S⓪MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 9, стр. 561–567 (2012)

УДК 517.58

MSC 13A99

НОВЫЕ КЛАССЫ ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ ОБЫКНОВЕННОМУ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ m-ГО ПОРЯДКА

М.Д. ХРИПТУН

Abstract. For generalized Bessel functions which satisfy the ordinary differential equation of the m-order of special type new classes of generating functions (associated with Stirling numbers of the second kind) are derived.

Relevant connections of this new formulas with those given in earlier works on the subject are also indicated.

Keywords: generalized Bessel functions, generating functions, Stirling numbers.

1. Введение

Различные классические специальные функции (например, функции Лежандра, Бесселя, гипергеометрические и другие), удовлетворяющие обыкновенным дифференциальным уравнениям второго порядка, являются решениями многих важных задач математической физики и техники.

Найдены многие обобщения этих функций, которые удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям более высоких порядков и применяются в сложнейших задачах (например, в статистических распределениях, в инженерных вычислениях (теория сигналов), в теории массового обслуживания и др.) (см., например, [1,2]).

Khriptun M.D., New classes of generating functions for generalized Bessel functions with satisfy the ordinary differential equation of the m-order.

Поступила 16 февраля 2012 г., опубликована 1 декабря 2012 г.

Определение 1. *Следуя работе* [3] (*стр.* 90), *мы обозначим через* $S(n,k)$ *числа Стирлинга второго рода*

$$S(n,k) := \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}j^n, \tag{1}$$

так что

$$S(n,0) = \begin{cases} 1 & (n=0) \\ 0 & \big(n \in \mathbb{N} := \{1,2,3,\ldots\}\big) \end{cases} \tag{2}$$

и

$$S(n,1) = S(n,n) = 1 \quad \text{и} \quad S(n,n-1) = \binom{n}{2}.$$

Определение 2. *Функция* $F(x,t)$ *называется производящей для последовательности функций* $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, *если ее разложение по степеням* t *имеет вид:*

$$F(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\varphi_k(x)t^k,$$

где α_k *— числа, действительные или комплексные.*

В практических задачах появляются производящие функции более сложного вида (например, см. [4], с. 755, уравнение (1)):

$$\sum_{k=0}^{\infty}A_{n,k}\varphi_{n+k}(x)t^k = f(x,t)\big\{g(x,t)\big\}^{-n}\varphi_n\big[h(x,t)\big] \tag{3}$$
$$\big(n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N}\cup\{0\};\ \mathbb{N} := \{1,2,3,\ldots\}\big),$$

где коэффициенты $A_{n,k}$ являются постоянными, действительными или комплексными, и f, g, h — функции от x и t.

Используя широко применяемый специальный случай (3), когда

$$A_{n,k} = \binom{n+k}{k} = \frac{(n+k)!}{n!k!} \qquad (n,k \in \mathbb{N}_0), \tag{4}$$

была доказана теорема (см. [5]), в которой найден основной результат для производящих функций, связанный с числами Стирлинга второго рода $S(n,k)$ и показано, как этот результат можно применять для получения аналогичных производящих функций для различных вариантов специальных функций и полиномов. Также показана связь для некоторых из этих совокупностей производящих функций с различными известными результатами.

Теорема 1 (Srivastava [5], с. 754, теорема 1)**.** *Пусть последовательность* $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *имеет производящую функцию вида*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\varphi_{n+k}(x)t^k = f(x,t)\big\{g(x,t)\big\}^{-n}\varphi_n\big[h(x,t)\big] \qquad (n \in \mathbb{N}_0), \tag{5}$$

где f, g *и* h *— функции от* x *и* t. *Тогда, в терминах чисел Стирлинга* $S(n,k)$, *имеет место следующий класс производящих функций:*

$$\sum_{k=0}^{\infty}k^n\varphi_k\big[h(x,-z)\big]\left[\frac{z}{g(x,-z)}\right]^k = \big[f(x,-z)\big]^{-1}\sum_{k=0}^{n}S(n,k)\varphi_k(x)z^k \quad (n \in \mathbb{N}_0), \tag{6}$$

если каждый член (6) *существует.*

Цель настоящей работы состоит в применении теоремы 1 для вывода новых классов производящих функций для одного обобщения функций Бесселя и показать их связь с ранее выведенными формулами производящих функций для этого обобщения функций Бесселя.

2. Обобщенные функции Бесселя

Известно, что производящие функции для различных классических специальных функций и полиномов широко применяются для решений соответствующих дифференциальных уравнений в частных производных.

Мы рассмотрим две теоремы о совокупности производящих функций для одного обобщения функции Бесселя вида:

$$U_\nu^{(m)}(z) = U_\nu(z,m) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/m)^{\nu+mk}}{k!\Gamma[(m-1)k+\nu+1]}, \tag{7}$$

являющегося одним из неособых решений обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\left[(m-1)\frac{d}{dz}+\frac{\nu+1}{z}\right]\left[(m-1)\frac{d}{dz}+\frac{\nu+2}{z}\right]\cdots\left[(m-1)\frac{d}{dz}+\frac{\nu+m-1}{z}\right]\times$$
$$\times\left(\frac{d}{dz}-\frac{\nu}{z}\right)U_\nu(z,m) = U_\nu(z,m),$$

где $\nu=\nu_m=-(m-1)p$, $\Gamma(t)$ — гамма-функция Эйлера, p — комплексный параметр, z — комплексная переменная (при $m=2$ функция (7) является модифицированной функцией Бесселя $I_\nu(z)=U_\nu(z,2)$ и уравнение становится уравнением Бесселя). (См. [6], с. 287, формулы (3) и (1).)

Замечание 1. Обобщенные функции Бесселя, удовлетворяющие обыкновенным дифференциальным уравнениям порядка $m>2$, находят приложения в операционном исчислении, в теории чисел, в теории массового обслуживания, в сложных задачах математической физики и других исследованиях.[1]

Нам известна производящая функция для функции (7) типа первой формулы Ломмеля (см. [6], с. 291, формула (24)):

$$(z+h)^{-\nu/m}U_\nu^{(m)}\left[(z+h)^{1/m}\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(h/m)^k}{k!}\, z^{-[\nu+k(m-1)]/m}U_{\nu+(m-1)k}^{(m)}(z^{1/m}), \tag{8}$$

где l заменили на k и $\nu_m=-(m-1)p=\nu$.

Для того чтобы использовать теорему 1 надо формулу (8) записать в таком виде, чтобы было удобно сравнивать с формулой (5).

Сначала запишем ее так:

$$(z+h)^{-\nu/m}z^{\nu/m}U_\nu^{(m)}\left[(z+h)^{1/m}\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{h}{mz^{(m-1)/m}}\right)^k\frac{1}{k!}\,U_{\nu+(m-1)k}^{(m)}(z^{1/m}).$$

---

[1]Функции (7) при целом индексе ν применяются при решении одноканального уравнения теории массового обслуживания (см. [7,8,9]).

Далее обозначим $z^{1/m} = x$, отсюда $z = x^m$ и выражение $\dfrac{h}{mz^{(m-1)/m}} = \dfrac{h}{mx^{m-1}}$ обозначим через t, тогда $h = mtx^{m-1}$. Затем вычислим выражение

$$\left(\frac{z}{z+h}\right)^{\nu/m} = \left(\frac{x^m}{x^m + mtx^{m-1}}\right)^{\nu/m} = \left(1 + \frac{mt}{x}\right)^{-\nu/m}.$$

После этих вычислений формулу (8) запишем в виде:

$$\text{(9)} \quad \left(1 + \frac{mt}{x}\right)^{-\nu/m} U_\nu^{(m)}\big[(x^m + mtx^{m-1})^{1/m}\big] = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} U^{(m)}_{\nu+(m-1)k}(x) \quad \Big(|t| < \frac{|x|}{m};\ \nu \in \mathbb{C}\Big).$$

Если дальше взять в формуле (9) вместо $\nu \sim \nu + n$ ($n \in \mathbb{N}_0$), использовать теорему 1 и, взяв последовательность

$$\varphi_n(x) = \frac{\tau_n(x)}{n!},$$

можем сопоставить последовательность (5) с формулой (9). Очевидно будем иметь:

$$f(x,t) = \left(1 + \frac{mt}{x}\right)^{-\nu/m}; \ \ g(x,t) = \left(1 + \frac{mt}{x}\right)^{1/m}; \ \ h(x,t) = (x^m + mtx^{m-1})^{1/m}$$

и роль $\tau_k(x)$ будет играть функция $U^{(m)}_{\nu+(m-1)k}(x)$ ($\nu \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}_0$).

Таким образом, мы получаем по теореме 1 класс производящих функций для $U_\nu^{(m)}(z)$:

$$\text{(10)} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!} U^{(m)}_{\nu+(m-1)k}\big[(x^m - mzx^{m-1})^{1/m}\big] \left(\frac{z}{(1 - mz/x)^{1/m}}\right)^k = \\ = \left(1 - \frac{mz}{x}\right)^{\nu/m} \sum_{k=0}^{n} S(n,k) U^{(m)}_{\nu+(m-1)k}(x) z^k \qquad \Big(\nu \in \mathbb{C};\ |z| < \frac{|x|}{m};\ n \in \mathbb{N}_0\Big).$$

Из выше изложенных утверждений, обозначений и вычислений, после замечания 1, следует

Теорема 2. *Для обобщенных функций Бесселя* (7) *имеет место следующий класс производящих функций:*

$$\text{(11)} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!} U^{(m)}_{\nu+(m-1)k}(x) z^k = \left(1 + \frac{mz}{x^{m-1}}\right)^{-\nu/m} \times \\ \times \sum_{k=0}^{n} S(n,k) U^{(m)}_{\nu+(m-1)k}\big[(x^m + mzx)^{1/m}\big] \left[\frac{z}{(1 + mz/x^{m-1})^{1/m}}\right]^k \\ \Big(\nu \in \mathbb{C};\ |z| < \frac{|x|^{m-1}}{m};\ n \in \mathbb{N}_0\Big),$$

если каждый член формулы (11) *существует.*

Доказательство. Нам достаточно привести формулу (10) к виду (11) положим в нее $z = \dfrac{XZ}{x^{m-1}}$, тогда $x^m - mzx^{m-1} = x^m - mXZ$, а затем пусть $x = \sqrt[m]{X^m + mXZ}$, отсюда $x^m = X^m + mXZ$ и выражение $(x^m - mzx^{m-1})^{1/m} = X$.

При этих подстановках вычислим еще выражения:

$$\text{I).} \quad \left[\frac{z}{(1-mz/x)^{1/m}}\right]^k = \frac{Z^k}{x^{(m-2)k}};$$

$$\text{II).} \quad \left(1 - \frac{mz}{x}\right)^{\nu/m} = \left(1 + \frac{mZ}{X^{m-1}}\right)^{-\nu/m};$$

$$\text{III).} \quad z^k = \frac{Z^k}{x^{(m-2)k}} \left[\frac{1}{(1+mZ/X^{m-1})^{1/m}}\right]^k.$$

Если теперь еще обозначим $Z/x^{m-2} = T$, а затем снова положим вместо $X \sim x$, вместо $T \sim t$ и заменим его на z, то получим из формулы (10) формулу (11). Теорема доказана. □

Замечание 2. Формула (11) при $n = 0$, с учетом условия (2), переходит в формулу (9) при $z/x^{m-2} = t$, откуда $z = tx^{m-2}$. Переписывая ее, имеем:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!} U^{(m)}_{\nu+(m-1)k}(x) t^k =$$
$$= \left(1 + \frac{mt}{x}\right)^{-\nu/m} \sum_{k=0}^{n} S(n,k) U^{(m)}_{\nu+(m-1)k}\left[(x^m + mtx^{m-1})^{1/m}\right] \left[\frac{z}{(1+mt/x)^{1/m}}\right]^k,$$

где $\nu \in \mathbb{C}$; $|t| < |x|/m$; $n \in \mathbb{N}_0$. Эта формула при $n = 0$ и $m = 2$ переходит в классическую производящую функцию для функций Бесселя, т.е. в первую формулу Ломмеля (см. [10], с. 140).

Нам также известна производящая функция для функции (7) типа второй формулы Ломмеля для функций Бесселя вида:

$$(12) \qquad (x^m + h)^{\nu/m} U^{(m)}_{\nu}\left[(x^m + h)^{(m-1)/m}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(h/m)^k}{k!} x^{\nu-k} U^{(m)}_{\nu-k}(x^{m-1}),$$

(см. [6], с. 291, формула (25), которая приводится к виду (12) соответствующими подстановками и заменой переменных). Как и в теореме 2, приводим ее к виду удобному для сравнения с формулой (5).

Записываем (12) в виде:

$$(x^m + h)^{\nu/m} x^{-\nu} U^{(m)}_{\nu}\left[(x^m + h)^{(m-1)/m}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{h}{mx}\right)^k \frac{1}{k!} U^{(m)}_{\nu-k}(x^{m-1}).$$

Далее обозначаем $h/(mx) = t$, откуда $h = mtx$. Затем вычисляем

$$\frac{(x^m + h)^{\nu/m}}{x^\nu} = \left(\frac{x^m + h}{x^m}\right)^{\nu/m} = \left(\frac{x^m + mtx}{x^m}\right)^{\nu/m} = \left(1 + \frac{mt}{x^{m-1}}\right)^{\nu/m}.$$

После этих вычислений запишем формулу (12) так:

$$(13)\qquad \left(1+\frac{mt}{x^{m-1}}\right)^{\nu/m} U_\nu^{(m)}\big[(x^m+mtx)^{(m-1)/m}\big]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\,U_{\nu-k}^{(m)}(x^{m-1})$$
$$\left(\nu\in\mathbb{C};\ |t|<\frac{|x|^{m-1}}{m}\right).$$

Далее, как и раньше, в формуле (13) заменяем ν на $\nu+n$ ($n\in\mathbb{N}_0$), используем теорему 1 при замене $\varphi_n(x)=\dfrac{\tau_n(x)}{n!}$ и, сравнивая с формулой (5), имеем:

$$f(x,t)=\left(1+\frac{mt}{x^{m-1}}\right)^{\nu/m};$$
$$g(x,t)=\left(1+\frac{mt}{x^{m-1}}\right)^{-1/m};$$
$$h(x,t)=(x^m+mtx)^{(m-1)/m}$$

и роль $\tau_k(x)$ играет функция $U_{\nu-k}^{(m)}(x^{m-1})$ ($\nu\in\mathbb{C};\ k\in\mathbb{N}_0$).

Таким образом, по теореме 1 получаем новый класс производящих функций для функции $U_\nu^{(m)}(z)$:

$$(14)\qquad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{k!}\,U_{\nu-k}^{(m)}\big[(x^m-mzx)^{(m-1)/m}\big]\left[z\left(1-\frac{mz}{x^{m-1}}\right)^{1/m}\right]^k=$$
$$=\left(1-\frac{mz}{x^{m-1}}\right)^{-\nu/m}\sum_{k=0}^{n}S(n,k)U_{\nu-k}^{(m)}(x^{m-1})z^k\quad\left(|z|<\frac{|x|^{m-1}}{m};\ n\in\mathbb{N}_0;\ \nu\in\mathbb{C}\right).$$

После этих подготовительных вычислений запишем результат:

Теорема 3. *Для обобщенных функций Бесселя* (7) *имеем совокупность производящих функций вида:*

$$(15)\qquad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{k!}\,U_{\nu-k}^{(m)}(x^{m-1})z^k=\left(1+\frac{mz}{x^{m-1}}\right)^{\nu/m}\sum_{k=0}^{n}S(n,k)\times$$
$$\times\,U_{\nu-k}^{(m)}\big[(x^m+mzx)^{(m-1)/m}\big]\left[z\left(1+\frac{mz}{x^{m-1}}\right)^{1/m}\right]^k$$
$$\left(z<\frac{|x|^{m-1}}{m};\ n\in\mathbb{N}_0;\ \nu\in\mathbb{C}\right),$$

если каждый член формулы (15) *существует.*

Доказательство. Приводим формулу (14) к виду (15). Берем $z=\dfrac{XZ}{x}$, и $x=(X^m+mXZ)^{1/m}$, подставляя в аргумент функции $U_{\nu-k}^{(m)}[\,\cdot\,]$, получаем $\big[(x^m-mzx)^{(m-1)/m}\big]=\big[X^m+mXZ-mXZ\big]^{(m-1)/m}=X^{m-1}$. Находим также выражения:

$$\text{I).}\quad \left[z\left(1-\frac{mz}{x^{m-1}}\right)^{1/m}\right]^k = Z^k\left[\frac{1}{(1+mZ/X^{m-1})^{1/m}}\right]^{2k};$$

$$\text{II).}\quad \left(1-\frac{mz}{x^{m-1}}\right)^{-\nu/m} = \left(1+\frac{mZ}{X^{m-1}}\right)^{\nu/m};$$

$$\text{III).}\quad z^k = \frac{Z^k}{(1+mZ/X^{m-1})^{k/m}}.$$

Возвращаясь в этих формулах от Z и X снова к z и x, соответственно, и подставляя их в формулу (14), мы получим формулу (15). Теорема доказана. □

Замечание 3. Формула (15) при $n = 0$ с учетом условия (2) имеет вид формулы (13) для функций (7), а при $n = 0$ и $m = 2$ является второй формулой Ломмеля для функций Бесселя (см. [10], с. 140).

Список литературы

[1] Mathai A. M., Saxena R. K., *Generalized hypergeometric functions with applications in statistics and physical sciences* Berlin; Heidelberg; New-York: Springer-Verlag, 1973. MR0463524

[2] Srivastava H. M., Kashyap B. R. K., *Special functions in Queueing Theory and related Stochastic processes*, New-York: Academic Press, 1982. MR0657766

[3] Riordan J., *Combinatorial Identities*, Wiley Tracts of Probability and Statistics, John Wiley and Sons, New-York, London, Sydney, 1968. MR0231725

[4] Singhal J. P. and Srivastava H. M., *A class of bilateral generating functions for certain classical polynomials*, Pacific J. Math. **42** (1972), 755–762. MR0316777

[5] Srivastava H. M., *Some families of generating functions associated with the Stirling numbers of the second kind*, J. Math Anal. Appl. **251** (2000), 752–769. MR1794769

[6] Хриптун М. Д., *Теоремы умножения для решений обобщенного дифференциального уравнения Бесселя m-го порядка*, Диф. уравнения. **11**:2 (1975), 287–293. Zbl 0305.33009

[7] Luchak G., *The solution of the single-channel queueing equations characterized by a time-dependent Poisson distributed arrival rate and general class of holding times*, Oper. Res. **4** (1956), 711–732.

[8] Luchak G., *The distribution of the time required to reduce to some preassigned level a simple channel queue characterized by a time dependent Poisson-distributed arrival rate and a general class of holding times*, Operations Research, **5** (1957), 205–209. MR0083415

[9] Luchak G., *The continuous time solution of the equations of the simple channel queue with a general class of service-time distributions by the method of generating functions*, Journal Roy. Statist. Soc. B., **20** (1958), 176–181. MR0096312

[10] Watson G. N., *A Treatise of the Theory of Bessel Functions. Second Edition*, Cambridge, London, New-York: Cambridge University Press, 1944. MR0010746

Мария Дмитриевна Хриптун
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: Khriptun@math.nsc.ru