препятствием для продолжения замощения плоскости служит вершина, обведенная на рисунке кружочком.

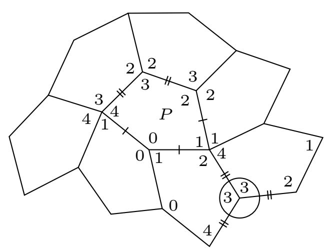


Рис. 44

В указанной вершине возможны метки вида $33i_1 \dots i_k$, $k = 1, 2 \dots$. Все возможные метки для этого пятиугольника приведены в таблице 7, III.A.5. Среди меток, указанных в таблице, меток такого вида нет.

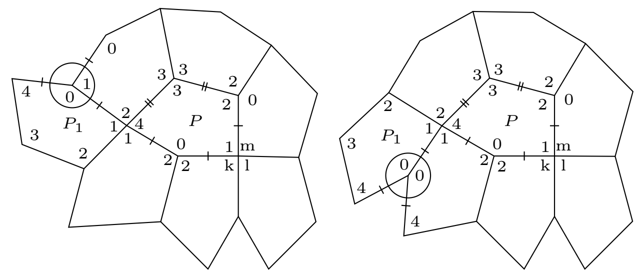
6. Углы пятиугольника:

$$x_0 = 150^\circ, x_1 = 90^\circ, x_2 = 105^\circ, x_3 = 120^\circ, x_4 = 75^\circ.$$

Пятиугольник P с такими углами имеет шесть корон. Пятиугольник P_1, смежный с P по вершине 4 может быть расположен во всех коронах двумя способами (рис. 45(a), рис. 45(b)). Символы k, l, m меток вершины 1 на рисунке принимают значения: $k = 1, l = 1, m = 1$ или $k = 1, l = 2, m = 4$. Если $l = 1$, плитка с этим углом может занимать два положения.

Препятствием для продолжения замощения плоскости служат вершины, обведенные на рисунках кружочком. В указанной вершине на рисунке 45(a) возможны метки вида $01i_1 \dots i_k$, $k = 1, 2 \dots$, а на рисунке 45(b) — метки вида $00i_1 \dots i_k$, $k = 1, 2 \dots$. При этом, в обоих случаях по крайней мере одно из чисел $i_1, \dots i_k$ обязательно принадлежит множеству $\{0, 1, 2, 4\}$. Все возможные метки для этого пятиугольника приведены в таблице 7, III.C.4. Среди меток, указанных в таблице, меток такого вида нет.

Этим доказано, что во всех случаях корона не может быть продолжена до мозаики.



(a) (b)

Рис. 45

Автор благодарен рецензенту за внимательное отношение к работе и целый ряд ценных замечаний и исправлений, которые были учтены при переработке первоначальной версии статьи.

Список литературы

[1] Багина О.Г. *Мозаики из выпуклых пятиугольников*, Вестник КемГУ, **4(48)** (2011), 63–73.
[2] Bagina O. *Tiling the Plane with Congruent Equilateral Convex Pentagons*, J. Combin. Theory. Ser. A, **105, 2** (2004), 221–232. MR2046081
[3] Schattschneider D. *Tiling the Plane with Congruent Pentagons* Math. Magazine, **51** (1978), 29–44. MR0493766
[4] Sugimoto T., Ogawa T. *Systematic Study of Convex Pentagonal Tilings, I: Case of Convex Pentagons with Four Equal-length Edges*, Forma. **20** (2005), 1–18. MR2240616
[5] *A new pentagon tiler*, Mathematics Magazine, **58** (1985), 308.

Ольга Георгиевна Багина
Кемеровский государственный университет,
ул. Красная, 6,
650043, Кемерово, Россия
E-mail address: ogbag@mail.ru