S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 9, стр. 568–617 (2012) УДК 517.958
MSC 35L20, 35R30, 35Q99

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ УПРУГОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ В ЦИЛИНДРЕ

Т. В. БУГУЕВА

Abstract. We consider an inverse problem for a system of an elastic isotropic equations in a cylinder infinite with respect to the variable z. The linearized problem of identification of three characteristics of elastic isotropic medium is investigated. It is supposed that the medium density $\rho(r,\varphi,z)$, the propagation velocities of longitudinal $c(r,\varphi,z)$ and transverse $a(r,\varphi,z)$ waves can be represented as $\rho(r,\varphi,z)=\rho_0+\rho_1(r,\varphi,z)$, $a^2(r,\varphi,z) = a_0^2 + a_1(r,\varphi,z)$, $c^2(r,\varphi,z) = c_0^2 + c_1(r,\varphi,z)$, where ρ_0, a_0^2, c_0^2 are some unknown constants, and unknown functions $\rho_1(r,\varphi,z)$, $a_1(r,\varphi,z)$, $c_1(r,\varphi,z)$ are small in comparison with the constants ρ_0, a_0^2 и c_0^2, correspondingly. The estimates of conditional stability of the inverse problem solution are obtained.

Keywords: inverse problems, isotropic elasticity, conditional stability estimate.

1. Введение

Данная статья продолжает серию работ, посвящённых определению параметров изотропной среды.

В работе [1] в линейном приближении в шаре была исследована задача однозначного определения малого аддитивного слагаемого $p_1(r,\theta,\varphi)$ у функции $p(r,\theta,\varphi) = \ln\rho(r,\theta,\varphi)$ при известных скоростях $c(r,\theta,\varphi) = (\lambda+2\mu)/\rho$ и $a(r,\theta,\varphi) = \mu/\rho$ продольных и поперечных волн. Линеаризация проводилась относительно известных положительных констант.

Bugueva T. V., Determining of the parameters of an elastic isotropic medium in a infinite cylinder.

Работа поддержана грантом РФФИ, проект 11-01-00105, Междисциплинарным интеграционным проектом СО РАН, 2012, № 14.

Поступила 23 ноября 2012 г., опубликована 3 декабря 2012 г.

Также в линеаризованной постановке [2] была исследована задача определения трех характеристик упругой изотропной среды в шаре в предположении, что плотность среды $\rho(r)$ зависит только от радиальной переменной, а скорости распространения продольных $c(r,\theta,\varphi)$ и поперечных волн $a(r,\theta,\varphi)$ представимы в виде $a^2(r,\theta,\varphi) = a_0^2 + a_1(r,\theta,\varphi)$, $c^2(r,\theta,\varphi) = c_0^2 + c_1(r,\theta,\varphi)$, где a_0^2, c_0^2 – некоторые известные константы, а неизвестные функции $a_1(r,\theta,\varphi)$, $c_1(r,\theta,\varphi)$ – малы по сравнению с константами a_0^2 и c_0^2, соответственно.

2. Постановка обратной задачи

Пусть r_0, T – фиксированные положительные числа. В области

$$\mathcal{D} = \Big\{ (r,\varphi,z)|\ r \in (0,r_0],\ \varphi \in [0,2\pi],\ z \in \mathbb{R} \Big\},$$

рассмотрим систему дифференциальных уравнений Ламе изотропной упругости

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \mu \Delta \vec{u} + (\lambda+\mu)\nabla \mathrm{div}\vec{u} + \nabla\lambda \mathrm{div}\vec{u} + \nabla\mu \cdot (\nabla\vec{u} + \vec{u}\nabla), \tag{2.1}$$

вместе с начальными данными и граничными условиями

$$\vec{u}|_{t<0} = 0, \qquad \sigma_r|_{r=r_0} = \vec{l}\theta_0(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\zeta z}. \tag{2.2}$$

Здесь $\sigma_r = \lambda\vec{\mathrm{e}}_r\mathrm{div}\vec{u} + \mu\vec{\mathrm{e}}_r(\nabla\vec{u} + \vec{u}\nabla)$ – вектор напряжений, действующий на площадку с нормалью, параллельной оси $\vec{\mathrm{e}}_r$. Здесь $\vec{u} = (u_r, u_\varphi, u_z)$ – вектор смещений; $\rho(r,\varphi,z)$ – плотность среды; $\lambda(r,\varphi,z)$, $\mu(r,\varphi,z)$ – параметры Ламе; $\vec{l} = (1,0,0)$ – базисный вектор в цилиндрических координатах $\vec{\mathrm{e}}_r, \vec{\mathrm{e}}_\varphi, \vec{\mathrm{e}}_z$; $r \in (0,r_0]$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $z \in \mathbb{R}$, $t \in [0,T]$, $\theta_0(t)$ – тета-функция.

В данной работе в качестве m и ζ будут использоваться два набора параметров: $m = \zeta = 0$ и $m = \zeta = 1$.

Целью настоящей работы является определение функций $\lambda(r,\varphi,z)$, $\mu(r,\varphi,z)$ и $\rho(r,\varphi,z)$.

Пусть $\vec{h}(t,\varphi,z)$ – заданная функция. Пусть $T > 0$ – фиксированное число. В качестве дополнительной информации для решения обратной задачи рассмотрим

$$\vec{u}\,\Big|_{r=r_0} = \vec{h}(t,\varphi,z), \qquad t \in [0,T], \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad z \in \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

Перепишем уравнения (2.1), (2.2) в терминах скоростей продольных и поперечных волн

$$a(r,\varphi,z) = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \qquad c(r,\varphi,z) = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}, \qquad \rho(r,\varphi,z),$$

при этом будем полагать, что имеют место отношения:

$$a^2(r,\varphi,z) \approx a_0^2 + a_1(r,\varphi,z),\ c^2(r,\varphi,z) \approx c_0^2 + c_1(r,\varphi,z),\ \rho(r,\varphi,z) \approx \rho_0 + \rho_1(r,\varphi,z),$$

где неизвестные функции $a_1(r,\varphi,z)$, $c_1(r,\varphi,z)$, $\rho_1(r,\varphi,z)$ малы по сравнению с константами a_0, c_0, ρ_0. При этом полагаем, что константы a_0 и c_0, ρ_0 неизвестны.

Функции $a_1(r,\varphi,z)$, $c_1(r,\varphi,z)$, $p_1(r,\varphi,z)$ предполагаются 2π-периодическими по $\varphi \in \mathbb{R}$, гладкими по переменной $r \in (0,r_0]$ и дважды гладкими по переменным $\varphi, z \in \mathbb{R}$. Предположим также, что функции $a_1(r,\varphi,z)$, $c_1(r,\varphi,z)$, $p_1(r,\varphi,z)$

и их соответствующие производные по каждой из переменных абсолютно интегрируемы в полосе $[0, 2\pi] \times \mathbb{R}$.

Замечание 2.1. В данной работе полагаем, что $4a_0^2 \neq c_0^2$.

Так как функции $\vec{u}$ и σ_r, входящие в равенства (2.1)–(2.2) зависят от параметров m и ζ, то в обозначениях функций $\vec{u}$, σ_r, $\vec{h}$ на эту зависимость будут указывать индексы m и ζ, поэтому будем писать $\vec{u}_{m,\zeta}(t, r, \varphi, z)$. Предположим, что функция $\vec{u}_{m,\zeta}(t, r, \varphi, z)$ представима в виде суммы

$$\vec{u}_{m,\zeta}(t, r, \varphi, z) = \vec{u}^0_{m,\zeta}(t, r, \varphi, z) + \vec{u}^1_{m,\zeta}(t, r, \varphi, z),$$

где вектор-функция $\vec{u}^0_{m,\zeta}(t, r, \varphi, z)$ имеет вид

$$\vec{u}^0_{m,\zeta}(t, r, \varphi, z) = u^0(t, r, \varphi, z) \cdot \vec{\mathrm{e}}_r, \quad \text{где} \quad u^0(t, r, \varphi, z) = \widetilde{U}_0^{m,\zeta}(t, r)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\zeta z}.$$

Тогда информация (2.3) запишется как

$$\vec{h}_{m,\zeta}(t, \varphi, z) = \vec{h}^0_{m,\zeta}(t, \varphi, z) + \vec{h}^1_{m,\zeta}(t, \varphi, z),$$

где $\vec{h}^0_{m,\zeta}(t, \varphi, z) = H_0^{m,\zeta}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\zeta z}\vec{\mathrm{e}}_r + \vec{h}^1(t, \varphi, z)$, а функция $H_0^{m,\zeta}(t)$ есть след функции $\widetilde{U}_0^{m,\zeta}(t, r)$ при $r = r_0$, а функция $\vec{h}^1_{m,\zeta}(t, \varphi, z)$ определена как $\vec{u}^1_{m,\zeta}|_{r=r_0} = \vec{h}^1_{m,\zeta}(t, \varphi, z)$.

Вектор-функция $\vec{u}^0_{m,\zeta}(t, r, \varphi, z)$ – является решением задачи

$$\frac{\partial^2 \vec{u}^0_{m,\zeta}}{\partial t^2} = a_0^2 \Delta \vec{u}^0_{m,\zeta} + (c_0^2 - a_0^2)\nabla \mathrm{div} \vec{u}^0_{m,\zeta}, \tag{2.4}$$

$$\vec{u}^0_{m,\zeta}\Big|_{t<0} = 0, \tag{2.5}$$

$$\sigma^0_{r;m,\zeta}\Big|_{r=r_0} = \vec{l}\theta_0(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\zeta z}, \tag{2.6}$$

$$\vec{u}^0_{m,\zeta}\Big|_{r=r_0} = \vec{h}^0_{m,\zeta}(t). \tag{2.7}$$

Здесь

$$\sigma^0_{r;m,\zeta} = (c_0^2 - 2a_0^2)\rho_0 \vec{\mathrm{e}}_r \cdot \mathrm{div} \vec{u}^0_{m,\zeta} + a_0^2 \rho_0 \vec{\mathrm{e}}_r \cdot (\nabla \vec{u}^0_{m,\zeta} + \vec{u}^0_{m,\zeta}\nabla).$$

А функция $\vec{u}^1_{m,\zeta}(t, r, \varphi, z)$ является решением задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{u}^1_{m,\zeta}}{\partial t^2} = {} & a_0^2 \Delta \vec{u}^1_{m,\zeta} + (c_0^2 - a_0^2)\nabla \mathrm{div} \vec{u}^1_{m,\zeta} + a_1 \Delta \vec{u}^0_{m,\zeta} + (c_1 - a_1)\nabla \mathrm{div} \vec{u}^0_{m,\zeta} + \\ & + \Big(\nabla(c_1 - 2a_1) + \frac{c_0^2 - 2a_0^2}{\rho_0}\nabla\rho_1\Big)\mathrm{div}\vec{u}^0_{m,\zeta} + \\ & + \Big(\nabla a_1 + \frac{a_0^2}{\rho_0}\nabla\rho_1\Big) \cdot (\nabla \vec{u}^0_{m,\zeta} + \vec{u}^0_{m,\zeta}\nabla), \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\vec{u}^1_{m,\zeta}\Big|_{t<0} = 0, \tag{2.9}$$

$$\sigma^1_{r;m,\zeta}\Big|_{r=r_0} = \mathbf{0}, \tag{2.10}$$

$$\vec{u}^1_{m,\zeta}\Big|_{r=r_0} = \vec{h}^1_{m,\zeta}(t, \varphi, z), \tag{2.11}$$

где

$$\begin{aligned}\sigma^1_{r;m,\zeta} = {} & (c_0^2 - 2a_0^2)\rho_0\, \vec{\mathrm{e}}_r \cdot \mathrm{div}\vec{u}^1_{m,\zeta} + a_0^2\rho_0 \vec{\mathrm{e}}_r \cdot (\nabla \vec{u}^1_{m,\zeta} + \vec{u}^1_{m,\zeta}\nabla) + \\ & + \Big((c_0^2 - 2a_0^2)\rho_1 + (c_1 - 2a_1)\rho_0\Big)\vec{\mathrm{e}}_r \cdot \mathrm{div}\vec{u}^0_{m,\zeta} + \\ & + (a_0^2\rho_1 + a_1\rho_0)\vec{\mathrm{e}}_r \cdot (\nabla\vec{u}^0_{m,\zeta} + \vec{u}^0_{m,\zeta}\nabla).\end{aligned}$$

Обратная задача 2.1. Пусть T, r_0 – заданные положительные константы; $0 < T < 2r_0/c_0$. Определить неизвестные константы c_0, a_0, $p_0 = \ln\rho_0$ входящие в равенства (2.4), (2.6), если относительно решения $\vec{u}^0_{m,\zeta}(t,r,\varphi,z)$ прямой задачи (2.4)–(2.6), известна информация (2.7), где $\vec{h}^0_{m,\zeta}(t,\varphi,z)$ – заданная функция при $t \in [0,T]$. Параметры m и ζ полагаются равными $m = 0$, $\zeta = 0$ и $m = 1$, $\zeta = 1$.

Обратная задача 2.2. Пусть T, r_0, c_0, a_0, p_0 – заданные положительные константы; $0 < T < 2r_0/c_0$. Определить неизвестные функции $a_1(r,\varphi,z)$ и $c_1(r,\varphi,z)$, $p_1(r,\varphi,z)$ входящие в равенства (2.8), (2.10), если относительно решения $\vec{u}^1(t,r,\varphi,z)$ прямой задачи (2.8)–(2.10), известна информация (2.11), где $\vec{h}^1_{m,\zeta}(t,\varphi,z)$ – заданная функция при $t \in [0,T]$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $z \in \mathbb{R}$; функция $\vec{u}^0_{m,\zeta}(t,r,\varphi,z)$ – известна и является решением прямой задачи (2.4)–(2.6). Параметры m и ζ полагаются равными $m = 1$, $\zeta = 1$.

Замечание 2.2. Первоначально задача определения величин c_0, a_0 и ρ_0 не ставилась. Целью работы являлось нахождение функций $c_1(r,\varphi,z)$, $a_1(r,\varphi,z)$, $\rho_1(r,\varphi,z)$, для определения которых необходимо, чтобы параметры m и ζ были отличны от нуля, выбор пал на $m = 1$ и $\zeta = 1$. В процессе решения было замечено, что если в качестве m и ζ выбрать ещё и нулевые значения, то без особых сложностей определяются и константы c_0, a_0 и ρ_0.

Запишем вектор-функцию $\vec{u}^1_{m,\zeta}(t,r,\varphi,z)$ в виде разложения по цилиндрическому базису $(\vec{\mathrm{e}}_r, \vec{\mathrm{e}}_\varphi, \vec{\mathrm{e}}_z)$

$$\vec{u}^1_{m,\zeta}(t,r,\varphi,z) = u^1_{r;m,\zeta}(t,r,\varphi,z)\vec{\mathrm{e}}_r + u^1_{\varphi;m,\zeta}(t,r,\varphi,z)\vec{\mathrm{e}}_\varphi + u^1_{z;m,\zeta}(t,r,\varphi,z)\vec{\mathrm{e}}_z.$$

тогда

$$\vec{h}^1_{m,\zeta}(t,\varphi,z) = h^1_{r;m,\zeta}(t,\varphi,z)\vec{\mathrm{e}}_r + h^1_{\varphi;m,\zeta}(t,\varphi,z)\vec{\mathrm{e}}_\varphi + h^1_{z;m,\zeta}(t,\varphi,z)\vec{\mathrm{e}}_z.$$

В терминах функции $\widetilde{U}_0^{m,\zeta}(t,r)$ равенства (2.4)–(2.7) примут вид

$$\frac{\partial^2 \widetilde{U}_0^{m,\zeta}}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 \widetilde{U}_0^{m,\zeta}}{\partial r^2} + \frac{c_0^2}{r}\frac{\partial \widetilde{U}_0^{m,\zeta}}{\partial r} - \widetilde{U}_0^{m,\zeta}\Big(a_0^2\Big(\zeta^2 + \frac{m^2}{r^2}\Big) + \frac{c_0^2}{r^2}\Big), \tag{2.12}$$

$$\widetilde{U}_0^{m,\zeta}\Big|_{t<0} = 0, \tag{2.13}$$

$$\Big[c_0^2\rho_0 \frac{\partial \widetilde{U}_0^{m,\zeta}}{\partial r} + \frac{(c_0^2 - 2a_0^2)\rho_0}{r}\widetilde{U}_0^{m,\zeta}\Big]\Big|_{r=r_0} = \theta_0(t), \tag{2.14}$$

$$\widetilde{U}_0^{m,\zeta}\Big|_{r=r_0} = H_0^{m,\zeta}(t), \tag{2.15}$$

Перепишем равенства (2.8)–(2.11) в виде системы уравнений относительно функций $u^1_{r;m,\zeta}(t,r,\varphi,z)$, $u^1_{\varphi;m,\zeta}(t,r,\varphi,z)$, $u^1_{z;m,\zeta}(t,r,\varphi,z)$.

Эта система состоит из трех групп равенств, включающих в себя дифференциальное уравнение, начальное условие, граничное условие и информацию для решения обратной задачи. Система соотношений имеет вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u^1_{r;m,\zeta}}{\partial t^2} = a_0^2\Big(&\frac{\partial^2 u^1_{r;m,\zeta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u^1_{r;m,\zeta}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u^1_{r;m,\zeta}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u^1_{r;m,\zeta}}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2}u^1_{r;m,\zeta} - \\ &- \frac{2}{r^2}\frac{\partial u^1_{\varphi;m,\zeta}}{\partial \varphi}\Big) + \\ &+(c_0^2 - a_0^2)\Big(\frac{\partial^2 u^1_{r;m,\zeta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u^1_{r;m,\zeta}}{\partial r} - \frac{1}{r^2}u^1_{r;m,\zeta} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 u^1_{\varphi;m,\zeta}}{\partial r\partial\varphi} - \\ &\qquad - \frac{1}{r^2}\frac{\partial u^1_{\varphi;m,\zeta}}{\partial\varphi} + \frac{\partial^2 u^1_{z;m,\zeta}}{\partial r\partial z}\Big) + \\ &+a_1\Big[\frac{\partial^2 \widetilde{U}_0^{m,\zeta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \widetilde{U}_0^{m,\zeta}}{\partial r} - \widetilde{U}_0^{m,\zeta}\Big(\frac{m^2+1}{r^2} + \zeta^2\Big)\Big]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\zeta z} + \\ &+(c_1 - a_1)\Big[\frac{\partial^2 \widetilde{U}_0^{m,\zeta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \widetilde{U}_0^{m,\zeta}}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\widetilde{U}_0^{m,\zeta}\Big]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\zeta z} + \\ &+\Big(\frac{\partial}{\partial r}(c_1 - 2a_1) + \frac{c_0^2 - 2a_0^2}{\rho_0}\frac{\partial\rho_1}{\partial r}\Big)\Big(\frac{\partial \widetilde{U}_0^{m,\zeta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\widetilde{U}_0^{m,\zeta}\Big)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\zeta z} + \\ &+\Big[\Big(\frac{\partial a_1}{\partial r} + \frac{a_0^2}{\rho_0}\frac{\partial\rho_1}{\partial r}\Big)2\frac{\partial \widetilde{U}_0^{m,\zeta}}{\partial r} - \frac{\mathrm{i}m}{r^2}\Big(\frac{\partial a_1}{\partial\varphi} + \frac{a_0^2}{\rho_0}\frac{\partial\rho_1}{\partial\varphi}\Big)\widetilde{U}_0^{m,\zeta} - \\ &- \mathrm{i}\zeta\Big(\frac{\partial a_1}{\partial z} + \frac{a_0^2}{\rho_0}\frac{\partial\rho_1}{\partial z}\Big)\widetilde{U}_0^{m,\zeta}\Big]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\zeta z},\end{aligned} \tag{2.16}$$

$$u^1_{r;m,\zeta}\Big|_{t<0} = 0, \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}\Big[(c_0^2 - 2a_0^2)\rho_0\Big(&\frac{\partial u^1_{r;m,\zeta}}{\partial r} + \frac{u^1_{r;m,\zeta}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u^1_{\varphi;m,\zeta}}{\partial\varphi} + \frac{\partial u^1_{z;m,\zeta}}{\partial z}\Big) + a_0^2\rho_0 2\frac{\partial u^1_{r;m,\zeta}}{\partial r} + \\ &+ \Big((c_0^2 - 2a_0^2)\rho_1 + (c_1 - 2a_1)\rho_0\Big)\Big(\frac{\partial\widetilde{U}_0}{\partial r} + \frac{\widetilde{U}_0^{m,\zeta}}{r}\Big)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\zeta z} + \\ &+ (a_0^2\rho_1 + a_1\rho_0)2\frac{\partial\widetilde{U}_0^{m,\zeta}}{\partial r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\zeta z}\Big]\Big|_{r=r_0} = 0,\end{aligned} \tag{2.18}$$

$$u^1_{r;m,\zeta}\Big|_{r=r_0} = h^1_{r;m,\zeta}(t,\varphi,z), \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u^1_{\varphi;m,\zeta}}{\partial t^2} = a_0^2\Big(&\frac{\partial^2 u^1_{\varphi;m,\zeta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u^1_{\varphi;m,\zeta}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u^1_{\varphi;m,\zeta}}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 u^1_{\varphi;m,\zeta}}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2}u^1_{\varphi;m,\zeta} + \\ &+ \frac{2}{r^2}\frac{\partial u^1_{r;m,\zeta}}{\partial\varphi}\Big) + \\ &+(c_0^2 - a_0^2)\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u^1_{r;m,\zeta}}{\partial r\partial\varphi} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial u^1_{r;m,\zeta}}{\partial\varphi} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u^1_{\varphi;m,\zeta}}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 u^1_{z;m,\zeta}}{\partial\varphi\partial z}\Big) + \\ &+a_1\frac{-2\mathrm{i}m}{r^2}\widetilde{U}_0^{m,\zeta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\zeta z} +\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+(c_1-a_1)\frac{-\mathrm{i}m}{r}\Big(\frac{\partial\widetilde{U}_0^{m,\zeta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\widetilde{U}_0^{m,\zeta}\Big)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\zeta z}+\\
&+\frac{1}{r}\Big(\frac{\partial}{\partial\varphi}(c_1-2a_1)+\frac{c_0^2-2a_0^2}{\rho_0}\frac{\partial\rho_1}{\partial\varphi}\Big)\Big(\frac{\partial\widetilde{U}_0^{m,\zeta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\widetilde{U}_0^{m,\zeta}\Big)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\zeta z}+\\
&+\Big[\Big(\frac{\partial a_1}{\partial r}+\frac{a_0^2}{\rho_0}\frac{\partial\rho_1}{\partial r}\Big)\frac{-\mathrm{i}m}{r}\widetilde{U}_0^{m,\zeta}+\frac{2}{r^2}\Big(\frac{\partial a_1}{\partial\varphi}+\frac{a_0^2}{\rho_0}\frac{\partial\rho_1}{\partial\varphi}\Big)\widetilde{U}_0^{m,\zeta}\Big]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\zeta z},
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

$$
u^1_{\varphi;m,\zeta}\Big|_{t<0}=0,
\tag{2.21}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Big[a_0^2\rho_0\Big(\frac{\partial u^1_{\varphi;m,\zeta}}{\partial r}-\frac{u^1_{\varphi;m,\zeta}}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u^1_{r;m,\zeta}}{\partial\varphi}\Big)-\\
&-\frac{\mathrm{i}m}{r}(a_0^2\rho_1+a_1\rho_0)\widetilde{U}_0^{m,\zeta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\zeta z}\Big]\Big|_{r=r_0}=0,
\end{aligned}
\tag{2.22}
$$

$$
u^1_{\varphi;m,\zeta}\Big|_{r=r_0}=h^1_{\varphi;m,\zeta}(t,\varphi,z),
\tag{2.23}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2u^1_{z;m,\zeta}}{\partial t^2}&=a_0^2\left(\frac{\partial^2u^1_{z;m,\zeta}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u^1_{z;m,\zeta}}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u^1_{z;m,\zeta}}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2u^1_{z;m,\zeta}}{\partial z^2}\right)\Big]+\\
&+(c_0^2-a_0^2)\left(\frac{\partial^2u^1_{r;m,\zeta}}{\partial r\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial u^1_{r;m,\zeta}}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2u^1_{\varphi;m,\zeta}}{\partial\varphi\partial z}+\frac{\partial^2u^1_{z;m,\zeta}}{\partial z^2}\right)\Big]+\\
&-\mathrm{i}\zeta(c_1-a_1)\Big(\frac{\partial\widetilde{U}_0^{m,\zeta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\widetilde{U}_0^{m,\zeta}\Big)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\zeta z}+\\
&+\Big(\frac{\partial}{\partial z}(c_1-2a_1)+\frac{c_0^2-2a_0^2}{\rho_0}\frac{\partial\rho_1}{\partial z}\Big)\Big(\frac{\partial\widetilde{U}_0^{m,\zeta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\widetilde{U}_0^{m,\zeta}\Big)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\zeta z}+\\
&+\Big(\frac{\partial a_1}{\partial r}+\frac{a_0^2}{\rho_0}\frac{\partial\rho_1}{\partial r}\Big)(-\mathrm{i}\zeta)\widetilde{U}_0^{m,\zeta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\zeta z},
\end{aligned}
\tag{2.24}
$$

$$
u^1_{z;m,\zeta}\Big|_{t<0}=0,
\tag{2.25}
$$

$$
\Big[a_0^2\rho_0\Big(\frac{\partial u^1_{z;m,\zeta}}{\partial r}+\frac{\partial u^1_{r;m,\zeta}}{\partial z}\Big)-\mathrm{i}\zeta(a_0^2\rho_1+a_1\rho_0)\widetilde{U}_0^{m,\zeta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\zeta z}\Big]\Big|_{r=r_0}=0,
\tag{2.26}
$$

$$
u^1_{z;m,\zeta}\Big|_{r=r_0}=h^1_{z;m,\zeta}(t,\varphi,z).
\tag{2.27}
$$

Перейдём к анализу построенной выше системы соотношений. Для этого преобразуем её к более удобному виду.

Представим функцию $a_1(r,\varphi,z)$ в виде ряда Фурье по переменной φ:

$$
a_1(r,\varphi,z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_{1;k}(r,z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\varphi},
$$

где

$$
a_{1;k}(r,z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{2\pi}a_1(r,\xi,z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi}\,d\,\xi\,,\quad (k\in\mathbb{Z}).
$$

В силу условий на функцию $a_1(r,\varphi,z)$, эти коэффициенты ряда Фурье являются гладкими функциями и абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$ по переменной z и, следовательно, к ним применимо преобразование Фурье

$$\widehat{a}_{1;k}(r,\nu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}a_{1;k}(r,z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z\nu}\,d\,z\,,$$

которое в силу указанных условий является гладкой по r функцией, и формула обращения

$$a_{1;k}(r,z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\widehat{a}_{1;k}(r,\nu)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z\nu}\,d\,\nu\,.$$

Подставляя последние интегралы в ряд Фурье, получаем равенство

$$a_1(r,\varphi,z)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\widehat{a}_{1;k}(r,\nu)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z\nu}\,d\,\nu\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\varphi}.$$

Проводя аналогичные рассуждения для функций $c_1(r,\varphi,z)$, $\rho_1(r,\varphi,z)$, получаем

$$\begin{aligned}
a_1(r,\varphi,z)\,&=\,\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\widehat{a}_{1;k}(r,\nu)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z\nu}\,d\,\nu\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\varphi},\\
c_1(r,\varphi,z)\,&=\,\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\widehat{c}_{1;k}(r,\nu)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z\nu}\,d\,\nu\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\varphi},\\
\rho_1(r,\varphi,z)\,&=\,\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\widehat{\rho}_{1;k}(r,\nu)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z\nu}\,d\,\nu\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\varphi}.
\end{aligned}\tag{2.28}$$

Относительно вектор-функций $\vec{u}^1_{m,\zeta}(t,r,\varphi,z)$, $\vec{h}^1_{m,\zeta}(t,\varphi,z)$ будем полагать, что они также являются достаточно гладкими по всем переменным и абсолютно интегрируемыми по переменным φ, z в полосе $[0,2\pi]\times\mathbb{R}$, причем их вторые производные по переменным φ, z также полагаются абсолютно интегрируемыми.

Представим вектор-функции $\vec{u}^1_{m,\zeta}(t,r,\varphi,z)$ и $\vec{h}^1_{m,\zeta}(t,\varphi,z)$ аналогичным образом и перейдем в равенствах (2.16)–(2.27) к гармоникам $\widehat{a}_{1;k}(r,\nu)$, $\widehat{c}_{1;k}(r,\nu)$, $\widehat{\rho}_{1;k}(r,\nu)$ и $u^{1;k,\nu}_{r;m,\zeta}(t,r)$, $u^{1;k,\nu}_{\varphi;m,\zeta}(t,r)$, $u^{1;k,\nu}_{z;m,\zeta}(t,r)$, $h^{1;k,\nu}_{r;m,\zeta}(t,r)$, $h^{1;k,\nu}_{\varphi;m,\zeta}(t,r)$, $h^{1;k,\nu}_{z;m,\zeta}(t,r)$, которые определяются аналогичным образом по функциям $u^1_{r;m,\zeta}(t,r,\varphi,z)$, $u^1_{\varphi;m,\zeta}(t,r,\varphi,z)$, $u^1_{z;m,\zeta}(t,r,\varphi,z)$, $h^1_{r;m,\zeta}(t,\varphi,z)$, $h^1_{\varphi;m,\zeta}(t,\varphi,z)$, $h^1_{z;m,\zeta}(t,\varphi,z)$

$$\begin{aligned}
\vec{u}^{\,1,k,\nu}_{m,\zeta}(t,r)\,&=\,u^{1,k,\nu}_{r;m,\zeta}(t,r)\vec{\mathrm{e}}_r+u^{1,k,\nu}_{\varphi;m,\zeta}(t,r)\vec{\mathrm{e}}_\varphi+u^{1,k,\nu}_{z;m,\zeta}(t,r)\vec{\mathrm{e}}_z,\\
\vec{h}^{\,1,k,\nu}_{m,\zeta}(t)\,&=\,h^{1,k,\nu}_{r;m,\zeta}(t)\vec{\mathrm{e}}_r+h^{1,k,\nu}_{\varphi;m,\zeta}(t)\vec{\mathrm{e}}_\varphi+h^{1,k,\nu}_{z;m,\zeta}(t)\vec{\mathrm{e}}_z.
\end{aligned}\tag{2.29}$$

Сделав в равенствах (2.16)–(2.27) указанные выше преобразования, индексы гармоник функций $c_1(r,\varphi,z)$, $a_1(r,\varphi,z)$ и $\rho_1(r,\varphi,z))$ примут вид $\widehat{c}_{1;m+k}(r,\zeta+\nu)$, $\widehat{a}_{1;m+k}(r,\zeta+\nu)$, $\widehat{\rho}_{1;m+k}(r,\zeta+\nu)$.

2.1. **Преобразование системы равенств (2.12)–(2.27).** Сделаем в равенствах (2.12)–(2.15) и (2.16)–(2.27) замену переменных

$$x = x(r) = \int_r^{r_0} \frac{d\xi}{c_0} = \frac{r_0 - r}{c_0}, \qquad r = r(x) = r_0 - \int_0^x c_0\, d\xi = r_0 - c_0 x. \tag{2.30}$$

Определим новые функции

$$\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) := \widehat{c}_{1;m+k}(r(x), \zeta+\nu), \quad \widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) := \widehat{a}_{1;m+k}(r(x), \zeta+\nu),$$

$$\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) := \widehat{\rho}_{1;m+k}(r(x), \zeta+\nu), \qquad U_0^{m,\zeta}(x,t) := \frac{\widetilde{U}_0^{m,\zeta}(r(x),t)}{S(x)},$$

$$U_{1,m,\zeta}^{k,\nu}(x,t) = \frac{u_{r;m,\zeta}^{1,k,\nu}(r(x),t)}{S(x)}, \quad V_{1,m,\zeta}^{k,\nu}(x,t) = \frac{u_{\varphi;m,\zeta}^{1,k,\nu}(r(x),t)}{S_1(x)},$$

$$W_{1,m,\zeta}^{k,\nu}(x,t) = \frac{u_{z;m,\zeta}^{1,k,\nu}(r(x),t)}{S_1(x)},$$

где

$$S(x) = \exp\Big\{\frac{1}{2}\int_0^x \widehat{b}_1(\xi)\, d\xi\Big\}, \quad S_1(x) = \exp\Big\{\frac{c_0^2}{2a_0^2}\int_0^x \widehat{f}_1(\xi)\, d\xi\Big\}.$$

Подставляя в последнее равенство функции $\widehat{b}_1(\xi)$ и $\widehat{f}_1(\xi)$

$$\widehat{b}_1(x) = \frac{c_0}{r(x)}, \qquad \widehat{f}_1(x) = \frac{a_0^2}{c_0 r(x)},$$

получим, что $S(x) = S_1(x) = \exp\Big\{\dfrac{c_0}{2}\displaystyle\int_0^x \frac{d\xi}{r(\xi)}\Big\}$.

В терминах новых функций уравнения (2.16)–(2.27) примут вид

$$\frac{\partial^2 U_0^{m,\zeta}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U_0^{m,\zeta}}{\partial x^2} + q_0^{m,\zeta}(x)\, U_0^{m,\zeta}, \tag{2.31}$$

$$U_0^{m,\zeta}\Big|_{t<0} = 0, \tag{2.32}$$

$$\Big[\frac{\partial U_0^{m,\zeta}}{\partial x} + b_2^0\, U_0^{m,\zeta}\Big]\Big|_{x=0} = -\frac{1}{c_0\rho_0}\theta_0(t), \tag{2.33}$$

$$U_0^{m,\zeta}\Big|_{x=0} = H_0^{m,\zeta}(t), \tag{2.34}$$

$$q_0^{m,\zeta}(x) = -\frac{c_0^2}{r^2(x)} - a_0^2\Big(\zeta^2 + \frac{m^2}{r^2(x)}\Big), \qquad b_2^0 = \frac{4a_0^2 - c_0^2}{2c_0 r_0}. \tag{2.35}$$

Заметим, что $b_2^0 \neq 0$ в силу Замечания 2.1.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial t^2} = {} & \frac{\partial^2 U^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x^2} + d^{k,\nu}_0(x)\, U^{k,\nu}_{1,m,\zeta} + f^k_3(x)\, \frac{\partial V^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x} + f^k_4(x)\, V^{k,\nu}_{1,m,\zeta} + \\
& + g^\nu_1(x)\, \frac{\partial W^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x} + g^\nu_2(x)\, W^{k,\nu}_{1,m,\zeta} + \\
& + \frac{\partial^2 U^{m,\zeta}_0}{\partial x^2}\, \chi^0_{3,1}\, \widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \\
& + \frac{\partial U^{m,\zeta}_0}{\partial x} \Big(\chi^0_{4,4}\, \widehat{c}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \frac{\widehat{\rho}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(x)}{\rho_0} \Big) + \\
& + U^{m,\zeta}_0 \Big(\chi_{5,1}(x)\, \widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \chi^{m,\zeta;k,\nu}_{5,2}(x)\, \widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \\
& \qquad + \chi^{m,\zeta;k,\nu}_{5,3}(x)\, \widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \chi_{5,4}(x)\, \widehat{c}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \\
& \qquad + \chi_{5,5}(x)\, \widehat{a}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \chi_{5,6}(x)\, \widehat{\rho}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) \Big),
\end{aligned} \tag{2.36}
$$

$$
U^{k,\nu}_{1,m,\zeta} \Big|_{t<0} = 0, \tag{2.37}
$$

$$
\begin{aligned}
& \Big[\frac{\partial U^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x} + d^0_1\, U^{k,\nu}_{1,m,\zeta} + f^{0,k}_5\, V^{k,\nu}_{1,m,\zeta} + g^{0,\nu}_3\, W^{k,\nu}_{1,m,\zeta} + \\
& + \frac{\partial U^{m,\zeta}_0}{\partial x} \Big(\chi^0_{6,1}\, \widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) + \chi^0_{6,3}\, \widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) \Big) + \\
& + U^{m,\zeta}_0 \Big(\chi^0_{7,1}\, \widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) + \chi^0_{7,2}\, \widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) + \chi^0_{7,3}\, \widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) \Big) \Big] \Big|_{x=0} = 0,
\end{aligned} \tag{2.38}
$$

$$
U^{k,\nu}_{1,m,\zeta} \Big|_{x=0} = h^{1,k,\nu}_{r,m,\zeta}(t); \tag{2.39}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial t^2} = {} & \frac{a^2_0}{c^2_0} \frac{\partial^2 V^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x^2} + f^{k,\nu}_0(x)\, V^{k,\nu}_{1,m,\zeta} + d^k_2(x)\, \frac{\partial U^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x} + d^k_3(x)\, U^{k,\nu}_{1,m,\zeta} + \\
& + g^{k,\nu}_4(x)\, W^{k,\nu}_{1,m,\zeta} + \\
& + \frac{\partial U^{m,\zeta}_0}{\partial x} \Big(\chi^{m;k}_{8,1}(x)\, \widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \chi^{m;k}_{8,2}(x)\, \widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \\
& \qquad + \chi^{m;k}_{8,3}(x)\, \widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) \Big) + \\
& + U^{m,\zeta}_0 \Big(\chi^m_{9,1}(x)\, \widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \chi^m_{9,2}(x)\, \widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \\
& \qquad + \chi^{m,k}_{9,3}(x)\, \widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \chi^{m;k}_{9,5}(x)\, \widehat{a}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \\
& \qquad + \chi^{m;k}_{9,6}(x)\, \widehat{\rho}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) \Big),
\end{aligned} \tag{2.40}
$$

$$
V^{k,\nu}_{1,m,\zeta} \Big|_{t<0} = 0, \tag{2.41}
$$

$$\begin{aligned}&\Big[\frac{\partial V^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x}+f_2^0\,V^{k,\nu}_{1,m,\zeta}+d_4^{0,k}\,U^{k,\nu}_{1,m,\zeta}+\\ &U_0^{m,\zeta}\Big(\chi^{0,m}_{10,2}\,\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)+\chi^{0,m}_{10,3}\,\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)\Big)\Big]\Big|_{x=0}=0,\end{aligned}\tag{2.42}$$

$$V^{k,\nu}_{1,m,\zeta}\Big|_{x=0}=h^{1,k,\nu}_{\varphi,m,\zeta}(t).\tag{2.43}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 W^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial t^2}\;=\;&\frac{a_0^2}{c_0^2}\frac{\partial^2 W^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x^2}+g_0^{k,\nu}(x)\,W^{k,\nu}_{1,m,\zeta}+d_5^{\nu}(x)\,\frac{\partial U^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x}+d_6^{\nu}(x)\,U^{k,\nu}_{1,m,\zeta}+\\ &+f_6^{k,\nu}(x)\,V^{k,\nu}_{1,m,\zeta}+\\ &+\frac{\partial U_0^{m,\zeta}}{\partial x}\Big(\chi^{\zeta;\nu}_{11,1}(x)\,\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x)+\chi^{\zeta;\nu}_{11,2}(x)\,\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x)+\\ &\qquad+\chi^{\zeta;\nu}_{11,3}(x)\,\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x)\Big)+\\ &+U_0^{m,\zeta}\Big(\chi^{\zeta;\nu}_{12,1}(x)\,\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x)+\chi^{\zeta;\nu}_{12,2}(x)\,\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x)+\\ &\qquad+\chi^{\zeta;\nu}_{12,3}(x)\,\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x)+\chi^{\zeta;\nu}_{12,5}(x)\,\widehat{a}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(x)+\\ &\qquad+\chi^{\zeta;\nu}_{12,6}(x)\,\widehat{\rho}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(x)\Big),\end{aligned}\tag{2.44}$$

$$W^{k,\nu}_{1,m,\zeta}\Big|_{t<0}=0,\tag{2.45}$$

$$\begin{aligned}&\Big[\frac{\partial W^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x}+\frac{c_0}{2r_0}\,W^{k,\nu}_{1,m,\zeta}+d_7^{0,\nu}\,U^{k,\nu}_{1,m,\zeta}+\\ &+U_0^{m,\zeta}\Big(\chi^{0,m}_{13,2}\,\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)+\chi^{0,m}_{13,3}\,\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)\Big)\Big]\Big|_{r=r_0}=0,\end{aligned}\tag{2.46}$$

$$W^{k,\nu}_{1,m,\zeta}\Big|_{x=0}=h^{1,k,\nu}_{z,m,\zeta}(t).\tag{2.47}$$

Здесь

$$d_0^{k,\nu}(x)=-\frac{3c_0^2}{4r^2(x)}-a_0^2\Big(\frac{k^2}{r^2(x)}+\nu^2\Big),\quad d_1^0=\frac{4a_0^2-c_0^2}{2c_0r_0},$$

$$d_2^k(x)=-\frac{\mathrm{i}k}{c_0r(x)}(c_0^2-a_0^2),\quad d_3^k(x)=\frac{\mathrm{i}k(c_0^2+3a_0^2)}{2r^2(x)},\quad d_4^{0,k}=-\frac{\mathrm{i}k\,c_0}{r_0},$$

$$d_5^{\nu}(x)=-\frac{\mathrm{i}\nu(c_0^2-a_0^2)}{c_0},\quad d_6^{\nu}(x)=\frac{\mathrm{i}\nu(c_0^2-a_0^2)}{2r(x)},\quad d_7^{0,\nu}=-\mathrm{i}\nu\,c_0;$$

$$f_0^{k,\nu}(x)=a_0^2\Big(\frac{4k^2-4\nu^2-3}{4r^2(x)}+\nu^2\Big)-\frac{k^2c_0^2}{r^2(x)},\quad f_2^0=\frac{c_0}{2r_0},$$

$$f_3^k(x)=-\frac{\mathrm{i}k}{c_0r(x)}(c_0^2-a_0^2),\quad f_4^k(x)=\Big(\frac{\mathrm{i}k(c_0^2-a_0^2)}{r^2(x)}-\frac{\mathrm{i}k(c_0^2+a_0^2)}{r(x)}\Big),$$

$$f_5^{0,k}=-\frac{\mathrm{i}k(c_0^2-2a_0^2)}{c_0r_0},\quad f_6^{k,\nu}(x)=-\frac{k\nu}{r(x)}(c_0^2-a_0^2);$$

$$g_0^{k,\nu}(x)=\frac{a_0^2(1-4k^2)}{4r^2(x)}-\nu^2c_0^2,\quad g_1^{\nu}(x)=-\frac{\nu(c_0^2-a_0^2)}{c_0},\quad g_2^{\nu}(x)=\frac{\nu(c_0^2-a_0^2)}{2r(x)},$$

$$g_3^{0,\nu} = -\frac{\mathrm{i}\nu(c_0^2 - 2a_0^2)}{c_0 r_0}, \quad g_4^{k,\nu}(x) = -\frac{k\nu}{r(x)}(c_0^2 - a_0^2).$$

$$\chi_{3,1}^0 = \frac{1}{c_0^2}; \qquad \chi_{4,4}^0 = \frac{1}{c_0^2} = \chi_{3,1}^0;$$

$$\chi_{5,1}(x) = -\frac{3}{r^2(x)}, \quad \chi_{5,2}^{m,\zeta;k,\nu}(x) = \frac{mk}{r^2(x)} + \zeta\,\nu,$$

$$\chi_{5,3}^{m,\zeta;k,\nu}(x) = \frac{a_0^2}{\rho_0}\Big(\frac{m(m+k)}{r^2(x)} + \zeta(\zeta+\nu)\Big),$$

$$\chi_{5,4}(x) = -\frac{1}{2c_0 r(x)}, \quad \chi_{5,5}(x) = \frac{2}{c_0 r(x)}, \quad \chi_{5,6}(x) = \frac{c_0^2 - 4a_0^2}{2c_0\rho_0 r(x)};$$

$$\chi_{6,1}^0 = \frac{1}{c_0^2} = \chi_{4,4}^0 = \chi_{3,1}^0, \quad \chi_{6,3}^0 = \frac{1}{\rho_0};$$

$$\chi_{7,1}^0 = -\frac{1}{2c_0 r_0}, \quad \chi_{7,2}^0 = \frac{2}{c_0 r_0}, \quad \chi_{7,3}^0 = \frac{4a_0^2 - c_0^2}{2c_0\rho_0 r_0};$$

$$\chi_{8,1}^{m;k}(x) = -\frac{(m+k) - \mathrm{i}m}{c_0 r(x)}, \quad \chi_{8,2}^{m;k}(x) = \frac{2(m+k) - \mathrm{i}m}{c_0 r(x)},$$

$$\chi_{8,3}^{m;k}(x) = -\frac{(m+k)(c_0^2 - 2a_0^2)}{c_0\rho_0 r(x)};$$

$$\chi_{9,1}^{m;k}(x) = \frac{(m-k) + \mathrm{i}m(1-2k)}{2r^2(x)}, \quad \chi_{9,2}^{m;k}(x) = \frac{-2(m+k) - \mathrm{i}(3m+4k)}{2r^2(x)},$$

$$\chi_{9,3}^{m,k}(x) = \frac{(m+k)(c_0^2 - 2a_0^2 + 4\mathrm{i}a_0^2)}{2\rho_0 r^2(x)},$$

$$\chi_{9,5}^{m}(x) = -\frac{\mathrm{i}m}{c_0 r(x)}, \quad \chi_{9,6}^{m}(x) = \frac{\mathrm{i}ma_0^2}{r(x)c_0\rho_0};$$

$$\chi_{10,2}^{0,m} = \frac{\mathrm{i}m\,c_0}{a_0^2 r_0}, \quad \chi_{10,3}^{0,m} = \frac{\mathrm{i}m\,c_0}{\rho_0 r_0};$$

$$\chi_{11,1}^{\zeta;\nu}(x) = -\frac{\zeta(1-\mathrm{i}) + \nu}{c_0}, \quad \chi_{11,2}^{\zeta;\nu}(x) = -\frac{\zeta(\mathrm{i}-2) - 2\nu}{c_0},$$

$$\chi_{11,3}^{\zeta;\nu}(x) = -\frac{(\zeta+\nu)(c_0^2 - a_0^2)}{c_0\rho_0};$$

$$\chi_{12,1}^{\zeta;\nu}(x) = \frac{\zeta(1-\mathrm{i}) + \nu}{2r(x)}, \ \chi_{12,2}^{\zeta;\nu}(x) = \frac{\zeta(\mathrm{i}-2) - 2\nu}{2r(x)}, \ \chi_{12,3}^{\zeta;\nu}(x) = \frac{(\zeta+\nu)(c_0^2 - a_0^2)}{2\rho_0 r(x)},$$

$$\chi_{12,5}^{\zeta;\nu}(x) = \frac{\mathrm{i}\zeta}{c_0}, \quad \chi_{12,6}^{\zeta;\nu}(x) = \frac{\mathrm{i}\zeta a_0^2}{c_0\rho_0};$$

$$\chi_{13,2}^{0,m} = \frac{\mathrm{i}\zeta\,c_0}{a_0^2}, \quad \chi_{13,3}^{0,m} = \frac{\mathrm{i}\zeta\,c_0}{\rho_0};$$

Замечание 2.3. Обращаем внимание на то, что в уравнениях (2.36), (2.38), (2.40), (2.42), (2.44), (2.46) только коэффициенты $d_0^{k,\nu}(x)$, $f_0^{k,\nu}(x)$, $g_0^{k,\nu}(x)$ зависят от k^2 и ν^2, все остальные коэффициенты зависят от k и ν линейно.

Сформулируем обратные задачи для построенных уравнений (2.31)–(2.47).

Обратная задача 2.3. Пусть T, r_0 – заданные положительные числа. Определить неизвестные константы c_0, a_0, ρ_0 и функцию $q_0^{m,\zeta}(x)$, входящие в равенства (2.31), (2.33), если относительно решения $U^0(t,r)$ прямой задачи (2.31)–(2.33), известна информация (2.34), где $H_0^{m,\zeta}(t)$ – заданная функция при $t \in [0,T]$. Параметры m и ζ полагаются равными $m = 0$, $\zeta = 0$ и $m = 1$, $\zeta = 1$.

Обратная задача 2.4. Пусть T, r_0, c_0, a_0, p_0 – заданные положительные константы; $0 < T < 2r_0/c_0$. Определить неизвестные функции $\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x)$, $\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x)$, $\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x)$, входящие в равенства (2.36), (2.38), (2.40), (2.42), (2.44), (2.46), если относительно решения прямой задач (2.36)–(2.38), (2.40)–(2.42), (2.44)–(2.46), известна информация (2.39), (2.43), (2.47), где $h^{k,\nu}_{r,m,\zeta}(t)$, $h^{k,\nu}_{\varphi,m,\zeta}(t)$, $h^{k,\nu}_{z,m,\zeta}(t)$ – заданные функции при $t \in [0,T]$; функция $U_0^{m,\zeta}(x,t)$, входящая в равенства (2.36), (2.38), (2.40), (2.42), (2.44), (2.46) – известна и является решением прямой задачи (2.31)–(2.33). Параметры m и ζ полагаются равными $m = 1$, $\zeta = 1$.

Замечание 2.4. Именно при нахождении значений $\widehat{c}_{1,0,0}(0)$, $\widehat{a}_{1,0,0}(0)$, $\widehat{\rho}_{1,0,0}(0)$ возникла необходимость введения дополнительных отличных от нуля параметров m и ζ. Если бы их не было, то определить значения $\widehat{c}_{1,k,\nu}(0)$, $\widehat{a}_{1,k,\nu}(0)$, $\widehat{\rho}_{1,k,\nu}(0)$ при $k = 0$, $\nu = 0$ мы бы не смогли. Однако, нам для нахождения значений $\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$, $\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$, $\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$ нулевых гармоник вполне подходит вариант, когда $m + k = 0$ и $\zeta + \nu = 0$, т.е. при выборе $m = 1$ и $\zeta = 1$ получаем $k = -1$, $\nu = -1$.

3. Структура решения прямой задачи (2.31)–(2.34) в области $\mathcal{D}_T^0 = \{(x,t) \mid 0 < x < t < T - x\}$

Исследование структуры прямой задачи (2.31)–(2.34) проводится аналогично работам [1]–[2], поэтому ограничимся замечанием и формулировкой леммы о свойствах решения прямой задачи (2.31)–(2.34).

Замечание 3.1. Пусть r_0, c_0, a_0, ρ_0, T, $T < 2r_{0/c_0}$ – заданные положительные числа. Пусть $q^{m,\zeta}(x)$ – известная функция. Из равенств (2.31), (2.34) следует, что структура решения в области $\mathcal{D}_T^0$ имеет вид

$$U_0^{m,\zeta}(x,t) = \alpha_1\theta_1(t-x) + \alpha_{2,m,\zeta}(x)\theta_2(t-x) + \alpha_{3,m,\zeta}(x)\theta_3(t-x) + \dots, \tag{3.1}$$

где $\theta_0(t)$ – функция Хевисайда, $\theta_k(t) = \theta_0(t)t^k/k!$; $\alpha_1 = 1/(c_0\rho_0)$.

4. Исследование структуры решения прямой задачи (2.36)–(2.38), (2.40)–(2.42), (2.44)–(2.46) в области $\mathcal{D}_T^0$.

Рассмотрим область $\mathcal{D}_T^0$

$$\mathcal{D}_T^0 = \mathcal{D}_{*T}^0 \cup \Big\{(x,t) \,\Big|\, 0 < x < \frac{Ta_0}{a_0 + c_0},\ t = \frac{c_0}{a_0}x\Big\},$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^0_{*T} &= \mathcal{D}^0_{1T} \cup D^0_{2T},\\
\mathcal{D}^0_{1T} &= \left\{(x,t)\;\Big|\; 0<x<\frac{Ta_0}{a_0+c_0};\ \frac{c_0x}{a_0}<t<T-x\right\},\\
\mathcal{D}^0_{2T} &= \left\{(x,t)\;\Big|\; 0<x<\frac{Ta_0}{a_0+c_0};\ x<t<\frac{c_0x}{a_0}\right\}\bigcup\\
&\qquad \bigcup\left\{(x,t)\;\Big|\; \frac{Ta_0}{a_0+c_0}<x<\frac{T}{2};\ x<t<T-x\right\}.
\end{aligned}$$

Лемма 4.1. Пусть r_0, a_0, c_0, p_0 – заданные положительные числа. Положим все коэффициенты при функциях $U_0^{m,\zeta}(x,t)$,$U_{1,m,\zeta}^{k,\nu}(x,t)$, $V_{1,m,\zeta}^{k,\nu}(x,t)$,$W_{1,m,\zeta}^{k,\nu}(x,t)$, входящие в уравнения (2.31)–(2.33), (2.36)–(2.38), (2.40)–(2.42), (2.44)–(2.46), известными. Тогда структура решения прямой задачи (2.36)–(2.38), (2.40)–(2.42), (2.44)–(2.46) в области $\mathcal{D}_T^0$ имеет вид

$$\begin{aligned}
U_{1,m,\zeta}^{k,\nu}(x,t) &= \beta_{0,m,\zeta}^{k,\nu}(x)\theta_0(t-x)+\beta_{1,m,\zeta}^{k,\nu}(x)\theta_1(t-x)+\beta_{2,m,\zeta}^{k,\nu}(x)\theta_2(t-x)+\ldots+\\
&+\gamma_{3,m,\zeta}^{k,\nu}(x)\theta_3\left(t-\frac{c_0}{a_0}x\right)+\gamma_{4,m,\zeta}^{k,\nu}(x)\theta_4\left(t-\frac{c_0}{a_0}x\right)+\ldots; \qquad (4.1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{1,m,\zeta}^{k,\nu}(x,t) &= \eta_{2,m,\zeta}^{k,\nu}(0)\theta_2\left(t-\frac{c_0}{a_0}x\right)+\eta_{3,m,\zeta}^{k,\nu}(x)\theta_3\left(t-\frac{c_0}{a_0}x\right)+\ldots\\
&+\text{æ}_{1,m,\zeta}^{k,\nu}(x)\theta_1(t-x)+\text{æ}_{2,m,\zeta}^{k,\nu}(x)\theta_2(t-x)+\text{æ}_{3,m,\zeta}^{k,\nu}(x)\theta_3(t-x)+\ldots. \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{1,m,\zeta}^{k,\nu}(x,t) &= \varepsilon_{2,m,\zeta}^{k,\nu}(0)\theta_2\left(t-\frac{c_0}{a_0}x\right)+\varepsilon_{3,m,\zeta}^{k,\nu}(x)\theta_3\left(t-\frac{c_0}{a_0}x\right)+\ldots+\\
&+\omega_{1,m,\zeta}^{k,\nu}(x)\theta_1(t-x)+\omega_{2,m,\zeta}^{k,\nu}(x)\theta_2(t-x)+\omega_{3,m,\zeta}^{k,\nu}(x)\theta_3(t-x)+\ldots. \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

Доказательство. Из равенств (2.36)–(2.38), (2.40)–(2.42), (2.44)–(2.46) следует, что структура решения прямой задачи (2.36)–(2.38), (2.40)–(2.42), (2.44)–(2.46) в области $\mathcal{D}_T^0$ может быть записана следующим образом

$$\begin{aligned}
U_{1,m,\zeta}^{k,\nu}(x,t) &= \beta_{0,m,\zeta}^{k,\nu}(x)\theta_0(t-x)+\beta_{1,m,\zeta}^{k,\nu}(x)\theta_1(t-x)+\beta_{2,m,\zeta}^{k,\nu}(x)\theta_2(t-x)+\ldots+\\
&+\gamma_{2,m,\zeta}^{k,\nu}(x)\theta_2\left(t-\frac{c_0}{a_0}x\right)+\gamma_{3,m,\zeta}^{k,\nu}(x)\theta_3\left(t-\frac{c_0}{a_0}x\right)+\ldots; \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{1,m,\zeta}^{k,\nu}(x,t) &= \eta_{1,m,\zeta}^{k,\nu}(x)\theta_1\left(t-\frac{c_0}{a_0}x\right)+\eta_{2,m,\zeta}^{k,\nu}(x)\theta_2\left(t-\frac{c_0}{a_0}x\right)+\ldots+\\
&+\text{æ}_{1,m,\zeta}^{k,\nu}(x)\theta_1(t-x)+\text{æ}_{2m\nu}(x)\theta_2(t-x)+\text{æ}_{3,m,\zeta}^{k,\nu}(x)\theta_3(t-x)+\ldots. \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{1,m,\zeta}^{k,\nu}(x,t) &= \varepsilon_{1,m,\zeta}^{k,\nu}(x)\theta_1\left(t-\frac{c_0}{a_0}x\right)+\varepsilon_{2,m,\zeta}^{k,\nu}(x)\theta_2\left(t-\frac{c_0}{a_0}x\right)+\ldots+\\
&+\omega_{1,m,\zeta}^{k,\nu}(x)\theta_1(t-x)+\omega_{2,m,\zeta}^{k,\nu}(x)\theta_2(t-x)+\omega_{3,m,\zeta}^{k,\nu}(x)\theta_3(t-x)+\ldots. \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

Подставляя (4.4)–(4.6) в равенства (2.36)–(2.38), (2.40)–(2.42), (2.44)–(2.46), учитывая (3.1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых особенностях, находим равенства для определения функций $\beta_{j,m,\zeta}^{k\,nu}(x)$, $\gamma_{j,m,\zeta}^{k,\nu}(x)$, $\eta_{j,m,\zeta}^{k,\nu}(x)$, $\text{æ}_{j,m,\zeta}^{k,\nu}$, $\varepsilon_{j,m,\zeta}^{k,\nu}(x)$, $\omega_{j,m,\zeta}^{k,\nu}(x)$.

Заметим, что коэффициенты в приведённых ниже равенствах зависят от величин r_0, c_0, a_0, ρ_0 (одной или нескольких). На зависимость коэффициентов от параметров m, ζ, k, ν указывает наличие этих параметров в обозначении того или иного коэффициента.

Равенства для нахождения функций $\beta^{k\,nu}_{j,m,\zeta}(x)$ при $j=0,1,2$ имеют вид:

$$\beta^{k,\nu}_{0,m,\zeta}(x) = \mathcal{B}^0_0\int\limits_0^x \widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(\xi)\,d\,\xi, \qquad \mathcal{B}^0_0=\frac{\alpha_1}{2}\chi^0_{3,1}=\frac{1}{2\rho_0\,c_0^3}; \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}\beta^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(x) &= \beta^{0;k,\nu}_{1,m,\zeta}+\int\limits_0^x\Big(\mathcal{B}^{(1),k,\nu}_{1,0}(\xi)\beta^{k,\nu}_{0,m,\zeta}(\xi)+\mathcal{B}^{(1),m}_{1,1}(\xi)\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(\xi)\Big)\,d\,\xi+\\ &+\mathcal{B}^{(1),0}_{1,2}\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x)+\mathcal{B}^{(1),0}_{1,3}\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x),\end{aligned} \tag{4.8}$$

в слагаемое $\beta^{0;k,\nu}_{1,m,\zeta}$ входят значения $\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$ и $\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$:

$$\beta^{0;k,\nu}_{1,m,\zeta} = -\frac{1}{4\rho_0\,c_0^3}\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)-\frac{1}{2\rho_0^2\,c_0}\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0).$$

В нуле значение функции $\beta^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(x)$ имеет вид:

$$\beta^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(0) = -\mathcal{B}^0_0\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)-\alpha_1\chi^0_{6,3}\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0); \tag{4.9}$$

Функция $\beta^{k,\nu}_{2,m,\zeta}(x)$ определяется уравнением:

$$\begin{aligned}\beta^{k,\nu}_{2,m,\zeta}(x) &= \beta^{k,\nu,0}_{2,m,\zeta}+\int\limits_0^x\Big[\mathcal{B}^{k,\nu}_{2,0}(\xi)\beta^{k,\nu}_{0,m,\zeta}(\xi)+\mathcal{B}^{k,\nu}_{2,1}(\xi)\beta^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(\xi)+\\ &\qquad+\mathcal{B}^{m,\zeta;k,\nu}_{2,2}(\xi)\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x)+\mathcal{B}^{m,\zeta;k,\nu}_{2,3}(\xi)\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x)+\\ &\qquad+\mathcal{B}^{m,\zeta;k,\nu}_{2,4}(\xi)\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x)\Big]\,d\,\xi+\\ &+\mathcal{B}^{m,k}_{2,5}(x)\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x)+\mathcal{B}^{(0),0}_{2,6}\widehat{c}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(x)+\\ &+\mathcal{B}^{m,k}_{2,7}(x)\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x)+\mathcal{B}^{m,\zeta;k}_{2,8}(x)\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x)+\\ &+\mathcal{B}^{(0),0}_{2,9}\widehat{\rho}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(x),\end{aligned} \tag{4.10}$$

в слагаемое $\beta^{0;k,\nu}_{2,m,\zeta}$ входят значения $\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$, $\widehat{c}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$, $\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$, $\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$, $\widehat{\rho}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$:

$$\begin{aligned}\beta^{0;k,\nu}_{2,m,\zeta} &= \widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)\Big(\mathcal{B}^{0,m,\zeta}_{2,1}-\mathcal{B}^{(1),m,k}_{2,3}(0)\Big)+\widehat{c}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)\Big(\mathcal{B}^0_{2,4}-\mathcal{B}^{(1),0}_{2,4}\Big)+\\ &+\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)\Big(\mathcal{B}^0_{2,2}-\mathcal{B}^{(1),m,k}_{2,6}(0)\Big)+\\ &+\widehat{p}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)\Big(\mathcal{B}^{0,m,\zeta}_{2,3}-\mathcal{B}^{(1),m\zeta;k}_{2,8}(0)\Big)+\widehat{p}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)\Big(\mathcal{B}^0_{2,6}-\mathcal{B}^{(1),0}_{2,9}\Big).\end{aligned}$$

В нуле значение функции $\beta^{k,\nu}_{2,m,\zeta}(x)$ имеет вид:

$$\begin{aligned}\beta^{k,\nu}_{2,m,\zeta}(0) &= \mathcal{B}^{0,m,\zeta}_{2,1}\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)+\mathcal{B}^0_{2,2}\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)+\mathcal{B}^{0,m,\zeta}_{2,3}\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)+\\ &+\mathcal{B}^0_{2,4}\widehat{c}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)+\mathcal{B}^0_{2,6}\widehat{\rho}'_{1,m+k,\nu}(0),\end{aligned} \tag{4.11}$$

Аналогичным образом, приравнивая коэффициенты при одинаковых особенностях, получаем равенства для нахождения функций $\gamma^{k,\nu}_{j,m,\zeta}(x)$ при $j = 2,3$.

$$\gamma^{k,\nu}_{2,m,\zeta}(x) \equiv 0. \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}\gamma^{k,\nu}_{3,m,\zeta}(x) = {} & \mathcal{G}^{m,\zeta;k,\nu}_{3,1}(x)\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) + \mathcal{G}^{m,\zeta;k,\nu}_{3,2}(x)\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) + \\ & + \mathcal{G}^{m,\zeta;k,\nu}_{3,3}(x)\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0),\end{aligned} \tag{4.13}$$

Равенства для нахождения функций $\eta^{k,\nu}_{j,m,\zeta}(x)$ при $j = 1,2,3$ имеют вид:

$$\eta^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(x) \equiv 0; \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}\eta^{k,\nu}_{2,m,\zeta}(x) \equiv {} & \eta^{k,\nu}_{2,m,\zeta}(0) = \\ = {} & \mathcal{N}^{0,m,k}_{2,1}\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) + \mathcal{N}^{0,m,k}_{2,2}\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) + \mathcal{N}^{0,m,k}_{2,3}\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0),\end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}\eta^{k,\nu}_{3,m,\zeta}(x) = {} & \mathcal{N}^{m,\zeta;k,\nu}_{3,1}(x)\,\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) + \mathcal{N}^{0,m;k}_{3,2}\,\widehat{c}\,'_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) + \\ & + \mathcal{N}^{m,\zeta;k,\nu}_{3,3}(x)\,\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) + \mathcal{N}^{0,m;k}_{3,4}\,\widehat{a}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) + \\ & + \mathcal{N}^{m,\zeta;k,\nu}_{3,5}(x)\,\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) + \mathcal{N}^{0,m;k}_{3,6}\,\widehat{\rho}\,'_{1,m+k,\zeta+\nu}(0),\end{aligned} \tag{4.16}$$

Для нахождения функций $æ^{k,\nu}_{j,m,\zeta}(x)$ при $j = 1,2,3$ получили равенства:

$$æ^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(x) = \mathcal{K}^{k}_{1}(x)\beta^{k,\nu}_{0,m,\zeta}(x), \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}æ^{k,\nu}_{2,m,\zeta}(x) = {} & \mathcal{K}^{k}_{2,0}(x)\beta^{k,\nu}_{0,m,\zeta}(x) + \mathcal{K}^{k}_{2,1}(x)\beta^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(x) + \mathcal{K}^{m,k}_{2,2}(x)\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \\ & + \mathcal{K}^{m,k}_{2,3}(x)\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \mathcal{K}^{m,k}_{2,4}(x)\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x),\end{aligned} \tag{4.18}$$

В нуле значение функции $æ^{k,\nu}_{2,m,\zeta}(x)$ имеет вид:

$$\begin{aligned}æ^{k,\nu}_{2,m,\zeta}(0) = {} & \mathcal{K}^{0,m,k}_{2,1}\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) + \mathcal{K}^{0,m,k}_{2,2}\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) + \\ & + \mathcal{K}^{0,m,k}_{2,3}\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0),\end{aligned} \tag{4.19}$$

Выпишем также уравнение для производной функции $æ^{k,\nu}_{2,m,\zeta}(x)$:

$$\begin{aligned}\Big(æ^{k,\nu}_{2,m,\zeta}(x)\Big)' = {} & \mathcal{K}^{(1),k,\nu}_{2,0}(x)\beta^{k,\nu}_{0,m,\zeta}(x) + \mathcal{K}^{(1),k}_{2,1}(x)\beta^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(x) + \\ & + \mathcal{K}^{(1),m,k}_{2,2}(x)\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \mathcal{K}^{(1),m,k}_{2,3}(x)\widehat{c}\,'_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \\ & + \mathcal{K}^{(1),m,k}_{2,4}(x)\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \mathcal{K}^{(1),m,k}_{2,5}(x)\widehat{a}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \\ & + \mathcal{K}^{(1),m,k}_{2,6}(x)\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \mathcal{K}^{(1),m,k}_{2,7}(x)\widehat{\rho}\,'_{1,m+k,\zeta+\nu}(x),\end{aligned} \tag{4.20}$$

Также нам потребуются уравнения для функции $æ^{k,\nu}_{3,m,\zeta}(x)$ и значения $æ^{k,\nu}_{3,m,\zeta}(0)$:

$$\begin{aligned}æ^{k,\nu}_{3,m,\zeta}(x) = {} & \mathcal{K}^{k,\nu}_{3,0}(x)\beta^{k,\nu}_{0,m,\zeta}(x) + \mathcal{K}^{k}_{3,1}(x)\beta^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(x) + \\ & + \mathcal{K}^{k}_{3,2}(x)\beta^{k,\nu}_{2,m,\zeta}(x) + \mathcal{K}^{m,\zeta;k}_{3,3}(x)\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \\ & + \mathcal{K}^{m,k}_{3,4}(x)\widehat{c}\,'_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \mathcal{K}^{m,\zeta;k}_{3,5}(x)\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \\ & + \mathcal{K}^{m,k}_{3,6}(x)\widehat{a}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \mathcal{K}^{m,\zeta;k}_{3,7}(x)\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \\ & + \mathcal{K}^{m,k}_{3,8}(x)\widehat{\rho}\,'_{1,m+k,\zeta+\nu}(x),\end{aligned} \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned}
\text{æ}^{k,\nu}_{3,m,\zeta}(0) = {} & \mathcal{K}^{0,m,\zeta;k}_{3,1}\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) + \mathcal{K}^{0,m,k}_{3,2}\widehat{c}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) + \\
& + \mathcal{K}^{0,m,\zeta;k}_{3,3}\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) + \mathcal{K}^{0,m,k}_{3,4}\widehat{a}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) + \\
& + \mathcal{K}^{0,m,\zeta;k}_{3,5}\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) + \mathcal{K}^{0,m,k}_{3,6}\widehat{\rho}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(0),
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Равенства для нахождения функций $\varepsilon^{k,\nu}_{j,m,\zeta}(x)$ при $j = 1, 2, 3$ имеют вид:

$$\varepsilon^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(x) \equiv 0. \tag{4.23}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{k,\nu}_{2,m,\zeta}(x) \equiv {} & \varepsilon^{k,\nu}_{2,m,\zeta}(0) = \\
& = \mathcal{E}^{0,\zeta,\nu}_{2,1}\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) + \mathcal{E}^{0,\zeta,\nu}_{2,2}\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) + \mathcal{E}^{0,\zeta,\nu}_{2,3}\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0),
\end{aligned} \tag{4.24}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{k,\nu}_{3,m,\zeta}(x) = {} & \mathcal{E}^{m,\zeta;k,\nu}_{3,1}(x)\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) + \mathcal{E}^{0,\zeta,\nu}_{3,2}\widehat{c}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) + \\
& + \mathcal{E}^{m,\zeta;k,\nu}_{3,3}(x)\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) + \mathcal{E}^{0,\zeta;\nu}_{3,4}\widehat{a}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) + \\
& + \mathcal{E}^{m,\zeta;k,\nu}_{3,5}(x)\widehat{p}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) + \mathcal{E}^{0,\zeta;\nu}_{3,6}\widehat{p}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(0),
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Теперь выпишем равенства для нахождения функций $\omega^{k,\nu}_{j,m,\zeta}(x)$ при $j = 1, 2, 3$:

$$\omega^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(x) = \mathcal{W}^{\nu}_{1}(x)\beta^{k,\nu}_{0,m,\zeta}(x), \tag{4.26}$$

$$\begin{aligned}
\omega^{k,\nu}_{2,m,\zeta}(x) = {} & \mathcal{W}^{\nu}_{2,0}(x)\beta^{k,\nu}_{0,m,\zeta}(x) + \mathcal{W}^{\nu}_{2,1}(x)\beta^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(x) + \mathcal{W}^{\zeta,\nu}_{2,2}(x)\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \\
& + \mathcal{W}^{\zeta,\nu}_{2,3}(x)\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \mathcal{W}^{\zeta,\nu}_{2,4}(x)\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x),
\end{aligned} \tag{4.27}$$

В нуле значение функции $\omega^{k,\nu}_{2,m,\zeta}(x)$ имеет вид:

$$\begin{aligned}
\omega^{k,\nu}_{2,m,\zeta}(0) = {} & \mathcal{W}^{0,\zeta,\nu}_{2,1}\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) + \mathcal{W}^{0,\zeta,\nu}_{2,2}\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) + \\
& + \mathcal{W}^{0,\zeta,\nu}_{2,3}\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0),
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Выпишем уравнение для определения производной функции $\omega^{k,\nu}_{2,m,\zeta}(x)$:

$$\begin{aligned}
\Big(\omega^{k,\nu}_{2,m,\zeta}(x)\Big)' = {} & \mathcal{W}^{(1),k,\nu}_{2,0}(x)\beta^{k,\nu}_{0,m,\zeta}(x) + \mathcal{W}^{(1),\nu}_{2,1}(x)\beta^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(x) + \\
& + \mathcal{W}^{(1),m,\zeta;\nu}_{2,2}(x)\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \mathcal{W}^{(1),\zeta;\nu}_{2,3}(x)\widehat{c}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \\
& + \mathcal{W}^{(1),\zeta;\nu}_{2,4}(x)\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \mathcal{W}^{(1),\zeta;\nu}_{2,5}(x)\widehat{a}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \\
& + \mathcal{W}^{(1),\zeta;\nu}_{2,6}(x)\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \mathcal{W}^{(1),\zeta;\nu}_{2,7}(x)\widehat{\rho}'_{1,m+k,\zeta+\nu},
\end{aligned} \tag{4.29}$$

И, наконец, выпишем уравнения для функции $\omega^{k,\nu}_{3,m,\zeta}(x)$ и значения $\omega^{k,\nu}_{3,m,\zeta}(0)$:

$$\begin{aligned}
\omega^{k,\nu}_{3,m,\zeta}(x) = {} & \mathcal{W}^{k,\nu}_{3,0}(x)\beta^{k,\nu}_{0,m,\zeta}(x) + \mathcal{W}^{\nu}_{3,1}(x)\beta^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(x) + \\
& + \mathcal{W}^{\nu}_{3,2}(x)\beta^{k,\nu}_{2,m,\zeta}(x) + \mathcal{W}^{m,\zeta;\nu}_{3,3}(x)\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \\
& + \mathcal{W}^{\zeta;\nu}_{3,4}(x)\widehat{c}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \mathcal{W}^{m,\zeta;\nu}_{3,5}(x)\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \\
& + \mathcal{W}^{\zeta;\nu}_{3,6}(x)\widehat{a}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \mathcal{W}^{m,\zeta;\nu}_{3,7}(x)\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \\
& + \mathcal{W}^{\zeta;\nu}_{3,8}(x)\widehat{\rho}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(x),
\end{aligned} \tag{4.30}$$

$$\begin{aligned}\omega^{k,\nu}_{3,m,\zeta}(0) = {} & \mathcal{W}^{0,m,\zeta;\nu}_{3,1}\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) + \mathcal{W}^{0,\zeta;\nu}_{3,2}\widehat{c}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) + \\ & +\mathcal{W}^{0,m,\zeta;\nu}_{3,3}\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) + \mathcal{W}^{0,\zeta;\nu}_{3,4}\widehat{a}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) + \\ & +\mathcal{W}^{0,m,\zeta;\nu}_{3,5}\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) + \mathcal{W}^{0,\zeta;\nu}_{3,6}\widehat{\rho}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(0),\end{aligned} \tag{4.31}$$

Так как функции, входящие в уравнения (2.36)–(2.38), (2.40)–(2.42), (2.44)–(2.46), полагаем известными, то и коэффициенты $\beta^{k,\nu}_{0;m,\zeta}(x)$, $\beta^{k,\nu}_{1;m,\zeta}(x)$, $\beta^{k,\nu}_{2;m,\zeta}(x)$; $\gamma^{k,\nu}_{2;m,\zeta}(x)$, $\gamma^{k,\nu}_{3;m,\zeta}(x)$; $\eta^{k,\nu}_{1;m,\zeta}(x)$, $\eta^{k,\nu}_{2;m,\zeta}(x)$, $\eta^{k,\nu}_{3;m,\zeta}(x)$; $\text{æ}^{k,\nu}_{1;m,\zeta}(x)$, $\text{æ}^{k,\nu}_{2;m,\zeta}(x)$, $\text{æ}^{k,\nu}_{3;m,\zeta}(x)$; $\varepsilon^{k,\nu}_{1;m,\zeta}(x)$, $\varepsilon^{k,\nu}_{2;m,\zeta}(x)$, $\varepsilon^{k,\nu}_{3;m,\zeta}(x)$; $\omega^{k,\nu}_{1;m,\zeta}(x)$, $\omega^{k,\nu}_{2;m,\zeta}(x)$, $\omega^{k,\nu}_{3;m,\zeta}(x)$, определяемые приведенными выше соотношениями, также можем считать известными. □

Следствие 4.1. В силу представлений (4.4)–(4.6) с учетом равенств (4.12), (4.14), (4.15), (4.23), (4.24), имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial^n U^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial t^n}\Big|_{t=x+0} &= \beta^{k,\nu}_{n,m,\zeta}(x),\ n=\overline{0,2}, \\ \frac{\partial U^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x}\Big|_{t=x+0} &= \Big(\beta^{k,\nu}_{0,m,\zeta}(x)\Big)' - \beta^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(x),\end{aligned} \tag{4.32}$$

$$\begin{aligned}V^{k,\nu}_{1,m,\zeta}\Big|_{t=x+0} = 0,\quad \frac{\partial^n V^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial t^n}\Big|_{t=x+0} &= \text{æ}^{k,\nu}_{n,m,\zeta}(x),\ k=\overline{1,3}, \\ \frac{\partial V^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x}\Big|_{t=x+0} &= -\text{æ}^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(x),\end{aligned} \tag{4.33}$$

$$\frac{\partial^3 V^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial t^2\partial x}\Big|_{t=x+0} = \Big(\text{æ}^{k,\nu}_{2,m,\zeta}(x)\Big)' - \text{æ}^{k,\nu}_{3,m,\zeta}(x), \tag{4.34}$$

$$\begin{aligned}W^{k,\nu}_{1,m,\zeta}\Big|_{t=x+0} = 0,\quad \frac{\partial^n W^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial t^n}\Big|_{t=x+0} &= \omega^{k,\nu}_{n,m,\zeta}(x),\ n=\overline{1,3}, \\ \frac{\partial W^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x}\Big|_{t=x+0} &= -\omega^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(x),\end{aligned} \tag{4.35}$$

$$\frac{\partial^3 W^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial t^2\partial x}\Big|_{t=x+0} = \Big(\omega^{k,\nu}_{2,m,\zeta}(x)\Big)' - \omega^{k,\nu}_{3,m,\zeta}(x), \tag{4.36}$$

$$\Big[U^{k,\nu}_{1,m,\zeta}\Big]_{t=\frac{c_0}{a_0}x} = 0,\quad \left[\frac{\partial U^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial t}\right]_{t=\frac{c_0}{a_0}x} = 0,\quad \left[\frac{\partial U^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x}\right]_{t=\frac{c_0}{a_0}x} = 0; \tag{4.37}$$

$$\left[\frac{\partial^2 U^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial t^2}\right]_{t=\frac{c_0}{a_0}x} = 0,\quad \left[\frac{\partial^2 U^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x^2}\right]_{t=\frac{c_0}{a_0}x} = 0,\quad \left[\frac{\partial^2 U^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial t\partial x}\right]_{t=\frac{c_0}{a_0}x} = 0; \tag{4.38}$$

$$\left[\frac{\partial^3 U^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial t^3}\right]_{t=\frac{c_0}{a_0}x} = \gamma^{k,\nu}_{3,m,\zeta}(x),\quad \left[\frac{\partial^3 U^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial t^2\partial x}\right]_{t=\frac{c_0}{a_0}x} = -\frac{c_0}{a_0}\gamma^{k,\nu}_{3,m,\zeta}(x), \tag{4.39}$$

$$\left[V_{1,m,\zeta}^{k,\nu}\right]_{t=\frac{c_0}{a_0}x}=0,\quad \left[\frac{\partial V_{1,m,\zeta}^{k,\nu}}{\partial t}\right]_{t=\frac{c_0}{a_0}x}=0,\quad \left[\frac{\partial V_{1,m,\zeta}^{k,\nu}}{\partial x}\right]_{t=\frac{c_0}{a_0}x}=0; \tag{4.40}$$

$$\begin{gathered}\left[\frac{\partial^2 V_{1,m,\zeta}^{k,\nu}}{\partial t^2}\right]_{t=\frac{c_0}{a_0}x}\equiv \eta_{2,m,\zeta}^{k,\nu}(0),\quad \left[\frac{\partial^3 V_{1,m,\zeta}^{k,\nu}}{\partial t^3}\right]_{t=\frac{c_0}{a_0}x}=\eta_{3,m,\zeta}^{k,\nu}(x),\\ \left[\frac{\partial^3 V_{1,m,\zeta}^{k,\nu}}{\partial t^2\partial x}\right]_{t=\frac{c_0}{a_0}x}=-\frac{c_0}{a_0}\eta_{3,m,\zeta}^{k,\nu}(x),\end{gathered} \tag{4.41}$$

$$\left[W_{1,m,\zeta}^{k,\nu}\right]_{t=\frac{c_0}{a_0}x}=0,\quad \left[\frac{\partial W_{1,m,\zeta}^{k,\nu}}{\partial t}\right]_{t=\frac{c_0}{a_0}x}=0,\quad \left[\frac{\partial W_{1,m,\zeta}^{k,\nu}}{\partial x}\right]_{t=\frac{c_0}{a_0}x}=0; \tag{4.42}$$

$$\begin{gathered}\left[\frac{\partial^2 W_{1,m,\zeta}^{k,\nu}}{\partial t^2}\right]_{t=\frac{c_0}{a_0}x}\equiv \varepsilon_{2,m,\zeta}^{k,\nu}(0),\quad \left[\frac{\partial^3 W_{1,m,\zeta}^{k,\nu}}{\partial t^3}\right]_{t=\frac{c_0}{a_0}x}=\varepsilon_{3,m,\zeta}^{k,\nu}(x),\\ \left[\frac{\partial^3 W_{1,m,\zeta}^{k,\nu}}{\partial t^2\partial x}\right]_{t=\frac{c_0}{a_0}x}=-\frac{c_0}{a_0}\varepsilon_{3,m,\zeta}^{k,\nu}(x),\end{gathered} \tag{4.43}$$

Замечание 4.1. Из равенств (4.32)–(4.43) видно, что функция $U_{1,m,\zeta}^{k,\nu}(x,t)$ и ее производные второго порядка непрерывны при переходе через характеристику $t=c_0x/a_0$. Функции $V_{1,m,\zeta}^{k,\nu}(x,t)$, $W_{1,m,\zeta}^{k,\nu}(x,t)$ и их производные первого порядка также непрерывны при переходе через характеристику $t=c_0x/a_0$. А скачки производных второго порядка функций $V^{m\nu}(x,t)$ и $W^{m\nu}(x,t)$ при переходе через характеристику $t=c_0x/a_0$ есть известные постоянные величины, не зависящие от точки (x,t).

5. Решение прямых задач (2.31)–(2.34) и (2.36)–(2.38), (2.40)–(2.42), (2.44)–(2.46) в области $\mathcal{D}_T^0$.

Основным результатом этого раздела является исследование решения прямой задачи (2.36)–(2.38), (2.40)–(2.42), (2.44)–(2.46). Именно с него мы и начнём изложение. Результат, относящийся к решению прямой задачи (2.31)–(2.34), получается аналогичным образом и будет сформулирован в конце данного раздела.

Лемма 5.1. Пусть r_0, c_0, a_0, ρ_0,T – фиксированные положительные числа, $T<2r_0/c_0$, а коэффициенты, входящие в равенства (2.36)–(2.38), (2.40)–(2.42), (2.44)–(2.46), есть известные функции. Тогда прямая задача (2.36)–(2.38), (2.40)–(2.42), (2.44)–(2.46) имеет единственное решение

$$\Big(U_{1,m,\zeta}^{k,\nu}(x,t),V_{1,m,\zeta}^{k,\nu}(x,t),W_{1,m,\zeta}^{k,\nu}(x,t)\Big)$$

в классе функций $\mathrm{C}^2(\mathcal{D}_{*T}^0)\cap \mathrm{C}^1(\overline{\mathcal{D}}_T^0)$.

Доказательство. Обозначим

$$\begin{aligned} z_{1,m,\zeta}^{k,\nu}(x) &= \chi_{3,1}^0\,\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x),\\ z_{2,m,\zeta}^{k,\nu}(x) &= \chi_{4,4}^0\,\widehat{c}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(x)+\frac{\widehat{\rho}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(x)}{\rho_0}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
z^{k,\nu}_{3,m,\zeta}(x) &= \chi_{5,1}(x)\widehat{c}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \chi_{5,2}(x)\widehat{a}'_{1,m+k,\nu}(x) + \\
&\quad + \chi_{5,3}(x)\widehat{p}'_{1,m+k,\nu}(x) + \chi^{m,k}_{5,4}(x)\widehat{a}_{1,m+k,\nu}(x) + \\
&\quad + \chi^{m,k}_{5,5}(x)\widehat{p}_{1,m+k,\nu}(x), \\
z^{k,\nu}_{4,m,\zeta}(0) &= \chi^{0}_{6,1}\,\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) + \chi^{0}_{6,3}\,\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0), \\
z^{k,\nu}_{5,m,\zeta}(0) &= \chi^{0}_{7,1}\widehat{c}_{1,m+k,\nu}(0) + \chi^{0}_{7,2}\widehat{a}_{1,m+k,\nu}(0) + \chi^{0}_{7,3}\widehat{p}_{1,m+k,\nu}(0), \\
z^{k,\nu}_{6,m,\zeta}(x) &= \chi^{m;k}_{8,1}(x)\,\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \chi^{m;k}_{8,2}(x)\,\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \\
&\quad + \chi^{m;k}_{8,3}(x)\,\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x), \\
z^{k,\nu}_{7,m,\zeta}(x) &= \chi^{m;k}_{9,1}(x)\,\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \chi^{m;k}_{9,2}(x)\,\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \\
&\quad + \chi^{m,k}_{9,3}(x)\,\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \chi^{m}_{9,5}(x)\,\widehat{a}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \\
&\quad + \chi^{m;k}_{9,6}(x)\,\widehat{\rho}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(x), \\
z^{k,\nu}_{8,m,\zeta}(0) &= \chi^{0,m}_{10,2}\,\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) + \chi^{0,m}_{10,3}\,\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0), \\
z^{k,\nu}_{9,m,\zeta}(x) &= \chi^{\zeta;\nu}_{11,1}(x)\,\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \chi^{\zeta;\nu}_{11,2}(x)\,\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \\
&\quad + \chi^{\zeta;\nu}_{11,3}(x)\,\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x), \\
z^{k,\nu}_{10,m,\zeta}(x) &= \chi^{\zeta;\nu}_{12,1}(x)\,\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \chi^{\zeta;\nu}_{12,2}(x)\,\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \\
&\quad + \chi^{\zeta;\nu}_{12,3}(x)\,\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \chi^{\zeta;\nu}_{12,5}(x)\,\widehat{a}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \\
&\quad + \chi^{\zeta;\nu}_{12,6}(x)\,\widehat{\rho}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(x); \qquad (5.1)\\
z^{k,\nu}_{11,m,\zeta}(0) &= \chi^{0,m}_{13,2}\,\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) + \chi^{0,m}_{13,3}\,\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0); \\
\Phi^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(x,t) &= z^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(x)\,\frac{\partial^2 U^{m,\zeta}_0}{\partial x^2}(x,t) + z^{k,\nu}_{2,m,\zeta}(x)\,\frac{\partial U^{m,\zeta}_0}{\partial x}(x,t) + \\
&\quad + z^{k,\nu}_{3,m,\zeta}(x)\,U^{m,\zeta}_0(x,t), \\
\Phi^{k,\nu}_{2,m,\zeta}(t) &= z^{k,\nu}_{4,m,\zeta}(0)\,\frac{\partial U^{m,\zeta}_0}{\partial x}(0,t) + z^{k,\nu}_{5,m,\zeta}(0)\,U^{m,\zeta}_0(0,t), \\
\Phi^{k,\nu}_{3,m,\zeta}(x,t) &= z^{k,\nu}_{6,m,\zeta}(x)\,\frac{\partial U^{m,\zeta}_0}{\partial x}(x,t) + z^{k,\nu}_{7,m,\zeta}(x)\,U^{m,\zeta}_0(x,t), \\
\Phi^{k,\nu}_{4,m,\zeta}(t) &= z^{k,\nu}_{8,m,\zeta}(0)\,U^{m,\zeta}_0(0,t), \\
\Phi^{k,\nu}_{5,m,\zeta}(x,t) &= z^{k,\nu}_{9,m,\zeta}(x)\,\frac{\partial U^{m,\zeta}_0}{\partial x}(x,t) + z^{k,\nu}_{10,m,\zeta}(x)\,U^{m,\zeta}_0(x,t), \\
\Phi^{k,\nu}_{6,m,\zeta}(t) &= z^{k,\nu}_{11,m,\zeta}(0)\,U^{m,\zeta}_0(0,t); \\
P^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(x,t) &= d^{k,\nu}_0(x)\,U^{k,\nu}_{1,m,\zeta} + f^k_3(x)\,\frac{\partial V^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x} + f^k_4(x)\,V^{k,\nu}_{1,m,\zeta} + \\
&\quad + g^\nu_1(x)\,\frac{\partial W^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x} + g^\nu_2(x)\,W^{k,\nu}_{1,m,\zeta} + \Phi^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(x,t), \\
P^{k,\nu}_{2,m,\zeta}(x,t) &= f^{k,\nu}_0(x)\,V^{k,\nu}_{1,m,\zeta} + d^k_2(x)\,\frac{\partial U^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x} + d^k_3(x)\,U^{k,\nu}_{1,m,\zeta} + \\
&\quad + g^{k,\nu}_4(x)\,W^{k,\nu}_{1,m,\zeta} + \Phi^{k,\nu}_{3,m,\zeta}(x,t), \\
P^{k,\nu}_{3,m,\zeta}(x,t) &= g^{k,\nu}_0(x)\,W^{k,\nu}_{1,m,\zeta} + d^\nu_5(x)\,\frac{\partial U^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x} + d^\nu_6(x)\,U^{k,\nu}_{1,m,\zeta} + \\
&\quad + f^{k,\nu}_6(x)\,V^{k,\nu}_{1,m,\zeta} + \Phi^{k,\nu}_{5,m,\zeta}(x,t).
\end{aligned}
$$

Перепишем уравнения (2.36), (2.38) следующим образом

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\right)U^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(x,t)=P^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(x,t),\quad t>x. \tag{5.2}$$

$$\Big(\frac{\partial U^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x}+d^0_1\,U^{k,\nu}_{1,m,\zeta}\Big)\Big|_{x=0}=-\Big(f^{0,k}_5\,V^{k,\nu}_{1,m,\zeta}+g^{0,\nu}_3\,W^{k,\nu}_{1,m,\zeta}+\Phi^{k,\nu}_{2,m,\zeta}(t)\Big),\quad t>0. \tag{5.3}$$

Перепишем уравнения (2.40), (2.42) в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{a_0}{c_0}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{a_0}{c_0}\frac{\partial}{\partial x}\right)V^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(x,t)=P^{k,\nu}_{2,m,\zeta}(x,t),\quad t>x. \tag{5.4}$$

$$\Big(\frac{\partial V^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x}+f^0_2\,V^{k,\nu}_{1,m,\zeta}\Big)\Big|_{x=0}=-\Big(d^{0,k}_4\,U^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(0,t)+\Phi^{k,\nu}_{4,m,\zeta}(t)\Big),\quad t>0. \tag{5.5}$$

Уравнения (2.44), (2.46) можем записать как

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{a_0}{c_0}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{a_0}{c_0}\frac{\partial}{\partial x}\right)W^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(x,t)=P^{k,\nu}_{3,m,\zeta}(x,t),\quad t>x. \tag{5.6}$$

$$\Big(\frac{\partial W^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x}+\frac{c_0}{2r_0}\,W^{k,\nu}_{1,m,\zeta}\Big)\Big|_{x=0}=-\Big(d^{0,\nu}_7\,U^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(0,t)+\Phi^{k,\nu}_{6,m,\zeta}(t)\Big),\quad t>0. \tag{5.7}$$

Замечание 5.1. Заметим, что решение задачи (5.2), (5.3) при $(x,t)\in\mathcal{D}^0_{1T}$ и $(x,t)\in\mathcal{D}^0_{2T}$ задаётся одинаковыми формулами, так как в силу замечания 4.1 функции $U^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(x,t)$, $V^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(x,t)$, $W^{k,\nu}_{1,m,\zeta}$ и их производные $\dfrac{\partial U^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x}$, $\dfrac{\partial U^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial t}$, $\dfrac{\partial V^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x}$, $\dfrac{\partial V^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial t}$, $\dfrac{\partial W^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x}$, $\dfrac{\partial W^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial t}$ непрерывны при переходе через характеристику $t=c_0x/a_0$.

5.1. **Построение системы интегральных соотношений, эквивалентных равенствам (5.2), (5.3).** Пусть $(x,t)\in\mathcal{D}^0_T$. Так как

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

то интегрируя (5.2) вдоль характеристик дифференциальных операторов $\partial/\partial t-\partial/\partial x$, $\partial/\partial t+\partial/\partial x$ и учитывая замечание 5.1, получим выражения для функций $U^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(x,t)$, $\dfrac{\partial U^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial t}$, $\dfrac{\partial U^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x}$:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial U^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial t}+\frac{\partial U^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x}\right)(x,t;\mathcal{D}^0_T)\;&=\;H^{+}_{1,2,U}(x,t),\\ \left(\frac{\partial U^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial t}-\frac{\partial U^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x}\right)(x,t;\mathcal{D}^0_T)\;&=\;H^{-}_{1,2,U}(x,t),\end{aligned} \tag{5.8}$$

$$U^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(0,t) = \int\limits_0^t \mathrm{e}^{d_1^0(t-\tau)}\Big(f_5^{0,k}\, V^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(0,\tau) + g_3^{0,\nu}\, W^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(0,\tau) + \Phi^{k,\nu}_{2,m,\zeta}(\tau) +$$

$$+ H^{+}_{1,2,U}(0,\tau)\Big)\, d\,\tau, \tag{5.9}$$

здесь

$$H^{+}_{1,2,U}(x,t) = \left(\beta^{k,\nu}_{0,m,\zeta}\right)'\left(\frac{x+t}{2}\right) - \int\limits_{\frac{x+t}{2}}^{x} P^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(\xi, t+x-\xi)\, d\,\xi,$$

$$H^{-}_{1,2,U}(x,t) = 2\Big(d_1^0\, U^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(0,t-x) + f_5^{0,k}\, V^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(0,t-x) + g_3^{0,\nu}\, W^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(0,t-x) +$$

$$+ \Phi^{k,\nu}_{2,m,\zeta}(0,t-x)\Big) + \int\limits_0^x P^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(\xi, t-x+\xi)\, d\,\xi + H^{+}_{1,2,U}(0,t-x). \tag{5.10}$$

Отсюда находим

$$\frac{\partial U^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial t}(x,t;\mathcal{D}^0_T) = \frac{1}{2}\Big(H^{-}_{1,2,U}(x,t) + H^{+}_{1,2,U}(x,t)\Big), \tag{5.11}$$

$$\frac{\partial U^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x}(x,t;\mathcal{D}^0_T) = \frac{1}{2}\Big(H^{+}_{1,2,U}(x,t) - H^{-}_{1,2,U}(x,t)\Big), \tag{5.12}$$

$$U^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(x,t;\mathcal{D}^0_T) = \beta^{k,\nu}_{0,m,\zeta}(x) + \frac{1}{2}\int\limits_x^t \Big(H^{-}_{1,2,U}(x,\tau) + H^{+}_{1,2,U}(x,\tau)\Big)\, d\,\tau. \tag{5.13}$$

5.2. **Построение системы интегральных соотношений, эквивалентных равенствам (5.4), (5.5).** Рассмотрим равенства (5.4), (5.5) и воспользуемся представлением

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{a_0^2}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{a_0}{c_0}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{a_0}{c_0}\frac{\partial}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{a_0}{c_0}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{a_0}{c_0}\frac{\partial}{\partial x}\right).$$

Интегрируя (5.4) вдоль характеристик дифференциальных операторов $\dfrac{\partial}{\partial t} - \dfrac{a_0}{c_0}\dfrac{\partial}{\partial x}$, $\dfrac{\partial}{\partial t} + \dfrac{a_0}{c_0}\dfrac{\partial}{\partial x}$ и учитывая Замечание 5.1, получим выражения для функций $V^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(x,t)$, $\dfrac{\partial V^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial t}$, $\dfrac{\partial V^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x}$, которые будут различаться в областях $\mathcal{D}^0_{1T}$ и $\mathcal{D}^0_{2T}$.

Пусть $(x,t) \in \mathcal{D}^0_{1T}$, тогда можем написать

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial V^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial t} + \frac{a_0}{c_0}\frac{\partial V^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x}\right)(x,t;\mathcal{D}^0_{1T}) &= H^{+}_{1,V}(x,t), \\ \left(\frac{\partial V^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial t} - \frac{a_0}{c_0}\frac{\partial V^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x}\right)(x,t;\mathcal{D}^0_{1T}) &= H^{-}_{1,V}(x,t), \end{aligned} \tag{5.14}$$

$$V_{1,m,\zeta}^{k,\nu}(0,t) \,=\, \int\limits_0^t \mathrm{e}^{\frac{a_0 f_2^0}{c_0}(t-\tau)}\Big[\frac{a_0}{c_0}\Big(d_4^{0,k}\, U_{1,m,\zeta}^{k,\nu}(0,\tau) + \Phi_{4,m,\zeta}^{k,\nu}(\tau)\Big) + $$

$$+ H_{1,V}^{+}(0,\tau)\Big]\, d\,\tau, \tag{5.15}$$

здесь

$$H_{1,V}^{+}(x,t) \,=\, \frac{c_0-a_0}{a_0}\, æ_{1,m,\zeta}^{k,\nu}\Big(\frac{a_0 t + c_0 x}{a_0+c_0}\Big) - \frac{c_0}{a_0}\int\limits_{\frac{a_0 t+c_0 x}{a_0+c_0}}^{x} P_{2,m,\zeta}^{k,\nu}\Big(\xi, t + \frac{c_0}{a_0}(x-\xi)\Big)\, d\,\xi,$$

$$H_{1,V}^{-}(x,t) \,=\, \frac{2a_0}{c_0}\Bigg(f_2^0\, V_{1,m,\zeta}^{k,\nu}\Big(0, t - \frac{c_0}{a_0}x\Big) + d_4^{0,k}\, U_{1,m,\zeta}^{k,\nu}\Big(0, t-\frac{c_0}{a_0}x\Big) + $$

$$+ \Phi_{4,m,\zeta}^{k,\nu}\Big(t - \frac{c_0}{a_0}x\Big)\Bigg) + H_{1,V}^{+}\Big(0, t - \frac{c_0}{a_0}x\Big) + $$

$$+\frac{c_0}{a_0}\int\limits_0^x P_{2,m,\zeta}^{k,\nu}\Big(\xi, t - \frac{c_0}{a_0}(x-\xi)\Big)\, d\,\xi. \tag{5.16}$$

Отсюда находим

$$\frac{\partial V_{1,m,\zeta}^{k,\nu}}{\partial t}(x,t;\mathcal{D}_{1T}^0) \,=\, \frac{1}{2}\Big(H_{1,V}^{-}(x,t) + H_{1,V}^{+}(x,t)\Big), \tag{5.17}$$

$$\frac{\partial V_{1,m,\zeta}^{k,\nu}}{\partial x}(x,t;\mathcal{D}_{1T}^0) \,=\, \frac{c_0}{2a_0}\Big(H_{1,V}^{+}(x,t) - H_{1,V}^{-}(x,t)\Big), \tag{5.18}$$

$$V_{1,m,\zeta}^{k,\nu}(x,t;\mathcal{D}_{1T}^0) \,=\, \frac{1}{2}\int\limits_x^t \Big(H_{1,V}^{-}(x,\tau) + H_{1,V}^{+}(x,\tau)\Big)\, d\,\tau. \tag{5.19}$$

Если $(x,t) \in \mathcal{D}_{2T}^0$, соотношения примут вид

$$\begin{aligned} \Bigg(\frac{\partial V_{1,m,\zeta}^{k,\nu}}{\partial t} + \frac{a_0}{c_0}\frac{\partial V_{1,m,\zeta}^{k,\nu}}{\partial x}\Bigg)(x,t;\mathcal{D}_{2T}^0) \,&=\, H_{2,V}^{+}(x,t), \\ \Bigg(\frac{\partial V_{1,m,\zeta}^{k,\nu}}{\partial t} - \frac{a_0}{c_0}\frac{\partial V_{1,m,\zeta}^{k,\nu}}{\partial x}\Bigg)(x,t;\mathcal{D}_{2T}^0) \,&=\, H_{2,V}^{-}(x,t), \end{aligned} \tag{5.20}$$

здесь

$$\begin{aligned} H_{2,V}^{+}(x,t) &= \frac{c_0-a_0}{c_0}\, æ_{1,m,\zeta}^{k,\nu}\Big(\frac{a_0 t + c_0 x}{a_0+c_0}\Big) - \frac{c_0}{a_0}\int\limits_{\frac{a_0 t+c_0 x}{a_0+c_0}}^{x} P_{2,m,\zeta}^{k,\nu}\Big(\xi, t + \frac{c_0}{a_0}(x-\xi)\Big)\, d\,\xi, \\ H_{2,V}^{-}(x,t) &= \frac{c_0+a_0}{c_0}\, æ_{1,m,\zeta}^{k,\nu}\Big(\frac{c_0 x - a_0 t}{c_0-a_0}\Big) + \frac{c_0}{a_0}\int\limits_{\frac{c_0 x-a_0 t}{c_0-a_0}}^{x} P_{2,m,\zeta}^{k,\nu}\Big(\xi, t - \frac{c_0}{a_0}(x-\xi)\Big)\, d\,\xi. \end{aligned} \tag{5.21}$$

Отсюда находим

$$\frac{\partial V^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial t}(x,t;\mathcal{D}^0_{2T}) \,=\, \frac{1}{2}\Big(H^-_{2,V}(x,t)+H^+_{2,V}(x,t)\Big), \tag{5.22}$$

$$\frac{\partial V^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x}(x,t;\mathcal{D}^0_{2T}) \,=\, \frac{c_0}{2a_0}\Big(H^+_{2,V}(x,t)-H^-_{2,V}(x,t)\Big), \tag{5.23}$$

$$V^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(x,t;\mathcal{D}^0_{2T}) \,=\, \frac{1}{2}\int\limits_x^t\Big(H^-_{2,V}(x,\tau)+H^+_{2,V}(x,\tau)\Big)\,d\tau. \tag{5.24}$$

5.3. **Построение системы интегральных соотношений, эквивалентных равенствам (5.6), (5.7).** Аналогично поступим с равенствами (5.6), (5.7). Интегрируя (5.6) вдоль характеристик дифференциальных операторов $\dfrac{\partial}{\partial t}-\dfrac{a_0}{c_0}\dfrac{\partial}{\partial x}$, $\dfrac{\partial}{\partial t}+\dfrac{a_0}{c_0}\dfrac{\partial}{\partial x}$ и учитывая Замечание 5.1, получим выражения для функций $W^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(x,t)$, $\dfrac{\partial W^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial t}$, $\dfrac{\partial W^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x}$, которые будут различаться в областях $\mathcal{D}^0_{1T}$ и $\mathcal{D}^0_{2T}$.

Пусть $(x,t)\in\mathcal{D}^0_{1T}$, тогда можем написать

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial W^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial t}+\frac{a_0}{c_0}\frac{\partial W^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x}\right)(x,t;\mathcal{D}^0_{1T}) \,&=\, H^+_{1,W}(x,t),\\ \left(\frac{\partial W^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial t}-\frac{a_0}{c_0}\frac{\partial W^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x}\right)(x,t;\mathcal{D}^0_{1T}) \,&=\, H^-_{1,W}(x,t),\end{aligned} \tag{5.25}$$

$$\begin{aligned}W^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(0,t) \,=\, \int\limits_0^t \mathrm{e}^{\frac{a_0}{2r_0}(t-\tau)}\Big[\frac{a_0}{c_0}\Big(d^{0,\nu}_7\,U^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(0,\tau)+\Phi^{k,\nu}_{6,m,\zeta}(\tau)\Big)\,+\\ +\,H^+_{1,W}(0,\tau)\Big]\,d\tau,\end{aligned} \tag{5.26}$$

здесь

$$H^+_{1,W}(x,t) \,=\, \frac{c_0-a_0}{a_0}\,\omega^{k,\nu}_{1,m,\zeta}\Big(\frac{a_0t+c_0x}{a_0+c_0}\Big)-\frac{c_0}{a_0}\int\limits_{\frac{a_0t+c_0x}{a_0+c_0}}^{x} P^{k,\nu}_{3,m,\zeta}\Big(\xi,t+\frac{c_0}{a_0}(x-\xi)\Big)\,d\xi,$$

$$\begin{aligned}H^-_{1,W}(x,t) \,=\, \frac{2a_0}{c_0}\Bigg(f^{\,0}_2\,W^{k,\nu}_{1,m,\zeta}\Big(0,t-\frac{c_0}{a_0}x\Big)+d^{0,\nu}_7\,U^{k,\nu}_{1,m,\zeta}\Big(0,t-\frac{c_0}{a_0}x\Big)\,+\\ +\,\Phi^{k,\nu}_{6,m,\zeta}\Big(t-\frac{c_0}{a_0}x\Big)\Bigg)+H^+_{1,W}\Big(0,t-\frac{c_0}{a_0}x\Big)\,+\\ +\frac{c_0}{a_0}\int\limits_0^x P^{k,\nu}_{3,m,\zeta}\Big(\xi,t-\frac{c_0}{a_0}(x-\xi)\Big)\,d\xi.\end{aligned} \tag{5.27}$$

Отсюда находим

$$\frac{\partial W^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial t}(x,t;\mathcal{D}^0_{1T}) = \frac{1}{2}\Big(H^-_{1,W}(x,t)+H^+_{1,W}(x,t)\Big), \tag{5.28}$$

$$\frac{\partial W^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x}(x,t;\mathcal{D}^0_{1T}) = \frac{c_0}{2a_0}\Big(H^+_{1,W}(x,t)-H^-_{1,W}(x,t)\Big), \tag{5.29}$$

$$W^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(x,t;\mathcal{D}^0_{1T}) = \frac{1}{2}\int\limits_x^t\Big(H^-_{1,W}(x,\tau)+H^+_{1,W}(x,\tau)\Big)\,d\tau. \tag{5.30}$$

Если $(x,t)\in\mathcal{D}^0_{2T}$, тогда соотношения примут вид

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial W^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial t}+\frac{a_0}{c_0}\frac{\partial W^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x}\right)(x,t;\mathcal{D}^0_{2T}) &= H^+_{2,W}(x,t),\\ \left(\frac{\partial W^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial t}-\frac{a_0}{c_0}\frac{\partial W^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x}\right)(x,t;\mathcal{D}^0_{2T}) &= H^-_{2,W}(x,t),\end{aligned} \tag{5.31}$$

здесь

$$\begin{aligned}H^+_{2,W}(x,t) &= \frac{c_0-a_0}{c_0}\,\omega^{k,\nu}_{1,m,\zeta}\Big(\frac{a_0t+c_0x}{a_0+c_0}\Big)-\frac{c_0}{a_0}\int\limits_{\frac{a_0t+c_0x}{a_0+c_0}}^{x}P^{k,\nu}_{3,m,\zeta}\Big(\xi,t+\frac{c_0}{a_0}(x-\xi)\Big)\,d\xi,\\ H^-_{2,W}(x,t) &= \frac{c_0+a_0}{c_0}\,\omega^{k,\nu}_{1,m,\zeta}\Big(\frac{c_0x-a_0t}{c_0-a_0}\Big)+\frac{c_0}{a_0}\int\limits_{\frac{c_0x-a_0t}{c_0-a_0}}^{x}P^{k,\nu}_{3,m,\zeta}\Big(\xi,t-\frac{c_0}{a_0}(x-\xi)\Big)\,d\xi.\end{aligned} \tag{5.32}$$

Отсюда находим

$$\frac{\partial W^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial t}(x,t;\mathcal{D}^0_{2T}) = \frac{1}{2}\Big(H^-_{2,W}(x,t)+H^+_{2,W}(x,t)\Big), \tag{5.33}$$

$$\frac{\partial W^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x}(x,t;\mathcal{D}^0_{2T}) = \frac{c_0}{2a_0}\Big(H^+_{2,W}(x,t)-H^-_{2,W}(x,t)\Big), \tag{5.34}$$

$$W^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(x,t;\mathcal{D}^0_{2T}) = \frac{1}{2}\int\limits_x^t\Big(H^-_{2,W}(x,\tau)+H^+_{2,W}(x,\tau)\Big)\,d\tau. \tag{5.35}$$

Уравнения (5.13), (5.19), (5.24), (5.30), (5.35) являются интегральными уравнениями типа Вольтерра, они определяют единственное непрерывное решение прямой задачи (5.2)–(5.7). Кроме того, из соотношений (5.10)–(5.13), (5.16)–(5.19), (5.21)–(5.24), (5.27)–(5.30), (5.32)–(5.35) следует, что это решение является гладким в области $\mathcal{D}^0_T$. Вычисляя производные второго порядка, получим, что $\Big(U^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(x,t),V^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(x,t),W^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(x,t)\Big)\in \mathrm{C}^2(\mathcal{D}^0_{*T})\bigcap \mathrm{C}^1(\overline{\mathcal{D}}^0_T)$. □

Лемма 5.2. Пусть r_0, c_0, a_0, ρ_0, T – фиксированные положительные числа, $T<2r_0/c_0$. Пусть коэффициенты, входящие в равенства (2.31)–(2.34) есть известные функции. Тогда прямая задача (2.31)–(2.34) имеет единственное решение $U^{m,\zeta}_0(x,t)$ в классе функций $\mathrm{C}^2(\mathcal{D}^0_T)$.

Доказательство. Как уже было сказано выше, доказательство данной леммы проводится аналогично доказательству леммы 5.1, оно приводится здесь только для того, чтобы использовать полученные формулы для оценки решения прямой задачи (2.31)–(2.34) при получении оценки условной устойчивости обратной задачи 2.3 в разделе 8.

Итак, запишем уравнения (2.31), (2.34) следующим образом

$$\frac{\partial^2 U_0^{m,\zeta}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U_0^{m,\zeta}}{\partial x^2} = q_0^{m,\zeta}(x)\, U_0^{m,\zeta}, \tag{5.36}$$

$$\frac{\partial U_0^{m,\zeta}}{\partial x}\Big|_{x=0} = -b_2^0\, U_0^{m,\zeta} - \frac{1}{c_0\rho_0}, \quad t > 0. \tag{5.37}$$

Интегрируя (5.35) вдоль характеристик дифференциальных операторов $\partial/\partial t - \partial/\partial x$, $\partial/\partial t + \partial/\partial x$ и учитывая равенство (3.1), получим следующие представления:

$$\frac{\partial U_0^{m,\zeta}}{\partial t}(x,t) = \frac{1}{2}\Big(H_{0,U}^{-}(x,t) + H_{0,U}^{+}(x,t)\Big), \tag{5.38}$$

$$\frac{\partial U_0^{m,\zeta}}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{2}\Big(H_{0,U}^{+}(x,t) - H_{0,U}^{-}(x,t)\Big), \tag{5.39}$$

$$U_0^{m,\zeta}(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_x^t \Big(H_{0,U}^{-}(x,\tau) + H_{0,U}^{+}(x,\tau)\Big)\, d\tau. \tag{5.40}$$

Здесь

$$\begin{aligned} H_{0,U}^{+}(x,t) &= -\int\limits_{\frac{x+t}{2}}^{x} q_0^{m,\zeta}(\xi) U_0^{m,\zeta}(\xi, t+x-\xi)\, d\xi, \\ H_{0,U}^{-}(x,t) &= H_{0,U}^{+}(0,t-x) + 2b_2^0\, U_0^{m,\zeta}(0,t-x) + \frac{2}{c_0\rho_0} + \\ &\quad + \int\limits_0^x q_0^{m,\zeta}(\xi) U_0^{m,\zeta}(\xi, t-x+\xi)\, d\xi. \end{aligned} \tag{5.41}$$

□

6. Решение обратных задач 2.1 и 2.3 в области $\mathcal{D}_T^0$.

Лемма 6.1. Пусть r_0, T заданные положительные числа. Тогда для однозначной разрешимости обратной задачи 2.3 в классе функций $q_0^{m,\zeta}(x) \in \mathrm{C}[0,T]$, необходимо и достаточно, чтобы функция $H_0^{m,\zeta}(t) \equiv 0$ при $t < 0$ и при $t \in [0,T]$ удовлетворяла условиям

$$H_0^{m,\zeta}(t) \in \mathrm{C}^2[0,T], \quad H_0^{m,\zeta}(+0) = 0, \quad \Big(H_0^{m,\zeta}\Big)'(+0) > 0.$$

Мы не будем останавливаться на доказательстве теоремы, оно проводится аналогично работе [3].

Замечание 6.1. Выбирая в равенстве (2.35) в качестве параметров $m = 0$, $\zeta = 0$, а также $m = 1$, $\zeta = 1$, получим

$$\begin{aligned} q_0^{0,0}(0) &= -\frac{c_0^2}{r^2(x)}, \\ q_0^{1,1}(0) &= -\frac{c_0^2}{r^2(x)} - a_0^2\Big(1+\frac{1}{r^2(x)}\Big) = q_0^{0,0}(x) - a_0^2\Big(1+\frac{1}{r^2(x)}\Big) \end{aligned} \tag{6.1}$$

– известные функции в силу леммы 6.1.

Из (6.1) находим

$$c_0^2 = -r_0^2\, q_0^{0,0}(0), \qquad a_0^2 = \frac{r_0^2}{r_0^2+1}\Big(q_0^{0,0}(0) - q_0^{1,1}(0)\Big) \tag{6.2}$$

– известные величины.

Кроме того, в силу замечания 3.1 и информации (2.34) имеет место равенство

$$\frac{1}{c_0\rho_0} = \Big(H_0^{0,0}\Big)'(+0), \tag{6.3}$$

Зная величины c_0 и a_0, из (6.3) находим ρ_0

$$\rho_0 = \frac{1}{c_0\Big(H_0^{0,0}\Big)'(+0)}. \tag{6.4}$$

7. Решение обратной задачи 2.4

Для решения обратной задачи 2.4 нам необходимо знать величины $\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$, $\widehat{c}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$, $\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$, $\widehat{a}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$, $\widehat{p}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$, $\widehat{p}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$, Поэтому рассмотрим утверждение, относящееся к их определению.

Лемма 7.1. Величины $\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0), \widehat{c}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(0), \widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0), \widehat{a}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$, $\widehat{p}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0), \widehat{p}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$, однозначно определяются данными обратной задачи 2.4.

Доказательство. Воспользуемся данными (2.39), (2.43), (2.47) обратной задачи, равенствами (4.11), (4.19), (4.28) и запишем уравнения (4.32), (4.33), (4.35) следующим образом

$$\begin{aligned} \beta_{1,m,\zeta}^{k,\nu}(0) &= \frac{\partial U_{1,m,\zeta}^{k,\nu}}{\partial t}(0,+0) = \Big(h_{r;m,\zeta}^{1,k,\nu}\Big)'(+0) = \\ &= -\mathcal{B}_0^0 \widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) - \alpha_1 \chi_{6,3}^0 \widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0), \\ æ_{2,m,\zeta}^{k,\nu}(0) &= \frac{\partial^2 V_{1,m,\zeta}^{k,\nu}}{\partial t^2}(0,+0) = \Big(h_{\varphi;m,\zeta}^{1,k,\nu}\Big)''(+0) = \\ &= \mathcal{K}_{2,1}^{0,m,k}\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) + \mathcal{K}_{2,2}^{0,m,k}\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) + \mathcal{K}_{2,3}^{0,m,k}\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0), \\ \omega_{2,m,\zeta}^{k,\nu}(0) &= \frac{\partial^2 W_{1,m,\zeta}^{k,\nu}}{\partial t^2}(0,+0) = \Big(h_{z;m,\zeta}^{1,k,\nu}\Big)''(+0) = \\ &= \mathcal{W}_{2,1}^{0,\zeta,\nu}\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) + \mathcal{W}_{2,2}^{0,\zeta,\nu}\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) + \mathcal{W}_{2,3}^{0,\zeta,\nu}\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0). \end{aligned}$$

Приведенные выше равенства запишем в матричном виде:

$$
(7.1) \qquad \begin{pmatrix} -\mathcal{B}_0^0 & 0 & -\alpha_1\chi_{6,3}^0 \\ \mathcal{K}_{2,1}^{0,m,k} & \mathcal{K}_{2,2}^{0,m,k} & \mathcal{K}_{2,3}^{0,m,k} \\ \mathcal{W}_{2,1}^{0,\zeta,\nu} & \mathcal{W}_{2,1}^{0,\zeta,\nu} & \mathcal{W}_{2,1}^{0,\zeta,\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) \\ \widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) \\ \widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(h_{r;m,\zeta}^{1,k,\nu}\right)'(+0) \\ \left(h_{\varphi;m,\zeta}^{1,k,\nu}\right)''(+0) \\ \left(h_{z;m,\zeta}^{1,k,\nu}\right)''(+0) \end{pmatrix}.
$$

Если все параметры m, k, ζ, ν не обращаются в нуль одновременно, то определитель матрицы

$$
\mathbf{K}_{1,m,\zeta}^{k,\nu} := \begin{pmatrix} -\mathcal{B}_0^0 & 0 & -\alpha_1\chi_{6,3}^0 \\ \mathcal{K}_{2,1}^{0,m,k} & \mathcal{K}_{2,2}^{0,m,k} & \mathcal{K}_{2,3}^{0,m,k} \\ \mathcal{W}_{2,1}^{0,\zeta,\nu} & \mathcal{W}_{2,1}^{0,\zeta,\nu} & \mathcal{W}_{2,1}^{0,\zeta,\nu} \end{pmatrix}
$$

отличен от нуля. Заметим также, что определитель матрицы $\mathbf{K}_{1,m,\zeta}^{k,\nu}$ отличен от нуля и в случае, когда $m+k=0$, $\zeta+\nu=0$, что позволяет из (7.1) найти величины $\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$, $\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$, $\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$, в том числе и $\widehat{c}_{1,0,0}(0)$, $\widehat{a}_{1,0,0}(0)$, $\widehat{\rho}_{1,0,0}(0)$, выразив их через данные обратной задачи 2.4.

Далее, воспользуемся данными (2.39), (2.43), (2.47) обратной задачи, равенствами (4.11), (4.19), (4.28) и запишем уравнения (4.32), (4.33), (4.35) следующим образом

$$
\begin{aligned}
\beta_{2,m,\zeta}^{k,\nu}(0) &= \frac{\partial^2 U_{1,m,\zeta}^{k,\nu}}{\partial t^2}(0,+0) = \left(h_{r;m,\zeta}^{1,k,\nu}\right)''(+0) = \\
&= \mathcal{B}_{2,1}^{0,m,\zeta}\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) + \mathcal{B}_{2,2}^{0}\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) + \mathcal{B}_{2,3}^{0,m,\zeta}\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) + \\
&\quad + \mathcal{B}_{2,4}^{0}\widehat{c}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) + \mathcal{B}_{2,6}^{0}\widehat{\rho}'_{1,m+k,\nu}(0), \\
\ae_{3,m,\zeta}^{k,\nu}(0) &= \frac{\partial^3 V_{1,m,\zeta}^{k,\nu}}{\partial t^3}(0,+0) = \left(h_{\varphi;m,\zeta}^{1,k,\nu}\right)'''(+0) = \\
&= \mathcal{K}_{3,1}^{0,m,\zeta;k}\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) + \mathcal{K}_{3,2}^{0,m,k}\widehat{c}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) + \\
&\quad + \mathcal{K}_{3,3}^{0,m,\zeta;k}\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) + \mathcal{K}_{3,4}^{0,m,k}\widehat{a}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) + \\
&\quad + \mathcal{K}_{3,5}^{0,m,\zeta;k}\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) + \mathcal{K}_{3,6}^{0,m,k}\widehat{\rho}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(0), \\
\omega_{3,m,\zeta}^{k,\nu}(0) &= \frac{\partial^3 W_{1,m,\zeta}^{k,\nu}}{\partial t^3}(0,+0) = \left(h_{z;m,\zeta}^{1,k,\nu}\right)'''(+0) = \\
&= \mathcal{W}_{3,1}^{0,m,\zeta;\nu}\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) + \mathcal{W}_{3,2}^{0,\zeta;\nu}\widehat{c}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) + \\
&\quad + \mathcal{W}_{3,3}^{0,m,\zeta;\nu}\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) + \mathcal{W}_{3,4}^{0,\zeta;\nu}\widehat{a}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) + \\
&\quad + \mathcal{W}_{3,5}^{0,m,\zeta;\nu}\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) + \mathcal{W}_{3,6}^{0,\zeta;\nu}\widehat{\rho}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(0),
\end{aligned}
$$

Приведенные выше равенства запишем в матричном виде

$$
(7.2) \qquad \begin{pmatrix} \mathcal{B}_{2,4}^0 & 0 & \mathcal{B}_{2,6}^0 \\ \mathcal{K}_{3,2}^{0,m,k} & \mathcal{K}_{3,4}^{0,m,k} & \mathcal{K}_{3,6}^{0,m,k} \\ \mathcal{W}_{3,2}^{0,\zeta;\nu} & \mathcal{W}_{3,4}^{0,\zeta;\nu} & \mathcal{W}_{3,6}^{0,\zeta;\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{c}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) \\ \widehat{a}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) \\ \widehat{\rho}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) \end{pmatrix} =
$$

$$
= \begin{pmatrix} \mathcal{B}_{2,1}^{0,m,\zeta} & \mathcal{B}_{2,2}^{0} & \mathcal{B}_{2,3}^{0,m,\zeta} \\ \mathcal{K}_{3,1}^{0,m,\zeta;k} & \mathcal{K}_{3,3}^{0,m,\zeta;k} & \mathcal{K}_{3,5}^{0,m,\zeta;k} \\ \mathcal{W}_{3,1}^{0,m,\zeta;\nu} & \mathcal{W}_{3,3}^{0,m,\zeta;\nu} & \mathcal{W}_{3,5}^{0,m,\zeta;\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) \\ \widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) \\ \widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \left(h_{r;m,\zeta}^{1,k,\nu}\right)''(+0) \\ \left(h_{\varphi;m,\zeta}^{1,k,\nu}\right)'''(+0) \\ \left(h_{z;m,\zeta}^{1,k,\nu}\right)'''(+0) \end{pmatrix}.
$$

Если все параметры m, k, ζ, ν не обращаются в нуль одновременно, то определитель матрицы

$$
\mathbf{K}_{2,m,\zeta}^{k,\nu} := \begin{pmatrix} \mathcal{B}_{2,4}^{0} & 0 & \mathcal{B}_{2,6}^{0} \\ \mathcal{K}_{3,2}^{0,m,k} & \mathcal{K}_{3,4}^{0,m,k} & \mathcal{K}_{3,6}^{0,m,k} \\ \mathcal{W}_{3,2}^{0,\zeta;\nu} & \mathcal{W}_{3,4}^{0,\zeta;\nu} & \mathcal{W}_{3,6}^{0,\zeta;\nu} \end{pmatrix}
$$

отличен от нуля. Заметим также, что определитель матрицы $\mathbf{K}_{1,m,\zeta}^{k,\nu}$ отличен от нуля и в случае, когда $m + k = 0$, $\zeta + \nu = 0$, что позволяет из (7.2) найти величины $\widehat{c}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$, $\widehat{a}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$, $\widehat{p}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$, в том числе и $\widehat{c}'_{1,0,0}(0)$, $\widehat{a}'_{1,0,0}(0)$, $\widehat{p}'_{1,0,0}(0)$, выразив их через данные обратной задачи 2.4. □

Замечание 7.1. Величины $\widehat{c}_{1;0,0}(0)$, $\widehat{c}'_{1;0,0}(0)$, $\widehat{a}_{1;0,0}(0)$, $\widehat{a}'_{1;0,0}(0)$, $\widehat{p}_{1;0,0}(0)$, $\widehat{p}'_{1;0,0}(0)$ можем найти, полагая $m+k = 0$, $\zeta+\nu = 0$. Вариант, когда все параметры m, k, ζ, ν обращаются в нуль, не подходит, т. к. в этом случае системы (7.1) и (7.2) будут неразрешимы. Именно по этой причине были введены параметры m и ζ.

Всюду в дальнейшем будем полагать $m = 1$ и $\zeta = 1$, так как именно эти значения параметров использовались при формулировке обратной задачи 2.4.

Теорема 7.1. Пусть r_0, a_0, c_0, T заданные положительные числа; $T < 2r_0/c_0$. Тогда для однозначной разрешимости обратной задачи 2.4 в классе функций

$$
\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x),\ \widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x),\ \widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) \in C^1[0, a_0T/(a_0 + c_0)],
$$

$$
\left(U_{1,m,\zeta}^{k,\nu}(x,t),\ W_{1,m,\zeta}^{k,\nu}(x,t),\ V_{1,m,\zeta}^{k,\nu}(x,t)\right) \in C^3(D_{*T}^1) \cap C^1(\overline{D}_T^1),
$$

достаточно, чтобы функции $h_{r;m,\zeta}^{1,k,\nu}(t)$, $h_{\varphi;m,\zeta}^{1,k,\nu}(t)$, $h_{z;m,\zeta}^{1,k,\nu}(t)$, удовлетворяли условиям

$$
\begin{aligned}
& h_{r;m,\zeta}^{1,k,\nu}(t) \equiv 0, \qquad h_{\varphi;m,\zeta}^{1,k,\nu}(t) \equiv 0, \qquad h_{z;m,\zeta}^{1,k,\nu}(t) \quad \text{при} \quad t < 0; \\
& h_{r;m,\zeta}^{1,k,\nu}(t) \in \mathrm{C}^3[0,T],\ h_{r;m,\zeta}^{1,k,\nu}(+0) = 0; \\
& h_{\varphi;m,\zeta}^{1,k,\nu}(t) \in \mathrm{C}^3[0,T],\ h_{\varphi;m,\zeta}^{1,k,\nu}(+0) = 0,\ \left(h_{\varphi;m,\zeta}^{1,k,\nu}\right)'(+0) = 0, \\
& h_{z;m,\zeta}^{1,k,\nu}(t) \in \mathrm{C}^3[0,T],\ h_{z;m,\zeta}^{1,k,\nu}(+0) = 0,\ \left(h_{z;m,\zeta}^{1,k,\nu}\right)'(+0) = 0.
\end{aligned}
$$

Доказательство. Заметим, что изложение материала в оставшейся части данного раздела целиком посвящено доказательству теоремы 7.1. Однако, чтобы процесс доказательства сделать более структурированным, в данном разделе введено несколько подразделов.

Рассмотрим область $\mathcal{D}_T^1$:

$$
\mathcal{D}_T^1 = D_{*T}^1 \cup \left\{(x,t) \;\middle|\; 0 < x < \frac{Ta_0}{2c_0},\ t = \frac{c_0}{a_0}x\right\}, \quad \text{здесь} \quad \mathcal{D}_{*T}^1 = \mathcal{D}_{1T}^1 \cup \mathcal{D}_{2T}^1,
$$

$$
\mathcal{D}_{1T}^1 = \left\{(x,t) \;\middle|\; 0 < x < \frac{Ta_0}{2c_0};\ \frac{c_0 x}{a_0} < t < T - \frac{c_0}{a_0}x\right\},
$$

$$\mathcal{D}^1_{2T} = \Big\{(x,t)\ \Big|\ 0 < x < \frac{Ta_0}{2c_0};\ x < t < \frac{c_0 x}{a_0}\Big\}\bigcup$$
$$\bigcup\Big\{(x,t)\ \Big|\ \frac{Ta_0}{2c_0} < x < \frac{Ta_0}{a_0+c_0};\ x < t < T - \frac{c_0 x}{a_0}\Big\}.$$

Введем новые функции

$$\begin{aligned}
\overline{U}^{m,\zeta}_0(x,t) &= \frac{\partial^2 U^{m,\zeta}_0}{\partial t^2}, & \overline{H}^{m,\zeta}_0(t) &= \frac{\partial^2 H^{m,\zeta}_0}{\partial t^2},\\
\overline{U}^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(x,t) &= \frac{\partial^2 U^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial t^2}, & \overline{H}^{1,k,\nu}_{r;m,\zeta}(t) &= \frac{\partial^2 h^{1,k,\nu}_{r;m,\zeta}}{\partial t^2},\\
\overline{V}^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(x,t) &= \frac{\partial^2 V^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial t^2}, & \overline{H}^{1,k,\nu}_{\varphi;m,\zeta}(t) &= \frac{\partial^2 h^{1,k,\nu}_{\varphi;m,\zeta}}{\partial t^2},\\
\overline{W}^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(x,t) &= \frac{\partial^2 W^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial t^2}, & \overline{H}^{1,k,\nu}_{z;m,\zeta}(t) &= \frac{\partial^2 h^{1,k,\nu}_{z;m,\zeta}}{\partial t^2}.
\end{aligned} \tag{7.3}$$

Продифференцируем равенства (2.36), (2.38), (2.39), (2.40), (2.42), (2.43), (2.44), (2.46), (2.47) дважды по переменной t и получившиеся равенства запишем в терминах новых функций (7.3) следующим образом

$$\frac{\partial^2 \overline{U}^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \overline{U}^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial t^2} = -\overline{P}^{k,\nu}_{r;m,\zeta}(x,t), \tag{7.4}$$

$$\overline{U}^{k,\nu}_{1,m,\zeta}\Big|_{x=0} = \overline{H}^{1,k,\nu}_{r;m,\zeta}(t); \qquad \frac{\partial \overline{U}^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x}\Big|_{x=0} = \overline{F}^{1,k,\nu}_{r;m,\zeta}(t), \tag{7.5}$$

$$\frac{\partial^2 \overline{V}^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x^2} - \frac{c_0^2}{a_0^2}\frac{\partial^2 \overline{V}^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial t^2} = -\frac{c_0^2}{a_0^2}\overline{P}^{k,\nu}_{\varphi;m,\zeta}(x,t), \tag{7.6}$$

$$\overline{V}^{k,\nu}_{1,m,\zeta}\Big|_{x=0} = \overline{H}^{1,k,\nu}_{\varphi;m,\zeta}(t); \qquad \frac{\partial \overline{V}^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x}\Big|_{x=0} = \overline{F}^{1,k,\nu}_{\varphi;m,\zeta}(t), \tag{7.7}$$

$$\frac{\partial^2 \overline{W}^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x^2} - \frac{c_0^2}{a_0^2}\frac{\partial^2 \overline{W}^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial t^2} = -\frac{c_0^2}{a_0^2}\overline{P}^{k,\nu}_{z;m,\zeta}(x,t), \tag{7.8}$$

$$\overline{W}^{k,\nu}_{1,m,\zeta}\Big|_{x=0} = \overline{H}^{1,k,\nu}_{z;m,\zeta}(t); \qquad \frac{\partial \overline{W}^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x}\Big|_{x=0} = \overline{F}^{1,k,\nu}_{z;m,\zeta}(t), \tag{7.9}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\overline{P}^{k,\nu}_{r;m,\zeta}(x,t) &= d^{k,\nu}_0(x)\,\overline{U}^{k,\nu}_{1,m,\zeta} + f^k_3(x)\,\frac{\partial \overline{V}^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x} + f^k_4(x)\,\overline{V}^{k,\nu}_{1,m,\zeta} + g^\nu_1(x)\,\frac{\partial \overline{W}^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x} +\\
&\quad + g^\nu_2(x)\,\overline{W}^{k,\nu}_{1,m,\zeta} + \overline{\Phi}^{k,\nu}_{r;m,\zeta}(x,t);\\
\overline{P}^{k,\nu}_{\varphi;m,\zeta}(x,t) &= f^{k,\nu}_0(x)\,\overline{V}^{k,\nu}_{1,m,\zeta} + d^k_2(x)\,\frac{\partial \overline{U}^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x} + d^k_3(x)\,\overline{U}^{k,\nu}_{1,m,\zeta} + g^{k,\nu}_4(x)\,\overline{W}^{k,\nu}_{1,m,\zeta} +\\
&\quad + \overline{\Phi}^{k,\nu}_{\varphi;m,\zeta}(x,t);\\
\overline{P}^{k,\nu}_{z;m,\zeta}(x,t) &= g^{k,\nu}_0(x)\,\overline{W}^{k,\nu}_{1,m,\zeta} + d^\nu_5(x)\,\frac{\partial \overline{U}^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x} + d^\nu_6(x)\,\overline{U}^{k,\nu}_{1,m,\zeta} + f^{k,\nu}_6(x)\,\overline{V}^{k,\nu}_{1,m,\zeta} +\\
&\quad + \overline{\Phi}^{k,\nu}_{z;m,\zeta}(x,t).
\end{aligned} \tag{7.10}$$

Функции $\overline{\Phi}^{k,\nu}_{r;m,\zeta}(x,t)$, $\overline{\Phi}^{k,\nu}_{\varphi;m,\zeta}(x,t)$ и $\overline{\Phi}^{k,\nu}_{z;m,\zeta}(x,t)$ определены следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\overline{\Phi}^{k,\nu}_{r;m,\zeta}(x,t) = \\
&= \frac{\partial^2 \overline{U}^{m,\zeta}_0}{\partial x^2}\,\chi^0_{3,1}\,\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \frac{\partial \overline{U}^{m,\zeta}_0}{\partial x}\Big(\chi^0_{4,4}\,\widehat{c}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \frac{\widehat{\rho}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(x)}{\rho_0}\Big) + \\
&+\overline{U}^{m,\zeta}_0\Big(\chi_{5,1}(x)\,\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \chi^{m,\zeta;k,\nu}_{5,2}(x)\,\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \\
&\qquad + \chi^{m,\zeta;k,\nu}_{5,3}(x)\,\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \chi_{5,4}(x)\,\widehat{c}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \\
&\qquad + \chi_{5,5}(x)\,\widehat{a}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \chi_{5,6}(x)\,\widehat{\rho}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(x)\Big);
\end{aligned} \tag{7.11}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\Phi}^{k,\nu}_{\varphi;m,\zeta}(x,t) \,=\, &\frac{\partial \overline{U}^{m,\zeta}_0}{\partial x}\Big(\chi^{m;k}_{8,1}(x)\,\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \chi^{m;k}_{8,2}(x)\,\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \\
&\qquad + \chi^{m;k}_{8,3}(x)\,\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x)\Big) + \\
&+\overline{U}^{m,\zeta}_0\Big(\chi^{m;k}_{9,1}(x)\,\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \chi^{m;k}_{9,2}(x)\,\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \\
&\qquad + \chi^{m,k}_{9,3}(x)\,\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \chi^{m}_{9,5}(x)\,\widehat{a}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \\
&\qquad + \chi^{m;k}_{9,6}(x)\,\widehat{\rho}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(x)\Big);
\end{aligned} \tag{7.12}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\Phi}^{k,\nu}_{z;m,\zeta}(x,t) \,=\, &\frac{\partial \overline{U}^{m,\zeta}_0}{\partial x}\Big(\chi^{\zeta;\nu}_{11,1}(x)\,\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \chi^{\zeta;\nu}_{11,2}(x)\,\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \\
&\qquad + \chi^{\zeta;\nu}_{11,3}(x)\,\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x)\Big) + \\
&+\overline{U}^{m,\zeta}_0\Big(\chi^{\zeta;\nu}_{12,1}(x)\,\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \chi^{\zeta;\nu}_{12,2}(x)\,\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \\
&\qquad + \chi^{\zeta;\nu}_{12,3}(x)\,\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \chi^{\zeta;\nu}_{12,5}(x)\,\widehat{a}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \\
&\qquad + \chi^{\zeta;\nu}_{12,6}(x)\,\widehat{\rho}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(x)\Big).
\end{aligned} \tag{7.13}$$

Дважды продифференцируем равенства (2.36), (2.38) по переменной t. Тогда можем написать

$$\overline{U}^{m,\zeta}_0\Big|_{x=0} = \overline{H}^{m,\zeta}_0(t), \qquad \frac{\partial \overline{U}^{m,\zeta}_0}{\partial x}(0,t) = -b^0_2\,\overline{H}^{m,\zeta}_0(t), \quad t>0. \tag{7.14}$$

Из (2.38), (2.42), (2.46) в силу равенств (7.5), (7.7), (7.9), (7.14) и обозначения (7.3) следует

$$\begin{aligned}
\overline{F}^{k,\nu}_{r;m,\zeta}(t) \,=\, &-d^0_1\,\overline{H}^{k,\nu}_{r;m,\zeta}(t) - f^{0,k}_5\,\overline{H}^{k,\nu}_{\varphi;m,\zeta}(t) - g^{0,\nu}_3\,\overline{H}^{k,\nu}_{z;m,\zeta}(t) + \\
&+b^0_2\,\overline{H}^{m,\zeta}_0(t)\Big(\chi^0_{6,1}\,\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) + \chi^0_{6,3}\,\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)\Big) - \\
&-\overline{H}^{m,\zeta}_0(t)\Big(\chi^0_{7,1}\,\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) + \chi^0_{7,2}\,\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0) +
\end{aligned}$$

$$+\,\chi^{0}_{7,3}\,\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)\Big),\quad t>0;$$

$$\begin{aligned}
\overline{F}^{\,k,\nu}_{\varphi;m,\zeta}(t) &= -f^0_2\,\overline{H}^{\,k,\nu}_{\varphi;m,\zeta}(t)-d^{0,k}_4\,\overline{H}^{\,k,\nu}_{r;m,\zeta}(t)-\\
&\quad -\overline{H}^{\,m,\zeta}_0(t)\Big(\chi^{0,m}_{10,2}\,\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)+\chi^{0,m}_{10,3}\,\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)\Big),\quad t>0;\\
\overline{F}^{\,k,\nu}_{z;m,\zeta}(t) &= -\frac{c_0}{2r_0}\,\overline{H}^{\,k,\nu}_{z;m,\zeta}(t)-d^{0,\nu}_7\,\overline{H}^{\,k,\nu}_{r;m,\zeta}(t)-\\
&\quad -\overline{H}^{\,m,\zeta}_0(t)\Big(\chi^{0,m}_{13,2}\,\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)+\chi^{0,m}_{13,3}\,\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)\Big),\quad t>0.
\end{aligned}\tag{7.15}$$

Замечание 7.2. Так как величины $\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$, $\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$, $\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$ известны, то функции $\overline{F}^{\,k,\nu}_{\varphi;m,\zeta}(t)$, $\overline{F}^{\,k,\nu}_{r;m,\zeta}(t)$, $\overline{F}^{\,k,\nu}_{z;m,\zeta}(t)$, определяемые равенствами (7.15), также можем считать известными.

Замечание 7.3. Отметим, что в силу Замечания 2.3 только коэффициенты $d^{k,\nu}_0(x)$, $f^{k,\nu}_0(x)$, $g^{k,\nu}_0(x)$, а следовательно, только функции $\overline{P}^{\,k,\nu}_{r;m,\zeta}(x,t)$, $\overline{P}^{\,k,\nu}_{\varphi;m,\zeta}(x,t)$, $\overline{P}^{\,k,\nu}_{z;m,\zeta}(x,t)$ зависят от k^2 и ν^2. Все остальные функции $\overline{\Phi}^{\,k,\nu}_{r;m,\zeta}(x,t)$, $\overline{\Phi}^{\,k,\nu}_{\varphi;m,\zeta}(x,t)$, $\overline{\Phi}^{\,k,\nu}_{z;m,\zeta}(x,t)$ и $\overline{F}^{\,1,k,\nu}_{\varphi;m,\zeta}(t)$, $\overline{F}^{\,1,k,\nu}_{r;m,\zeta}(t)$, $\overline{F}^{\,1,k,\nu}_{z;m,\zeta}(t)$ зависят от k и ν линейно.

Замечание 7.4. Из равенств (4.38)–(4.39), (4.41), (4.43), (4.36), (4.37), видно, что функция $\overline{U}^{\,k,\nu}_{1,m,\zeta}(x,t)$ непрерывна при переходе через характеристику $t=c_0x/a_0$, а скачки функций

$$\frac{\partial\overline{U}^{\,k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial t},\ \frac{\partial\overline{U}^{\,k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x},\ \overline{V}^{m\nu},\ \frac{\partial\overline{V}^{\,k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial t},\ \frac{\partial\overline{V}^{\,k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x},\ \overline{W}^{\,k,\nu}_{1,m,\zeta},\ \frac{\partial\overline{W}^{\,k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial t},\ \frac{\partial\overline{W}^{\,k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x}$$

при переходе через эту характеристику определяются следующими равенствами

$$\begin{gathered}
\Big[\overline{U}^{\,k,\nu}_{1,m,\zeta}\Big]_{t=\frac{c_0}{a_0}x}\equiv 0,\\
\left[\frac{\partial\overline{U}^{\,k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial t}\right]_{t=\frac{c_0}{a_0}x}=\gamma^{k,\nu}_{3,m,\zeta}(x),\quad \left[\frac{\partial\overline{U}^{\,k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x}\right]_{t=\frac{c_0}{a_0}x}=-\frac{c_0}{a_0}\,\gamma^{k,\nu}_{3,m,\zeta}(x),
\end{gathered}\tag{7.16}$$

$$\begin{gathered}
\Big[\overline{V}^{\,k,\nu}_{1,m,\zeta}\Big]_{t=\frac{c_0}{a_0}x}\equiv \eta^{k,\nu}_{2,m,\zeta}(0),\\
\left[\frac{\partial\overline{V}^{\,k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial t}\right]_{t=\frac{c_0}{a_0}x}=\eta^{k,\nu}_{3,m,\zeta}(x),\quad \left[\frac{\partial\overline{V}^{\,k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x}\right]_{t=\frac{c_0}{a_0}x}=-\frac{c_0}{a_0}\,\eta^{k,\nu}_{3,m,\zeta}(x),
\end{gathered}\tag{7.17}$$

$$\begin{gathered}
\Big[\overline{W}^{\,k,\nu}_{1,m,\zeta}\Big]_{t=\frac{c_0}{a_0}x}\equiv \varepsilon^{k,\nu}_{2,m,\zeta}(0),\\
\left[\frac{\partial\overline{W}^{\,k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial t}\right]_{t=\frac{c_0}{a_0}x}=\varepsilon^{k,\nu}_{3,m,\zeta}(x),\quad \left[\frac{\partial\overline{W}^{\,k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x}\right]_{t=\frac{c_0}{a_0}x}=-\frac{c_0}{a_0}\,\varepsilon^{k,\nu}_{3,m,\zeta}(x).
\end{gathered}\tag{7.18}$$

Значения $\eta^{k,\nu}_{2,m,\zeta}(0)$, $\varepsilon^{k,\nu}_{2,m,\zeta}(0)$ и функции $\gamma^{k,\nu}_{3,m,\zeta}(x)$, $\eta^{k,\nu}_{3,m,\zeta}(x)$, $\varepsilon^{k,\nu}_{3,m,\zeta}(x)$ можно считать известными, т.к. они определяются равенствами (4.15) и (4.24), (4.13), (4.16), и (4.25) и выражаются через $\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$, $\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$, $\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$, $\widehat{c}^{\,\prime}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$, $\widehat{a}^{\,\prime}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$, $\widehat{\rho}^{\,\prime}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$, которые в силу леммы 7.1 выражаются через производные заданных функций $h^{1,k,\nu}_{r;m,\zeta}(t)$, $h^{1,k,\nu}_{\varphi;m,\zeta}(t)$, $h^{1,k,\nu}_{z;m,\zeta}(t)$.

7.1. **Построение системы интегральных соотношений, эквивалентных равенствам (7.4), (7.5).** Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial^2 \overline{U}^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \overline{U}^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial t^2} = -\overline{P}^{k,\nu}_{r;m,\zeta}(x,t), \tag{7.19}$$

$$\overline{U}^{k,\nu}_{1,m,\zeta}\Big|_{x=0} = \overline{H}^{1,k,\nu}_{r;m,\zeta}(t); \qquad \frac{\partial \overline{U}^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x}\Big|_{x=0} = \overline{F}^{1,k,\nu}_{r;m,\zeta}(t), \quad t>0. \tag{7.20}$$

Интегрируя (7.19) вдоль характеристик дифференциальных операторов $(\partial/\partial x + \partial/\partial t)$ и $(\partial/\partial x - \partial/\partial t)$, получим выражения для $\overline{U}^{k,\nu}_{1,m,\zeta}$ и ее производных первого порядка в каждой из областей $\mathcal{D}^1_{1T}$ и $\mathcal{D}^1_{2T}$.

Пусть $(x,t) \in \mathcal{D}^1_{1T}$, тогда после интегрирования вдоль характеристик, можем написать

$$\Big(\frac{\partial \overline{U}^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{U}^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial t}\Big)(t,x;\mathcal{D}^1_{1T}) = H^-_{U,1}(x,t),$$
$$\Big(\frac{\partial \overline{U}^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{U}^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial t}\Big)(t,x;\mathcal{D}^1_{1T}) = H^+_{U,1}(x,t),$$

здесь

$$\widehat{H}^-_{U,1}(x,t) = \overline{F}^{1,k,\nu}_{r;m,\zeta}(t-x) - \frac{\partial \overline{H}^{1,k,\nu}_{r;m,\zeta}}{\partial t}(t-x) - \int\limits_0^x \overline{P}^{1,k,\nu}_{r;m,\zeta}(\xi, t-x+\xi)\,d\xi, \tag{7.21}$$

$$\widehat{H}^+_{U,1}(x,t) = \overline{F}^{1,k,\nu}_{r;m,\zeta}(t+x) + \frac{\partial \overline{H}^{1,k,\nu}_{r;m,\zeta}}{\partial t}(t+x) - \int\limits_0^x \overline{P}^{1,k,\nu}_{r;m,\zeta}(\xi, t+x-\xi)\,d\xi. \tag{7.22}$$

Отсюда найдем

$$\frac{\partial \overline{U}^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x}(x,t;\mathcal{D}^1_{1T}) = \frac{1}{2}\Big(\widehat{H}^-_{U,1}(x,t) + \widehat{H}^+_{U,1}(x,t)\Big), \tag{7.23}$$

$$\frac{\partial \overline{U}^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial t}(x,t;\mathcal{D}^1_{1T}) = \frac{1}{2}\Big(\widehat{H}^+_{U,1}(x,t) - \widehat{H}^-_{U,1}(x,t)\Big), \tag{7.24}$$

$$\overline{U}^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(x,t;\mathcal{D}^1_{1T}) = \overline{H}^{k,\nu}_{r;m,\zeta}(t) + \frac{1}{2}\int\limits_0^x \Big(\widehat{H}^-_{U,1}(\xi,t) + \widehat{H}^+_{U,1}(\xi,t)\Big)\,d\xi. \tag{7.25}$$

Пусть теперь $(x,t) \in \mathcal{D}^1_{2T}$, после интегрирования (7.19) вдоль характеристик, учитывая (7.16), получим

$$\Big(\frac{\partial \overline{U}^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{U}^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial t}\Big)(x,t;\mathcal{D}^1_{2T}) = \widehat{H}^-_{U,2}(x,t),$$
$$\Big(\frac{\partial \overline{U}^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{U}^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial t}\Big)(x,t;\mathcal{D}^1_{2T}) = \widehat{H}^+_{U,2}(x,t),$$

где

$$\widehat{H}^-_{U,2}(x,t) = \overline{F}^{k,\nu}_{r;m,\zeta}(t-x) - \frac{\partial \overline{H}^{k,\nu}_{r;m,\zeta}}{\partial t}(t-x) - \frac{c_0+a_0}{a_0}\gamma^{k,\nu}_{3,m,\zeta}\Big(\frac{a_0(t-x)}{c_0-a_0}\Big) - \\ - \int\limits_0^x \overline{P}^{k,\nu}_{r;m,\zeta}(\xi, t-x+\xi)\,d\xi, \tag{7.26}$$

$$\widehat{H}^{+}_{U,2}(x,t) \,=\, \overline{F}^{\,k,\nu}_{r;m,\zeta}(t+x) + \frac{\partial \overline{H}^{\,k,\nu}_{r;m,\zeta}}{\partial t}(t+x) - \frac{c_0-a_0}{a_0}\gamma^{k,\nu}_{3,m,\zeta}\Big(\frac{a_0(t+x)}{c_0+a_0}\Big) -$$
$$(7.27)\qquad -\int\limits_0^x \overline{P}^{\,k,\nu}_{r;m,\zeta}(\xi, t+x-\xi)\, d\xi.$$

Отсюда найдем

$$(7.28)\quad \frac{\partial \overline{U}^{\,k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x}(x,t;\mathcal{D}^1_{2T}) \,=\, \frac{1}{2}\Big(\widehat{H}^{-}_{U,2}(x,t) + \widehat{H}^{+}_{U,2}(x,t)\Big),$$
$$(7.29)\quad \frac{\partial \overline{U}^{\,k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial t}(x,t;\mathcal{D}^1_{2T}) \,=\, \frac{1}{2}\Big(\widehat{H}^{+}_{U,2}(x,t) - \widehat{H}^{-}_{U,2}(x,t)\Big),$$
$$(7.30)\quad \overline{U}^{\,k,\nu}_{1,m,\zeta}(x,t;\mathcal{D}^1_{2T}) \,=\, \overline{H}^{\,k,\nu}_{r;m,\zeta}(t) + \frac{1}{2}\int\limits_0^x \Big(\widehat{H}^{-}_{U,2}(\xi,t) + \widehat{H}^{+}_{U,2}(\xi,t)\Big)\, d\xi.$$

7.2. **Построение системы интегральных соотношений, эквивалентных равенствам (7.6), (7.7).** Теперь рассмотрим задачу

$$(7.31)\qquad \frac{\partial^2 \overline{V}^{\,k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x^2} - \frac{c_0^2}{a_0^2}\frac{\partial^2 \overline{V}^{\,k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial t^2} = -\frac{c_0^2}{a_0^2}\overline{P}^{\,k,\nu}_{\varphi;m,\zeta}(x,t),$$
$$(7.32)\qquad \overline{V}^{\,k,\nu}_{1,m,\zeta}\Big|_{x=0} = \overline{H}^{\,1,k,\nu}_{\varphi;m,\zeta}(t); \qquad \frac{\partial \overline{V}^{\,k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x}\Big|_{x=0} = \overline{F}^{\,1,k,\nu}_{\varphi;m,\zeta}(t),$$

Пусть $(x,t)\in\mathcal{D}^1_{1T}$. Интегрируя (7.31) вдоль характеристик, получим

$$\Big(\frac{\partial \overline{V}^{\,k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x} - \frac{c_0}{a_0}\frac{\partial \overline{V}^{\,k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial t}\Big)(x,t;\mathcal{D}^1_{1T}) \,=\, \widehat{H}^{-}_{V,1}(x,t),$$
$$\Big(\frac{\partial \overline{V}^{\,k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x} + \frac{c_0}{a_0}\frac{\partial \widehat{V}^{m\nu}}{\partial t}\Big)(x,t;\mathcal{D}^1_{1T}) \,=\, \widehat{H}^{+}_{V,1}(x,t),$$

где

$$\widehat{H}^{-}_{V,1}(x,t) \,=\, \overline{F}^{\,k,\nu}_{\varphi;m,\zeta}\Big(t-\frac{c_0}{a_0}x\Big) - \frac{c_0}{a_0}\frac{\partial \overline{H}^{\,k,\nu}_{\varphi;m,\zeta}}{\partial t}\Big(t-\frac{c_0}{a_0}x\Big) -$$
$$(7.33)\qquad -\frac{c_0^2}{a_0^2}\int\limits_0^x \overline{P}^{\,k,\nu}_{\varphi;m,\zeta}\Big(\xi, t-\frac{c_0}{a_0}(x-\xi)\Big)\, d\xi,$$

$$H^{+}_{V,1}(x,t) \,=\, \overline{F}^{\,k,\nu}_{\varphi;m,\zeta}\Big(t+\frac{c_0}{a_0}x\Big) + \frac{c_0}{a_0}\frac{\partial \overline{H}^{\,k,\nu}_{\varphi;m,\zeta}}{\partial t}\Big(t+\frac{c_0}{a_0}x\Big) -$$
$$(7.34)\qquad -\frac{c_0^2}{a_0^2}\int\limits_0^x \overline{P}^{\,k,\nu}_{\varphi;m,\zeta}\Big(\xi, t+\frac{c_0}{a_0}(x-\xi)\Big)\, d\xi.$$

Отсюда

$$(7.35)\qquad \frac{\partial \overline{V}^{\,k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x}(x,t;\mathcal{D}^1_{1T}) \,=\, \frac{1}{2}\Big(\widehat{H}^{-}_{V,1}(x,t) + \widehat{H}^{+}_{V,1}(x,t)\Big),$$
$$(7.36)\qquad \frac{\partial \overline{V}^{\,k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial t}(x,t;\mathcal{D}^1_{1T}) \,=\, \frac{a_0}{2c_0}\Big(\widehat{H}^{+}_{V,1}(x,t) - \widehat{H}^{-}_{V,1}(x,t)\Big),$$

$$(7.37)\qquad \overline{V}^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(x,t;\mathcal{D}^1_{1T}) = \widehat{H}^{k,\nu}_{\varphi;m,\zeta}(t) + \frac{1}{2}\int\limits_0^x \Big(\widehat{H}^-_{V,1}(\xi,t) + \widehat{H}^+_{V,1}(\xi,t)\Big)\,d\,\xi.$$

Пусть $(x,t)\in\mathcal{D}^1_{2T}$. Интегрируя (7.31) вдоль характеристик и учитывая (7.17), получим

$$\left(\frac{\partial\overline{V}^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x} - \frac{c_0}{a_0}\frac{\partial}{\partial t}\right)(x,t;\mathcal{D}^1_{2T}) = \widehat{H}^-_{V,2}(x,t),$$

$$\left(\frac{\partial\overline{V}^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x} + \frac{c_0}{a_0}\frac{\partial}{\partial t}\right)(x,t;\mathcal{D}^1_{2T}) = \widehat{H}^+_{V,2}(x,t),$$

здесь

$$\begin{aligned}\widehat{H}^-_{V,2}(x,t) = \Big(\text{æ}^{k,\nu}_{2,m,\zeta}\Big)'\Big(\frac{c_0x-a_0t}{c_0-a_0}\Big) - \frac{a_0+c_0}{a_0}\text{æ}^{k,\nu}_{3,m,\zeta}\Big(\frac{c_0x-a_0t}{c_0-a_0}\Big) -\\ -\frac{c_0^2}{a_0^2}\int\limits_{\frac{c_0x-a_0t}{c_0-a_0}}^x \overline{P}^{k,\nu}_{\varphi;m,\zeta}\Big(\xi,t-\frac{c_0}{a_0}(x-\xi)\Big)\,d\,\xi,\end{aligned}\qquad(7.38)$$

$$\begin{aligned}\widehat{H}^+_{V,2}(x,t) = \overline{F}^{k,\nu}_{\varphi;m,\zeta}\Big(t+\frac{c_0}{a_0}x\Big) + \frac{c_0}{a_0}\frac{\partial\overline{H}^{k,\nu}_{\varphi;m,\zeta}}{\partial t}\Big(t+\frac{c_0}{a_0}x\Big) -\\ -\frac{c_0^2}{a_0^2}\int\limits_0^x \overline{P}^{k,\nu}_{\varphi;m,\zeta}\Big(\xi,t+\frac{c_0}{a_0}(x-\xi)\Big)\,d\,\xi.\end{aligned}\qquad(7.39)$$

Теперь можем написать

$$(7.40)\qquad \frac{\partial\overline{V}^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x}(x,t;\mathcal{D}^1_{2T}) = \frac{1}{2}\Big(\widehat{H}^-_{V,2}(x,t) + \widehat{H}^+_{V,2}(x,t)\Big),$$

$$(7.41)\qquad \frac{\partial\overline{V}^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial t}(x,t;\mathcal{D}^1_{2T}) = \frac{a_0}{2c_0}\Big(\widehat{H}^+_{V,2}(x,t) - \widehat{H}^-_{V,2}(x,t)\Big),$$

$$(7.42)\qquad \overline{V}^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(x,t;\mathcal{D}^1_{2T}) = \overline{H}^{k,\nu}_{\varphi;m,\zeta}(t) + \frac{1}{2}\int\limits_0^x \Big(H_{V,2}(\xi,t) + H^+_{V,2}(\xi,t)\Big)\,d\,\xi.$$

7.3. **Построение системы интегральных соотношений, эквивалентных равенствам (7.8), (7.9).** Теперь рассмотрим задачу

$$(7.43)\qquad \frac{\partial^2\overline{W}^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x^2} - \frac{c_0^2}{a_0^2}\frac{\partial^2\overline{W}^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial t^2} = -\frac{c_0^2}{a_0^2}\overline{P}^{k,\nu}_{z;m,\zeta}(x,t),$$

$$(7.44)\qquad \overline{W}^{k,\nu}_{1,m,\zeta}\Big|_{x=0} = \overline{H}^{1,k,\nu}_{z;m,\zeta}(t);\qquad \frac{\partial\overline{W}^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x}\Big|_{x=0} = \overline{F}^{1,k,\nu}_{z;m,\zeta}(t),$$

Пусть $(x,t)\in\mathcal{D}^1_{1T}$. Интегрируя (7.43) вдоль характеристик, получим

$$\Big(\frac{\partial\overline{W}^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x} - \frac{c_0}{a_0}\frac{\partial\overline{W}^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial t}\Big)(x,t;\mathcal{D}^1_{1T}) = \widehat{H}^-_{W,1}(x,t),$$

$$\Big(\frac{\partial\overline{W}^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x} + \frac{c_0}{a_0}\frac{\partial\overline{W}^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial t}\Big)(x,t;\mathcal{D}^1_{1T}) = \widehat{H}^+_{W,1}(x,t),$$

где

$$\widehat{H}^-_{W,1}(x,t) \;=\; \overline{F}^{\,k,\nu}_{z;m,\zeta}\Big(t-\frac{c_0}{a_0}x\Big)-\frac{c_0}{a_0}\frac{\partial \overline{H}^{\,k,\nu}_{z;m,\zeta}}{\partial t}\Big(t-\frac{c_0}{a_0}x\Big)-$$

$$(7.45)\qquad -\frac{c_0^2}{a_0^2}\int\limits_0^x \overline{P}^{\,k,\nu}_{z;m,\zeta}\Big(\xi, t-\frac{c_0}{a_0}(x-\xi)\Big)\,d\xi,$$

$$H^+_{W,1}(x,t) \;=\; \overline{F}^{\,k,\nu}_{z;m,\zeta}\Big(t+\frac{c_0}{a_0}x\Big)+\frac{c_0}{a_0}\frac{\partial \overline{H}^{\,k,\nu}_{z;m,\zeta}}{\partial t}\Big(t+\frac{c_0}{a_0}x\Big)-$$

$$(7.46)\qquad -\frac{c_0^2}{a_0^2}\int\limits_0^x \overline{P}^{\,k,\nu}_{z;m,\zeta}\Big(\xi, t+\frac{c_0}{a_0}(x-\xi)\Big)\,d\xi.$$

Отсюда

$$(7.47)\qquad \frac{\partial \overline{W}^{\,k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x}(x,t;\mathcal{D}^1_{1T}) \;=\; \frac{1}{2}\Big(\widehat{H}^-_{W,1}(x,t)+\widehat{H}^+_{W,1}(x,t)\Big),$$

$$(7.48)\qquad \frac{\partial \overline{W}^{\,k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial t}(x,t;\mathcal{D}^1_{1T}) \;=\; \frac{a_0}{2c_0}\Big(\widehat{H}^+_{W,1}(x,t)-\widehat{H}^-_{W,1}(x,t)\Big),$$

$$(7.49)\qquad \overline{W}^{\,k,\nu}_{1,m,\zeta}(x,t;\mathcal{D}^1_{1T}) \;=\; \overline{H}^{\,k,\nu}_{z;m,\zeta}(t)+\frac{1}{2}\int\limits_0^x\Big(\widehat{H}^-_{W,1}(\xi,t)+\widehat{H}^+_{W,1}(\xi,t)\Big)\,d\xi.$$

Пусть $(x,t)\in\mathcal{D}^1_{2T}$. Интегрируя (7.43) вдоль характеристик и учитывая (7.18), получим

$$\left(\frac{\partial \overline{W}^{\,k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x}-\frac{c_0}{a_0}\frac{\partial}{\partial t}\right)(x,t;\mathcal{D}^1_{2T}) \;=\; \widehat{H}^-_{W,2}(x,t),$$

$$\left(\frac{\partial \overline{W}^{\,k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x}+\frac{c_0}{a_0}\frac{\partial}{\partial t}\right)(x,t;\mathcal{D}^1_{2T}) \;=\; \widehat{H}^+_{W,2}(x,t),$$

здесь

$$\widehat{H}^-_{W,2}(x,t) \;=\; \Big(\omega^{k,\nu}_{2,m,\zeta}\Big)'\Big(\frac{c_0x-a_0t}{c_0-a_0}\Big)-\frac{a_0+c_0}{a_0}\omega^{k,\nu}_{3,m,\zeta}\Big(\frac{c_0x-a_0t}{c_0-a_0}\Big)-$$

$$(7.50)\qquad -\frac{c_0^2}{a_0^2}\int\limits_{\frac{c_0x-a_0t}{c_0-a_0}}^x \overline{P}^{\,k,\nu}_{z;m,\zeta}\Big(\xi, t-\frac{c_0}{a_0}(x-\xi)\Big)\,d\xi,$$

$$\widehat{H}^+_{W,2}(x,t) \;=\; \overline{F}^{\,k,\nu}_{z;m,\zeta}\Big(t+\frac{c_0}{a_0}x\Big)+\frac{c_0}{a_0}\frac{\partial \overline{H}^{\,k,\nu}_{z;m,\zeta}}{\partial t}\Big(t+\frac{c_0}{a_0}x\Big)-$$

$$(7.51)\qquad -\frac{c_0^2}{a_0^2}\int\limits_0^x \overline{P}^{\,k,\nu}_{z;m,\zeta}\Big(\xi, t+\frac{c_0}{a_0}(x-\xi)\Big)\,d\xi.$$

Теперь можем написать

$$(7.52)\qquad \frac{\partial \overline{W}^{\,k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x}(x,t;\mathcal{D}^1_{2T}) \;=\; \frac{1}{2}\Big(\widehat{H}^-_{W,2}(x,t)+\widehat{H}^+_{W,2}(x,t)\Big),$$

$$(7.53)\qquad \frac{\partial \overline{W}^{\,k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial t}(x,t;\mathcal{D}^1_{2T}) = \frac{a_0}{2c_0}\Big(\widehat{H}^+_{W,2}(x,t)-\widehat{H}^-_{W,2}(x,t)\Big),$$

$$(7.54)\qquad \overline{W}^{\,k,\nu}_{1,m,\zeta}(x,t;\mathcal{D}^1_{2T}) = \widehat{H}^{m\nu}_z(t)+\frac{1}{2}\int\limits_0^x\Big(H_{W,2}(\xi,t)+H^+_{W,2}(\xi,t)\Big)\,d\,\xi.$$

Замечание 7.5. Отметим, что функции $\widehat{H}^-_{U,1}(x,t)$, $\widehat{H}^+_{U,1}(x,t)$, $\widehat{H}^-_{U,2}(x,t)$, $\widehat{H}^+_{U,2}(x,t)$, $\widehat{H}^-_{V,1}(x,t)$, $\widehat{H}^+_{V,1}(x,t)$, $\widehat{H}^-_{V,2}(x,t)$, $\widehat{H}^+_{V,2}(x,t)$, $\widehat{H}^-_{W,1}(x,t)$, $\widehat{H}^+_{W,1}(x,t)$, $\widehat{H}^-_{W,2}(x,t)$, $\widehat{H}^+_{W,2}(x,t)$ в силу построения и Замечания 7.3 зависят от k^2 и ν^2.

7.4. **Построение замкнутой системы уравнений.** Воспользуемся равенствами (7.30), (7.41), (7.53) и соотношениями (4.32), (4.33), (4.35)

$$\beta^{k,\nu}_{2,m,\zeta}(x) = \overline{U}^{\,k,\nu}_{1,m,\zeta}(x,x+0) =$$

$$(7.55)\qquad = \overline{H}^{\,k,\nu}_{r;m,\zeta}(x+0)+\frac{1}{2}\int\limits_0^x\Big(\widehat{H}^-_{U,2}(\xi,x+0)+\widehat{H}^+_{U,2}(\xi,x+0)\Big)\,d\,\xi.$$

$$(7.56)\ æ^{k,\nu}_{3,m,\zeta}(x) = \frac{\partial \overline{V}^{\,k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial t}(x,x+0) = \frac{a_0}{2c_0}\Big(\widehat{H}^+_{V,2}(x,x+0)-\widehat{H}^-_{V,2}(x,x+0)\Big),$$

$$(7.57)\ \omega^{k,\nu}_{3,m,\zeta}(x) = \frac{\partial \overline{W}^{\,k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial t}(x,x+0) = \frac{a_0}{2c_0}\Big(\widehat{H}^+_{W,2}(x,x+0)-\widehat{H}^-_{W,2}(x,x+0)\Big),$$

В силу представлений (7.23), (7.24) сумму $\widehat{H}^-_{U,2}(x,t)+\widehat{H}^+_{U,2}(x,t)$ запишем в виде

$$\widehat{H}^-_{U,2}(x,t)+\widehat{H}^+_{U,2}(x,t) =$$

$$= D^{k,\nu}_{r;m,\zeta}(x,t)-\int\limits_0^x\overline{P}^{\,k,\nu}_{r;m,\zeta}(\xi,t-x+\xi)\,d\,\xi-\int\limits_0^x\overline{P}^{\,k,\nu}_{r;m,\zeta}(\xi,t+x-\xi)\,d\,\xi,$$

где

$$D^{k,\nu}_{r;m,\zeta}(x,t) = \overline{F}^{\,k,\nu}_{r;m,\zeta}(t-x)+\overline{F}^{\,k,\nu}_{r;m,\zeta}(t+x)-\frac{\partial \overline{H}^{\,k,\nu}_{r;m,\zeta}}{\partial t}(t-x)+\frac{\partial \overline{H}^{\,k,\nu}_{r;m,\zeta}}{\partial t}(t+x)-$$
$$-\frac{c_0+a_0}{a_0}\gamma^{k,\nu}_{3,m,\zeta}\Big(\frac{a_0(t-x)}{c_0-a_0}\Big)-\frac{c_0-a_0}{a_0}\gamma^{k,\nu}_{3,m,\zeta}\Big(\frac{a_0(t+x)}{c_0+a_0}\Big)$$

– известная функция, выражающаяся через дополнительную информацию и известные величины $\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$, $\widehat{c}\,'_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$, $\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$, $\widehat{a}\,'_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$, $\widehat{p}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$, $\widehat{p}\,'_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$.

Таким образом, равенство (7.55) можем записать в виде

$$\beta^{k,\nu}_{2,m,\zeta}(x) = \overline{H}^{\,k,\nu}_{r;m,\zeta}(x+0)+\frac{1}{2}\int\limits_0^x D^{k,\nu}_{r;m,\zeta}(\xi,x+0)\,d\,\xi-$$
$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^x\Big(\int\limits_\xi^x\overline{P}^{\,k,\nu}_{r;m,\zeta}(\eta,t-\xi+\eta)\,d\,\eta\Big)\,d\,\xi-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^x\Big(\int\limits_\xi^x \overline{P}^{k,\nu}_{r;m,\zeta}(\eta,t+\xi-\eta)\,d\eta\Big)\,d\xi. \tag{7.58}$$

Равенство (4.10) перепишем в виде

$$\begin{aligned}
&\mathcal{B}^{(0),0}_{2,6}\widehat{c}\,'_{1,m+k,\zeta+\nu}(x)+0\cdot\widehat{a}\,'_{1,m+k,\zeta+\nu}(x)+\mathcal{B}^{(0),0}_{2,9}\widehat{\rho}\,'_{1,m+k,\zeta+\nu}(x)=\\
&=\beta^{k,\nu}_{2,m,\zeta}(x)-\beta^{k,\nu,0}_{2,m,\zeta}-\\
&-\int\limits_0^x\Big[\mathcal{B}^{k,\nu}_{2,0}(\xi)\beta^{k,\nu}_{0,m,\zeta}(\xi)+\mathcal{B}^{k,\nu}_{2,1}(\xi)\beta^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(\xi)+\mathcal{B}^{m,\zeta;k,\nu}_{2,2}(\xi)\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(\xi)+\\
&\qquad+\mathcal{B}^{m,\zeta;k,\nu}_{2,3}(\xi)\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(\xi)+\mathcal{B}^{m,\zeta;k,\nu}_{2,4}(\xi)\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(\xi)\Big]\,d\xi-\\
&-\mathcal{B}^{m,k}_{2,5}(x)\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x)-\mathcal{B}^{m,k}_{2,7}(x)\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x)-\\
&-\mathcal{B}^{m,\zeta;k}_{2,8}(x)\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x).
\end{aligned}\tag{7.59}$$

Подставляя $\beta^{k,\nu}_{2,m,\zeta}(x)$ из (7.58) в (7.59), приводя подобные и переобозначая коэффициенты, получим

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\mathcal{B}}_6\widehat{c}\,'_{1,m+k,\zeta+\nu}(x)+0\cdot\widehat{a}\,'_{1,m+k,\zeta+\nu}(x)+\widetilde{\mathcal{B}}_{10}\widehat{\rho}\,'_{1,m+k,\zeta+\nu}(x)=\\
&=\int\limits_0^x\Big(\widetilde{\mathcal{B}}^{k,\nu}_0(\xi)\beta^{k,\nu}_{0,m,\zeta}(\xi)+\widetilde{\mathcal{B}}^{k,\nu}_1(\xi)\beta^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(\xi)+\widetilde{\mathcal{B}}^{k,\nu}_{2;m,\zeta}(\xi)\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(\xi)+\\
&\qquad+\widetilde{\mathcal{B}}^{k,\nu}_{3;m,\zeta}(\xi)\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(\xi)+\widetilde{\mathcal{B}}^{k,\nu}_{4;m,\zeta}(\xi)\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(\xi)\Big)\,d\xi+\\
&+\widetilde{\mathcal{B}^k}_{5;m}(x)\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x)+\widetilde{\mathcal{B}}^k_{7;m}(x)\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x)+\widetilde{\mathcal{B}}^k_{9;m,\zeta}(x)\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x)-\\
&-\frac{1}{2}\int\limits_0^x\Big(\int\limits_\xi^x\overline{P}^{k,\nu}_{r;m,\zeta}(\eta,t-\xi+\eta)\,d\eta\Big)\,d\xi-\frac{1}{2}\int\limits_0^x\Big(\int\limits_\xi^x\overline{P}^{k,\nu}_{r;m,\zeta}(\eta,t+\xi-\eta)\,d\eta\Big)\,d\xi+\\
&+\widetilde{\mathcal{B}}^{k,\nu}_{11;m,\xi}(x).
\end{aligned}\tag{7.60}$$

Функция $\widetilde{\mathcal{B}}^{k,\nu}_{11;m,\xi}(x)$, входящая в верхнее равенство, известна и зависит от величин $\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$, $\widehat{c}\,'_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$, $\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$, $\widehat{a}\,'_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$, $\widehat{p}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$, $\widehat{p}\,'_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$.

В силу представлений (7.38), (7.39) разность $\widehat{H}^+_{V,2}(x,t)-\widehat{H}^-_{V,2}(x,t)$ запишем в виде

$$\begin{aligned}
&\widehat{H}^+_{V,2}(x,t)-\widehat{H}^-_{V,2}(x,t)=\\
&=D^{k,\nu}_{\varphi;m,\zeta}(x,t)\Big(t+\frac{c_0}{a_0}x\Big)-\Big(\text{æ}^{k,\nu}_{2,m,\zeta}\Big)'\Big(\frac{c_0x-a_0t}{c_0-a_0}\Big)+\frac{a_0+c_0}{a_0}\text{æ}^{k,\nu}_{3,m,\zeta}\Big(\frac{c_0x-a_0t}{c_0-a_0}\Big)-
\end{aligned}$$

$$-\frac{c_0^2}{a_0^2}\int\limits_0^x \overline{P}^{k,\nu}_{\varphi;m,\zeta}\Big(\xi, t+\frac{c_0}{a_0}(x-\xi)\Big)\,d\xi + \frac{c_0^2}{a_0^2}\int\limits_{\frac{c_0x-a_0t}{c_0-a_0}}^x \overline{P}^{k,\nu}_{\varphi;m,\zeta}\Big(\xi, t-\frac{c_0}{a_0}(x-\xi)\Big)\,d\xi,$$

здесь

$$D^{k,\nu}_{\varphi;m,\zeta}(x,t) = \overline{F}^{k,\nu}_{\varphi;m,\zeta}\Big(t+\frac{c_0}{a_0}x\Big) + \frac{c_0}{a_0}\frac{\partial \overline{H}^{k,\nu}_{\varphi;m,\zeta}}{\partial t}$$

– известная функция, выражающаяся через дополнительную информацию и известные величины $\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$, $\widehat{c}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$, $\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$, $\widehat{a}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$, $\widehat{p}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$, $\widehat{p}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$.

Запишем (7.56) в виде

$$\frac{2c_0}{a_0}æ^{k,\nu}_{3,m,\zeta}(x) = D^{k,\nu}_{\varphi;m,\zeta}(x,x+0) - \Big(æ^{k,\nu}_{2,m,\zeta}\Big)'(x) + \frac{a_0+c_0}{a_0}æ^{k,\nu}_{3,m,\zeta}(x) - $$
$$-\frac{c_0^2}{a_0^2}\int\limits_0^x \overline{P}^{k,\nu}_{\varphi;m,\zeta}\Big(\xi, \frac{a_0+c_0}{a_0}x-\frac{c_0}{a_0}\xi\Big)\,d\xi.$$

Подставим в это равенство вместо $æ^{k,\nu}_{3,m,\zeta}(x)$ представление (4.21), вместо $\Big(æ^{k,\nu}_{2,m,\zeta}\Big)'(x)$ представление (4.20). Подставляя вместо $\beta^{k,\nu}_{2,m,\zeta}(x)$, входящего в (4.21), выражение (4.10), приводя подобные и переобозначая коэффициенты, можем написать

$$\widetilde{\mathcal{K}}^k_{6;m}(x)\widehat{c}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \widetilde{\mathcal{K}}^k_{8;m}(x)\widehat{a}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \widetilde{\mathcal{K}}^k_{10;m}(x)\widehat{\rho}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) =$$
$$= \int\limits_0^x \Big(\widetilde{\mathcal{K}}^{k,\nu}_0(x,\xi)\beta^{k,\nu}_{0,m,\zeta}(\xi) + \widetilde{\mathcal{K}}^{k,\nu}_1(x,\xi)\beta^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(\xi) + \widetilde{\mathcal{K}}^{k,\nu}_{2;m,\zeta}(x,\xi)\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(\xi) +$$
$$+ \widetilde{\mathcal{K}}^{k,\nu}_{3;m,\zeta}(x,\xi)\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(\xi) + \widetilde{\mathcal{K}}^{k,\nu}_{4;m,\zeta}(x,\xi)\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(\xi)\Big)\,d\xi +$$
$$+\widetilde{\mathcal{K}}^k_{5;m,\zeta}(x)\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \widetilde{\mathcal{K}}^k_{7;m,\zeta}(x)\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \widetilde{\mathcal{K}}^k_{9;m,\zeta}(x)\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) -$$
$$-\frac{c_0^2}{a_0^2}\int\limits_0^x \overline{P}^{k,\nu}_{\varphi;m,\zeta}\Big(\xi, \frac{a_0+c_0}{a_0}x-\frac{c_0}{a_0}\xi\Big)\,d\xi + \widetilde{\mathcal{K}}^{k,\nu}_{11;m,\zeta}(x).$$

(7.61)

Функция $\widetilde{\mathcal{K}}^{k,\nu}_{11;m,\zeta}(x)$, входящая в верхнее равенство, известна и зависит от величин $\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$, $\widehat{c}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$, $\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$, $\widehat{a}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$, $\widehat{p}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$, $\widehat{p}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$.

В силу представлений (7.50), (7.51) разность $\widehat{H}^+_{W,2}(x,t) - \widehat{H}^-_{W,2}(x,t)$ запишем в виде

$$\widehat{H}^+_{W,2}(x,t) - \widehat{H}^-_{W,2}(x,t) =$$
$$= D^{k,\nu}_{z;m,\zeta}(x,t) + \frac{a_0+c_0}{a_0}\omega^{k,\nu}_{3,m,\zeta}\Big(\frac{c_0x-a_0t}{c_0-a_0}\Big) - \Big(\omega^{k,\nu}_{2,m,\zeta}\Big)'\Big(\frac{c_0x-a_0t}{c_0-a_0}\Big) -$$
$$-\frac{c_0^2}{a_0^2}\int\limits_0^x \overline{P}^{k,\nu}_{z;m,\zeta}\Big(\xi, t+\frac{c_0}{a_0}(x-\xi)\Big)\,d\xi + \frac{c_0^2}{a_0^2}\int\limits_{\frac{c_0x-a_0t}{c_0-a_0}}^x \overline{P}^{k,\nu}_{z;m,\zeta}\Big(\xi, t-\frac{c_0}{a_0}(x-\xi)\Big)\,d\xi,$$

здесь

$$D^{k,\nu}_{z;m,\zeta}(x,t) = \overline{F}^{\,k,\nu}_{z;m,\zeta}\Big(t + \frac{c_0}{a_0}x\Big) + \frac{c_0}{a_0}\frac{\partial \overline{H}^{\,k,\nu}_{z;m,\zeta}}{\partial t}\Big(t + \frac{c_0}{a_0}x\Big)$$

– известная функция, выражающаяся через дополнительную информацию и известные величины $\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$, $\widehat{c}\,'_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$, $\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$, $\widehat{a}\,'_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$, $\widehat{p}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$, $\widehat{p}\,'_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$.

Запишем (7.57) в виде

$$\frac{2c_0}{a_0}\omega^{k,\nu}_{3,m,\zeta}(x) = D^{k,\nu}_{z;m,\zeta}(x,x+0) + \frac{a_0+c_0}{a_0}\omega^{k,\nu}_{3,m,\zeta}(x) - \Big(\omega^{k,\nu}_{2,m,\zeta}\Big)'(x) -$$
$$-\frac{c_0^2}{a_0^2}\int\limits_0^x \overline{P}^{\,k,\nu}_{z;m,\zeta}\Big(\xi, x + \frac{c_0}{a_0}(x-\xi)\Big)\,d\,\xi.$$

Подставим в это равенство вместо $\omega^{k,\nu}_{3,m,\zeta}(x)$ представление (4.30), вместо $\Big(\omega^{k,\nu}_{2,m,\zeta}\Big)'(x)$ представление (4.29). Подставляя вместо $\beta^{k,\nu}_{2,m,\zeta}(x)$, входящего в (4.30), выражение (4.10), приводя подобные и переобозначая коэффициенты, можем написать

$$\widetilde{\mathcal{W}}^{\nu}_{6;\zeta}(x)\widehat{c}\,'_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \widetilde{\mathcal{W}}^{\nu}_{8;\zeta}(x)\widehat{a}\,'_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \widetilde{\mathcal{W}}^{\nu}_{10;\zeta}(x)\widehat{\rho}\,'_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) =$$
$$= \int\limits_0^x \Big(\widetilde{\mathcal{W}}^{k,\nu}_0(x,\xi)\beta^{k,\nu}_{0,m,\zeta}(\xi) + \widetilde{\mathcal{W}}^{k,\nu}_1(x,\xi)\beta^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(\xi) + \widetilde{\mathcal{W}}^{k,\nu}_{2;m,\zeta}(x,\xi)\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(\xi) +$$
$$+ \widetilde{\mathcal{W}}^{k,\nu}_{3;m,\zeta}(x,\xi)\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(\xi) + \widetilde{\mathcal{W}}^{k,\nu}_{4;m,\zeta}(x,\xi)\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(\xi)\Big)\,d\,\xi +$$
$$+\widetilde{\mathcal{W}}^{k,\nu}_{5;m,\zeta}(x)\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) + \widetilde{\mathcal{W}}^{k,\nu}_{7;m,\zeta}(x)\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) +$$
$$+\widetilde{\mathcal{W}}^{k,\nu}_{9;m,\zeta}(x)\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x) - \frac{c_0^2}{a_0^2}\int\limits_0^x \overline{P}^{\,k,\nu}_{z;m,\zeta}\Big(\xi, x + \frac{c_0}{a_0}(x-\xi)\Big)\,d\,\xi + \widetilde{\mathcal{W}}^{k,\nu}_{11;m,\zeta}(x).$$

(7.62)

функция $\widetilde{\mathcal{W}}^{k,\nu}_{11;m,\zeta}(x)$, входящая в верхнее равенство, известна и зависит от величин $\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$, $\widehat{c}\,'_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$, $\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$, $\widehat{a}\,'_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$, $\widehat{p}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$, $\widehat{p}\,'_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$.

Введём следующие обозначения:

$$\mathbf{A}^{k,\nu}_{1;m,\zeta}(x) = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathcal{B}}_6 & 0 & \widetilde{\mathcal{B}}_{10} \\ \widetilde{\mathcal{K}}^k_{6;m}(x) & \widetilde{\mathcal{K}}^k_{8;m}(x) & \widetilde{\mathcal{K}}^k_{10;m}(x) \\ \widetilde{\mathcal{W}}^{\nu}_{6;\zeta}(x) & \widetilde{\mathcal{W}}^{\nu}_{8;\zeta}(x) & \widetilde{\mathcal{W}}^{\nu}_{10;\zeta}(x) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^{k,\nu}_2(x,\xi) = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathcal{B}}^{k,\nu}_0(\xi) & \widetilde{\mathcal{B}}^{k,\nu}_1(\xi) \\ \widetilde{\mathcal{K}}^{k,\nu}_0(x,\xi) & \widetilde{\mathcal{K}}^{k,\nu}_1(x,\xi) \\ \widetilde{\mathcal{W}}^{k,\nu}_0(x,\xi) & \widetilde{\mathcal{W}}^{k,\nu}_1(x,\xi) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{3;m,\zeta}^{k,\nu}(x,\xi)=\begin{pmatrix}\widetilde{\mathcal{B}}_{2;m,\zeta}^{k,\nu}(\xi) & \widetilde{\mathcal{B}}_{3;m,\zeta}^{k,\nu}(\xi) & \widetilde{\mathcal{B}}_{4;m,\zeta}^{k,\nu}(\xi)\\ \widetilde{\mathcal{K}}_{2;m,\zeta}^{k,\nu}(x,\xi) & \widetilde{\mathcal{K}}_{3;m,\zeta}^{k,\nu}(x,\xi) & \widetilde{\mathcal{K}}_{4;m,\zeta}^{k,\nu}(x,\xi)\\ \widetilde{\mathcal{W}}_{2;m,\zeta}^{k,\nu}(x,\xi) & \widetilde{\mathcal{W}}_{3;m,\zeta}^{k,\nu}(x,\xi) & \widetilde{\mathcal{W}}_{4;m,\zeta}^{k,\nu}(x,\xi)\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{4;m,\zeta}^{k,\nu}(x)=\begin{pmatrix}\widetilde{\mathcal{B}}_{5;m}^{k}(x) & \widetilde{\mathcal{B}}_{7;m}^{k}(x) & \widetilde{\mathcal{B}}_{9;m,\zeta}^{k}(x)\\ \widetilde{\mathcal{K}}_{5;m,\zeta}^{k}(x) & \widetilde{\mathcal{K}}_{7;m,\zeta}^{k}(x) & \widetilde{\mathcal{K}}_{9;m,\zeta}^{k}(x)\\ \widetilde{\mathcal{W}}_{5;m,\zeta}^{k,\nu}(x) & \widetilde{\mathcal{W}}_{7;m,\zeta}^{k,\nu}(x) & \widetilde{\mathcal{W}}_{9;m,\zeta}^{k,\nu}(x)\end{pmatrix},\quad \mathbf{D}_{4;m,\zeta}^{k,\nu}(x)=\begin{pmatrix}\widetilde{\mathcal{B}}_{11;m,\zeta}^{k,\nu}(x)\\ \widetilde{\mathcal{K}}_{11;m,\zeta}^{k,\nu}(x)\\ \widetilde{\mathcal{W}}_{11;m,\zeta}^{k,\nu}(x)\end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{U}}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x)=\begin{pmatrix}\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x)\\ \widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x)\\ \widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x)\end{pmatrix},\qquad \overrightarrow{\mathbf{B}}_{m,\zeta}^{k,\nu}(\xi)=\begin{pmatrix}\beta_{0,m,\zeta}^{k,\nu}(\xi)\\ \beta_{1,m,\zeta}^{k,\nu}(\xi)\end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{P}}_{m,\zeta}^{k,\nu}(x,\xi)=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\xi}^{x}\Big(\overline{P}_{r;m,\zeta}^{k,\nu}(\eta,t-\xi+\eta)+\overline{P}_{r;m,\zeta}^{k,\nu}(\eta,t+\xi-\eta)\Big)\,d\eta\\ -\dfrac{c_0^2}{a_0^2}\,\overline{P}_{\varphi;m,\zeta}^{k,\nu}\Big(\xi,\dfrac{a_0+c_0}{a_0}x-\dfrac{c_0}{a_0}\xi\Big)\\ -\dfrac{c_0^2}{a_0^2}\,\overline{P}_{z;m,\zeta}^{k,\nu}\Big(\xi,x+\dfrac{c_0}{a_0}(x-\xi)\Big)\end{pmatrix}.$$

Замечание 7.6. Заметим, что элементы матриц $\mathbf{A}_{1;m,\zeta}^{k,\nu}(x)$, $\mathbf{A}_{2}^{k,\nu}(x,\xi)$, $\mathbf{A}_{3;m,\zeta}^{k,\nu}(x,\xi)$, $\mathbf{A}_{4;m,\zeta}^{k,\nu}(x)$, $\mathbf{D}_{4;m,\zeta}^{k,\nu}(x)$ – известные функции, кроме того определитель матрицы $\mathbf{A}_{1;m,\zeta}^{k,\nu}(x)$ отличен от нуля, если параметры m, ζ, k, ν не равны нулю одновременно. Кроме того элементы матриц $\mathbf{A}_{2}^{k,\nu}(x,\xi)$, $\mathbf{A}_{3;m,\zeta}^{k,\nu}(x,\xi)$ и вектора $\overrightarrow{\mathbf{P}}_{m,\zeta}^{k,\nu}(x,\xi)$ зависят от k^2 и ν^2, а элементы матриц $\mathbf{A}_{1;m,\zeta}^{k,\nu}(x)$, $\mathbf{A}_{4;m,\zeta}^{k,\nu}(x)$ и вектора $\mathbf{D}_{4;m,\zeta}^{k,\nu}(x)$ зависят от k и ν линейно.

Уравнения (7.60)–(7.62) запишем в матричном виде

$$\begin{aligned}&\mathbf{A}_{1;m,\zeta}^{k,\nu}(x)\overrightarrow{\mathbf{U}}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(x)=\\ &=\int_0^x\Big(\mathbf{A}_{2}^{k,\nu}(x,\xi)\overrightarrow{\mathbf{B}}_{m,\zeta}^{k,\nu}(\xi)+\mathbf{A}_{3;m,\zeta}^{k,\nu}(x,\xi)\overrightarrow{\mathbf{U}}_{1,m+k,\zeta+\nu}(\xi)+\\ &\quad+\mathbf{A}_{4;m,\zeta}^{k,\nu}(x)\overrightarrow{\mathbf{U}}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(\xi)+\overrightarrow{\mathbf{P}}_{m,\zeta}^{k,\nu}(x,\xi)\Big)\,d\xi+\mathbf{D}_{4;m,\zeta}^{k,\nu}(x).\end{aligned}\tag{7.63}$$

Для определения функций $\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x)$, $\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x)$, $\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}$ воспользуемся равенством, также записанным в матричном виде

$$\overrightarrow{\mathbf{U}}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x)=\int_0^x\overrightarrow{\mathbf{U}}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(\xi)\,d\xi+\overrightarrow{\mathbf{U}}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0).\tag{7.64}$$

Замечание 7.7. Таким образом, мы получили замкнутую систему интегральных уравнений типа Вольтерра, связывающую функции

$$\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x),\quad \widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x),\quad \widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x)\quad\leftrightarrow\quad (7.64),$$
$$\widehat{c}\,'_{1,m+k,\zeta+\nu}(x),\quad \widehat{a}\,'_{1,m+k,\zeta+\nu}(x),\quad \widehat{\rho}\,'_{1,m+k,\zeta+\nu}(x)\quad\leftrightarrow\quad (7.63),$$
$$\beta^{k,\nu}_{0,m,\zeta}(x)\quad\leftrightarrow\quad(4.7),\quad \beta^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(x)\quad\leftrightarrow\quad(4.8),$$
$$\overline{U}^{k,\nu}_{1,m,\zeta},\quad \frac{\partial\overline{U}^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x},\quad \frac{\partial\overline{U}^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial t}\quad\leftrightarrow\quad (7.23)-(7.25),\quad (7.28)-(7.30),$$
$$\overline{V}^{k,\nu}_{1,m,\zeta},\quad \frac{\partial\overline{V}^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x},\quad \frac{\partial\overline{V}^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial t}\quad\leftrightarrow\quad (7.35)-(7.37),\quad (7.40)-(7.42),$$
$$\overline{W}^{k,\nu}_{1,m,\zeta},\quad \frac{\partial\overline{W}^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x},\quad \frac{\partial\overline{W}^{k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial t}\quad\leftrightarrow\quad (7.47)-(7.49),\quad (7.52)-(7.54).$$

Обозначим через $\overrightarrow{\mathbf{W}}(x,t)$ – вектор-функцию, компонентами которой являются перечисленные выше функции, а $\overrightarrow{\mathbf{W}}_0(x,t)$ – вектор-функцию, компонентами которой являются известные функции и константы, входящие в перечисленные выше уравнения. Тогда можем написать операторное уравнение

$$\overrightarrow{\mathbf{W}}(x,t)=\mathbf{A}\overrightarrow{\mathbf{W}}(x,t)+\overrightarrow{\mathbf{W}}_0(x,t). \tag{7.65}$$

Здесь $\mathbf{A}$ – интегральный оператор вольтерровского типа второго рода по переменной x; вектор-функция $\overrightarrow{\mathbf{W}}_0(x,t)$ – известна. Так как в силу условия теоремы $h^{1,k,\nu}_{r;m,\zeta}(t)$, $h^{1,k,\nu}_{\varphi;m,\zeta}(t)$, $h^{1,k,\nu}_{z;m,\zeta}\in C^3[0,T]$, то существует единственное решение $\overrightarrow{\mathbf{W}}(x,t)$ уравнения Вольтерра второго рода (7.65). Таким образом, функции

$$\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x),\ \widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x),\ \widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x)\in C^1[0,a_0T/(a_0+c_0)],$$
$$\Big(U^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(x,t),\ W^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(x,t),\ V^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(x,t)\Big)\in C^3(D^1_{*T})\cap C^1(\overline{D}^1_T),$$

являющиеся решениями системы интегральных уравнений, существуют и единственны. Отсюда следует, что существует единственное решение обратной задачи 2.4.

8. Устойчивость решения обратных задач 2.3 и 2.1

Пусть T, r_0, L_0, δ_0 – заданные положительные числа, $\delta_0<L_0$, $T<2r_0/\delta_0$. Обозначим $\mathbf{Q}_0=(\delta_0,L_0)$.

Замечание 8.1. В силу равенства (2.30) при $T<2r_0/c_0$ универсальная положительная величина ε_0 определяется следующим образом

$$0<\varepsilon_0:=r_0-TL_0/2\le r(T/2)\le|r(x)|\le r(0)=r_0.$$

Кроме того, при фиксированных T, r_0, L_0, c_0, a_0, ρ_0, m, ζ имеют место оценки

$$\begin{aligned}\|q^{m,\zeta}_0\|_{C(D^0_T)}&\leqslant L_0^2(\zeta^2+(m^2+1)),\\ \|U^{m,\zeta}_0\|_{C^2(D^0_T)}&\leqslant \mathbf{M}_1\exp\{\mathbf{M}_2(\zeta^2+(m^2+1))T\},\end{aligned}\tag{8.1}$$

где константа $\mathbf{M}_1$ зависит от r_0, L_0, δ_0, T, ρ_0 константа $\mathbf{M}_2$ зависит от r_0, L_0, δ_0, c_0, a_0.

Это утверждение легко получить, если воспользоваться представлениями (5.38)–(5.41).

Из результатов работы [3] вытекает следующая

Лемма 8.1. Пусть T, r_0, L_0, δ_0 - фиксированные положительные числа. Пусть функции $q_0^{m,\zeta}(x)$, $q_{0,*}^{m,\zeta}(x) \in \mathrm{C}[0,T/2]$ являются решениями обратной задачи 2.3, отвечающими информации $H_0^{m,\zeta}(t)$, $H_{0,*}^{m,\zeta}(t)$ при $t \in [0,T]$, соответственно. Тогда имеет место следующая оценка

(8.2)
$$\|U_0^{m,\zeta} - U_{0,*}^{m,\zeta}\|_{\mathrm{C}^2(\mathcal{D}_T^0)} \leqslant \mathbf{M}_3^{m,\zeta}\|q_0^{m,\zeta} - q_{0,*}^{m,\zeta}\|_{\mathrm{C}[0,T/2]} \leqslant \mathbf{M}_4^{m,\zeta}\|H_0^{m,\zeta} - H_{0,*}^{m,\zeta}\|_{\mathrm{C}^2[0,T]},$$

где $\mathbf{M}_3^{m,\zeta}$, $\mathbf{M}_4^{m,\zeta}$ – некоторые положительные числа, зависящие от T, r_0, L_0, δ_0, c_0, a_0, ρ_0 и параметров m и ζ.

Лемма 8.2. Пусть T, r_0, δ_0 ε_0, L_0 – заданные положительные числа; $T < 2r_0/\delta_0$. Тогда для констант c_0, a_0, ρ_0, $c_{0,*}$, $a_{0,*}$, $\rho_{0,*} \in \mathbf{Q}_0$, являющихся решениями обратной задачи 2.1, отвечающих информации $H_0^{0,0}(t)$, $H_{0,*}^{0,0}(t)$ и $H_0^{1,1}(t)$, $H_{0,*}^{1,1}(t)$ при $t \in [0,T]$, имеют место оценки

$$\begin{aligned}
|c_0 - c_{0,*}| &\le \mathbf{M}_5\|H_0^{0,0} - H_{0,*}^{0,0}\|_{\mathrm{C}^2[0,T]},\\
\|r - r_*\|_{\mathrm{C}^1[0,T/2]} &\le \mathbf{M}_6\|H_0^{0,0} - H_{0,*}^{0,0}\|_{\mathrm{C}^2[0,T]},\\
|a_0 - a_{0,*}| &\le \mathbf{M}_7\Big(\|H_0^{0,0} - H_{0,*}^{0,0}\|_{\mathrm{C}^2[0,T]} + \|H_0^{1,1} - H_{0,*}^{1,1}\|_{\mathrm{C}^2[0,T]}|\Big),\\
|\rho_0 - \rho_{0,*}| &\le \mathbf{M}_8\|H_0^{0,0} - H_{0,*}^{0,0}\|_{\mathrm{C}^2[0,T]},
\end{aligned} \tag{8.3}$$

константы $\mathbf{M}_5$–$\mathbf{M}_8$ зависят от L_0, T, r_0, δ_0.

Доказательство. Для доказательства воспользуемся равенствами (6.2), (6.3)

$$c_0^2 = -r_0^2\, q_0^{0,0}(0), \qquad a_0^2 = \frac{r_0^2}{r_0^2+1}\Big(q_0^{0,0}(0) - q_0^{1,1}(0)\Big), \qquad \rho_0 = \frac{1}{c_0\Big(H_0^{0,0}\Big)'(+0)}.$$

Из равенства

$$c_0^2 - c_{0,*}^2 = -r_0^2\Big(q_0^{0,0}(0) - q_{0,*}^{0,0}(0)\Big)$$

в силу (8.1) получим

$$|c_0 - c_{0,*}| = r_0^2\frac{\Big|q_0^{0,0}(0) - q_{0,*}^{0,0}(0)\Big|}{|c_0 + c_{0,*}|} \leqslant \frac{r_0^2}{2\delta_0}\mathbf{M}_5\|H_0^{0,0} - H_{0,*}^{0,0}\|_{\mathrm{C}^2[0,T]}. \tag{8.4}$$

Из равенства

$$a_0^2 - a_{0,*}^2 = \frac{r_0^2}{r_0^2+1}\Big(\Big(q_0^{0,0}(0) - q_{0,*}^{0,0}(0)\Big) - \Big(q_0^{1,1}(0) - q_{0,*}^{1,1}(0)\Big)\Big)$$

в силу (8.1) имеем

$$\begin{aligned}
|a_0 - a_{0,*}| &= \frac{r_0^2}{(r_0^2+1)|a_0 + a_{0,*}|}\Big(\Big|q_0^{0,0}(0) - q_{0,*}^{0,0}(0)\Big| - \Big|q_0^{1,1}(0) - q_{0,*}^{1,1}(0)\Big|\Big) \leqslant\\
&\leqslant \frac{r_0^2\mathbf{M}_5}{(r_0^2+1)2\delta_0}\Big(\|H_0^{0,0} - H_{0,*}^{0,0}\|_{\mathrm{C}^2[0,T]} + \|H_0^{0,1} - H_{0,*}^{0,1}\|_{\mathrm{C}^2[0,T]}|\Big).
\end{aligned} \tag{8.5}$$

Из равенства

$$\rho_0-\rho_{0,*} = \frac{1}{c_0\Big(H_0^{0,0}\Big)'(+0)}-\frac{1}{c_{0,*}\Big(H_{0,*}^{0,0}\Big)'(+0)} =$$
$$= \frac{c_{0,*}\Big(H_{0,*}^{0,0}\Big)'(+0)-c_0\Big(H_0^{0,0}\Big)'(+0)}{c_0c_{0,*}\Big(H_0^{0,0}\Big)'(+0)\Big(H_{0,*}^{0,0}\Big)'(+0)} =$$
$$= \frac{\Big(c_{0,*}-c_0\Big)\Big(H_{0,*}^{0,0}\Big)'(+0)+\Big(\Big(H_{0,*}^{0,0}\Big)'(+0)-\Big(H_0^{0,0}\Big)'(+0)\Big)c_0}{c_0c_{0,*}\Big(H_0^{0,0}\Big)'(+0)\Big(H_{0,*}^{0,0}\Big)'(+0)}$$

получим

$$|\rho_0-\rho_{0,*}| \leqslant \frac{\Big|c_{0,*}-c_0\Big|\Big|\Big(H_{0,*}^{0,0}\Big)'(+0)\Big|+\Big|\Big(H_{0,*}^{0,0}\Big)'(+0)-\Big(H_0^{0,0}\Big)'(+0)\Big|L_0}{\delta_0^2\Big|\Big(H_0^{0,0}\Big)'(+0)\Big|\Big|\Big(H_{0,*}^{0,0}\Big)'(+0)\Big|}.$$

В силу (8.4)

$$|\rho_0-\rho_{0,*}| \leqslant \mathbf{M}_8\|H_0^{0,0}-H_{0,*}^{0,0}\|_{\mathrm{C}^2[0,T]}. \tag{8.6}$$

Из (2.30) в силу (8.4) можем написать

$$\|r-r_*\|_{\mathrm{C}^1[0,T/2]} \leqslant \frac{T}{2}\,|c_0-c_{0,*}|. \tag{8.7}$$

Из равенств (8.4)–(8.7) следуют оценки (8.3). □

9. Устойчивость решения обратных задач 2.4 и 2.2

При решении обратной задачи 2.2 мы использовали параметры $m=0$, $\zeta=0$ и $m=1$, $\zeta=1$, а при решении обратной задачи 2.4 мы использовали параметры $m=1$, $\zeta=1$. В дальнейшем изложении мы сохраним использование буквенного обозначения параметров m и ζ, считая их равными единице.

Определим класс функций

$$\mathbf{Q}_1 := \Big\{g\in \mathrm{C}^1[0,T/2]\ \Big|\ \|g\|_{\mathrm{C}^1[0,T/2]}\leqslant L_1\Big\}.$$

Лемма 9.1. Пусть T, r_0, L_0, L_1, δ_0 – заданные положительные числа, $T<2r_0/\delta_0$. Пусть c_0, a_0, $\rho_0\in\mathbf{Q}_0$ – заданные константы, $\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}$, $\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}$, $\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}\in\mathbf{Q}_1$ – заданные функции. Тогда для функций $U_{1,m,\zeta}^{k,\nu}(x,t)$,$V_{1,m,\zeta}^{k,\nu}(x,t)$, $W_{1,m,\zeta}^{k,\nu}(x,t)$, являющихся решением прямой задачи (2.36)–(2.38), (2.40)–(2.42), (2.44)–(2.46), имеют место оценки:

$$\max\Big\{\|U_{1,m,\zeta}^{k,\nu}\|_{C^2(D_T^0)},\|V_{1,m,\zeta}^{k,\nu}\|_{C^2(D_{*T}^0)},\|W_{1,m,\zeta}^{k,\nu}\|_{C^2(D_{*T}^0)}\Big\}\leqslant \mathbf{C}_{2;m,\zeta}^{k,\nu}\exp\{\mathbf{C}_1^{k,\nu}T\}, \tag{9.1}$$

здесь $\|\cdot\|_{C^1(D_{*T}^0)}=\max\{\|\cdot\|_{C^1(D_{1T}^0)},\ \ \|\cdot\|_{C^1(D_{2T}^0)}\}$. Константа $\mathbf{C}_{2;m,\zeta}^{k,\nu}$ зависит от T, r_0, L_0, L_1, δ_0, ε_0 и линейно зависит от параметров k, ν; параметры m и ζ фиксированы и равны 1. Константа $\mathbf{C}_1^{k,\nu}$ зависит от r_0, L_0, L_1, δ_0, ε_0 и от параметров k^2, ν^2.

Доказательство. Заметим, что в равенства (5.11)–(5.13), (5.17)–(5.19), (5.22)–(5.24), (5.28)–(5.30), (5.33)–(5.35), входят функции $P^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(x,t)$, $P^{k,\nu}_{2,m,\zeta}(x,t)$, $P^{k,\nu}_{3,m,\zeta}(x,t)$, определяемые соотношениями (5.1) через функции

$$U^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(x,t),\ V^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(x,t),\ W^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(x,t),\ \Phi^{k,\nu}_{1;m,\zeta}(x,t),\ \Phi^{k,\nu}_{3;m,\zeta}(x,t),\ \Phi^{k,\nu}_{5;m,\zeta}(x,t).$$

Причём, коэффициенты при функциях $U^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(x,t)$, $V^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(x,t)$, $W^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(x,t)$ зависят от параметров k, ν, а функции $\Phi^{k,\nu}_{1;m,\zeta}(x,t)$, $\Phi^{k,\nu}_{3;m,\zeta}(x,t)$, $\Phi^{k,\nu}_{5;m,\zeta}(x,t)$ выражаются через функции $\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x)$, $\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x)$, $\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x)$ и их первые производные и зависят от параметров k, ν, m, ζ, а также от функций $U^{m,\zeta}_0(x,t)$, $\dfrac{\partial U^{m,\zeta}_0}{\partial x}(x,t)$, $\dfrac{\partial^2 U^{m,\zeta}_0}{\partial x^2}(x,t)$.

Продифференцируем равенства (5.11)–(5.12), (5.17)–(5.18), (5.22)–(5.23), (5.28)–(5.29), (5.33)–(5.34) по переменным x и t. Переходя во вновь полученных равенствах и в равенствах (5.11)–(5.13), (5.17)–(5.19), (5.22)–(5.24), (5.28)–(5.30), (5.33)–(5.35) к абсолютным величинам, получим неравенства, к которым применим лемму Гроноулла. Учитывая вид зависимости коэффициентов от параметров k, ν, m, ζ, а также определения классов $\mathbf{Q}_0$, $\mathbf{Q}_1$, получим утверждение леммы. $\square$

Замечание 9.1. Пусть T, r_0, L_0, δ_0 - заданные положительные числа. Пусть функции $\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}$, $\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}$, $\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}$ и $\widehat{c}^*_{1,m+k,\zeta+\nu}$, $\widehat{a}^*_{1,m+k,\zeta+\nu}$, $\widehat{\rho}^*_{1,m+k,\zeta+\nu} \in \mathbf{Q}_1$ являются решением обратной задачи 2.4, отвечающим информации $h_{r,m,\zeta}(t)$, $h_{\varphi,m,\zeta}(t)$, $h^{k,\nu}_{z,m,\zeta}(t)$ и $h^{k,\nu}_{r,m,\zeta,*}(t)$, $h^{k,\nu}_{\varphi,m,\zeta,*}(t)$, $h^{k,\nu}_{z,m,\zeta,*}(t)$, соответственно. Из равенства (7.1) получим оценки

$$\max\Big\{|\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)-\widehat{c}^*_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)|, |\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)-\widehat{a}^*_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)|,$$
$$|\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)-\widehat{\rho}^*_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)|\Big\} \leqslant$$
$$\leqslant \widetilde{\mathbf{C}}^{k,\nu}_{3,m,\zeta}\Big(\|H^{0,0}_0-H^{0,0}_{0,*}\|_{\mathrm{C}^2[0,T]}+\|H^{1,1}_0-H^{1,1}_{0,*}\|_{\mathrm{C}^2[0,T]}|\Big)+$$
$$+\widetilde{\mathbf{C}}^{k,\nu}_{4,m,\zeta}\Bigg(\Big|\,\Big(h^{1,k,\nu}_{r;m,\zeta}\Big)'(+0)-\Big(h^{1,k,\nu}_{r;m,\zeta,*}\Big)'(+0)\,\Big|+$$
$$+\Big|\,\Big(h^{1,k,\nu}_{\varphi;m,\zeta}\Big)''(+0)-\Big(h^{1,k,\nu}_{\varphi;m,\zeta,*}\Big)''(+0)\,\Big|+$$
$$+\Big|\,\Big(h^{1,k,\nu}_{z;m,\zeta}\Big)''(+0)-\Big(h^{1,k,\nu}_{z;m,\zeta,*}\Big)''(+0)\,\Big|\Bigg),$$

Из равенства (7.2) получим оценки

$$\max\Big\{|\widehat{c}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)-\widehat{c}^{*\prime}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)|, |\widehat{a}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)-\widehat{a}^{*\prime}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)|,$$
$$|\widehat{\rho}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)-\widehat{\rho}^{*\prime}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)|\Big\} \leqslant$$
$$\leqslant \widetilde{\mathbf{C}}^{k,\nu}_{5,m,\zeta}\Big(\|H^{0,0}_0-H^{0,0}_{0,*}\|_{\mathrm{C}^2[0,T]}+\|H^{1,1}_0-H^{1,1}_{0,*}\|_{\mathrm{C}^2[0,T]}|\Big)+$$

$$+\widetilde{\mathbf{C}}^{k,\nu}_{6,m,\zeta}\Bigg\{\Bigg(\Big|\left(h^{1,k,\nu}_{r;m,\zeta}\right)'(+0)-\left(h^{1,k,\nu}_{r;m,\zeta,*}\right)'(+0)\Big|+$$

$$+\Big|\left(h^{1,k,\nu}_{\varphi;m,\zeta}\right)''(+0)-\left(h^{1,k,\nu}_{\varphi;m,\zeta,*}\right)''(+0)\Big|+$$

$$+\Big|\left(h^{1,k,\nu}_{z;m,\zeta}\right)''(+0)-\left(h^{1,k,\nu}_{z;m,\zeta,*}\right)''(+0)\Big|\Bigg)+$$

$$+\Bigg(\Big|\left(h^{1,k,\nu}_{r;m,\zeta}\right)''(+0)-\left(h^{1,k,\nu}_{r;m,\zeta,*}\right)''(+0)\Big|+$$

$$+\Big|\left(h^{1,k,\nu}_{\varphi;m,\zeta}\right)'''(+0)-\left(h^{1,k,\nu}_{\varphi;m,\zeta,*}\right)'''(+0)\Big|+$$

$$+\Big|\left(h^{1,k,\nu}_{z;m,\zeta}\right)'''(+0)-\left(h^{1,k,\nu}_{z;m,\zeta,*}\right)'''(+0)\Big|\Bigg)\Bigg\}.$$

Объединяя эти оценки, получаем

$$\Big\{|\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)-\widehat{c}^{*}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)|,|\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)-\widehat{a}^{*}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)|,$$

$$|\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)-\widehat{\rho}^{*}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)|,|\widehat{c}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)-\widehat{c}^{*\prime}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)|,$$

$$|\widehat{a}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)-\widehat{a}^{*\prime}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)|,|\widehat{\rho}'_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)-\widehat{\rho}^{*\prime}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)|\Big\}\leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{C}^{k,\nu}_{3,m,\zeta}\Big(\|H^{0,0}_0-H^{0,0}_{0,*}\|_{\mathrm{C}^2[0,T]}+\|H^{1,1}_0-H^{1,1}_{0,*}\|_{\mathrm{C}^2[0,T]}|\Big)+$$

$$+\mathbf{C}^{k,\nu}_{4,m,\zeta}\Bigg(\Big\|\,h^{1,k,\nu}_{r;m,\zeta}-h^{1,k,\nu}_{r;m,\zeta,*}\,\Big\|_{\mathrm{C}^2[0,T]}+\Big\|\,h^{1,k,\nu}_{\varphi;m,\zeta}-h^{1,k,\nu}_{\varphi;m,\zeta,*}\,\Big\|_{\mathrm{C}^3[0,T]}+$$

$$+\Big\|\,h^{1,k,\nu}_{z;m,\zeta}-h^{1,k,\nu}_{z;m,\zeta,*}\,\Big\|_{\mathrm{C}^3[0,T]}\Bigg), \tag{9.2}$$

здесь константы $\mathbf{C}^{k,\nu}_{3,m,\zeta}$, $\mathbf{C}^{k,\nu}_{4,m,\zeta}$ зависят от T, r_0, L_0, δ_0 и параметров m, ζ, k, ν.

Лемма 9.2. Пусть T, r_0, L_0, L_*, δ_0 - заданные положительные числа, $T<2r_0/\delta_0$, пусть функции $\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}$, $\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}$, $\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}$ и $\widehat{c}^{*}_{1,m+k,\zeta+\nu}$, $\widehat{a}^{*}_{1,m+k,\zeta+\nu}$, $\widehat{\rho}^{*}_{1,m+k,\zeta+\nu}\in \mathrm{C}^1\Big[0,\dfrac{a_0T}{a_0+c_0}\Big]$; $U^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(x,t)$, $W^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(x,t)$, $V^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(x,t)$ и $U^{*;k,\nu}_{1,m,\zeta}(x,t)$, $W^{*;k,\nu}_{1,m,\zeta}(x,t)$, $V^{*;k,\nu}_{1,m,\zeta}(x,t)\in C^3(D^1_{*T})\cap C^1(\overline{D}^1_T)$, являются решением обратной задачи 2.4, отвечающим информации $h^{k,\nu}_{r,m,\zeta}(t)$, $h^{k,\nu}_{\varphi,m,\zeta}(t)$, $h^{k,\nu}_{z,m,\zeta}(t)$ и $h^{k,\nu}_{r,m,\zeta,*}(t)$, $h^{k,\nu}_{\varphi,m,\zeta,*}(t)$, $h^{k,\nu}_{z,m,\zeta,*}(t)$, соответственно. Тогда справедливы следующие оценки

$$\max\Big\{\|\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}-\widehat{c}^{*}_{1,m+k,\zeta+\nu}\|_{\mathrm{C}^1[0,\frac{Ta_0}{a_0+c_0}]},$$

$$\|\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}-\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu,*}\|_{\mathrm{C}^1[0,\frac{Ta_0}{a_0+c_0}]},$$

$$\|\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}-\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu,*}\|_{\mathrm{C}^1[0,\frac{Ta_0}{a_0+c_0}]},$$

$$\left.\begin{array}{l}\|U^{k,\nu}_{1,m,\zeta}-U^{*;k,\nu}_{1,m,\zeta}\|_{\mathrm{C}^3(\mathcal{D}^1_{*T})}, \|V^{k,\nu}_{1,m,\zeta}-V^{*;k,\nu}_{1,m,\zeta}\|_{\mathrm{C}^3(\mathcal{D}^1_{*T})},\\ \|W^{k,\nu}_{1,m,\zeta}-W^{*;k,\nu}_{1,m,\zeta}\|_{\mathrm{C}^3(\mathcal{D}^1_{*T})}\end{array}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{C}^{k,\nu}_{6;m,\zeta}\exp\{\mathbf{C}^{k,\nu}_5 T\}\Bigg(\Big(\|H^{0,0}_0-H^{0,0}_{0,*}\|_{\mathrm{C}^2[0,T]}+\|H^{1,1}_0-H^{1,1}_{0,*}\|_{\mathrm{C}^2[0,T]}|\Big)+$$

$$+\Big(\Big\|\,h^{1,k,\nu}_{r;m,\zeta}-h^{1,k,\nu}_{r;m,\zeta,*}\,\Big\|_{\mathrm{C}^3[0,T]}+\Big\|\,h^{1,k,\nu}_{\varphi;m,\zeta}-h^{1,k,\nu}_{\varphi;m,\zeta,*}\,\Big\|_{\mathrm{C}^3[0,T]}+$$

$$+\Big\|\,h^{1,k,\nu}_{z;m,\zeta}-h^{1,k,\nu}_{z;m,\zeta,*}\,\Big\|_{\mathrm{C}^3[0,T]}\Big)\Bigg), \tag{9.3}$$

здесь $\|\cdot\|_{\mathrm{C}^3(\mathcal{D}^1_{*T})}=\max\{\|\cdot\|_{\mathrm{C}^3(\mathcal{D}^1_{1T})},\|\cdot\|_{\mathrm{C}^3(\mathcal{D}^1_{2T})},\}$. Константа $\mathbf{C}^{k,\nu}_{6;m,\zeta}$ зависит от T, r_0, L_0, L_1, δ_0, ε_0 и линейно зависит от параметров k, ν; параметры m и ζ фиксированы и равны 1. Константа $\mathbf{C}^{k,\nu}_5$ зависит от r_0, L_0, L_1, δ_0, ε_0 и от параметров k^2, ν^2.

Доказательство. Для того, чтобы показать справедливость оценки (9.3), перейдем в операторном уравнении (7.65) к разностям

$$\overrightarrow{\mathcal{W}}=\overrightarrow{\mathbf{W}}-\overrightarrow{\mathbf{W}}_*,\quad \overrightarrow{\mathcal{W}}_0=\overrightarrow{\mathbf{W}}_0-\overrightarrow{\mathbf{W}}_{0*}.$$

Заметим, что компонентами вектор-функции $\overrightarrow{\mathcal{W}}$ в силу (7.63), (7.64) являются разности

$$\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x)-\widehat{c}^{\,*}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x),\quad \widehat{c}^{\,\prime}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x)-\widehat{c}^{\,*\prime}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x),$$

$$\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x)-\widehat{a}^{\,*}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x),\quad \widehat{a}^{\,\prime}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x)-\widehat{a}^{\,*\prime}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x),$$

$$\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x)-\widehat{\rho}^{\,*}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x),\quad \widehat{\rho}^{\,\prime}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x)-\widehat{\rho}^{\,*\prime}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x),$$

а также в силу (4.7), (4.8)

$$\beta^{k,\nu}_{0,m,\zeta}(x)-\beta^{*;k,\nu}_{0,m,\zeta}(x),\quad \beta^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(x)-\beta^{*;k,\nu}_{1,m,\zeta}(x),$$

которые выражаются через указанные выше функции. Коэффициентами при этих разностях являются

$$\overline{U}^{\,m,\zeta}_0,\quad \overline{U}^{\,m,\zeta}_{0,*},\ \frac{\partial\overline{U}^{\,m,\zeta}_0}{\partial x},\ \frac{\partial\overline{U}^{\,m,\zeta}_{0,*}}{\partial x},\ \frac{\partial^2\overline{U}^{\,m,\zeta}_0}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2\overline{U}^{\,m,\zeta}_{0,*}}{\partial x^2},\ c_0,\ c^*_0,\ a_0,\ a^*_0,\ \rho_0,\ \rho^*_0,\ r_0.$$

Кроме того, компонентами вектор-функции $\overrightarrow{\mathcal{W}}$ также являются разности

$$\overline{U}^{\,k,\nu}_{1,m,\zeta}(x,t)-\overline{U}^{\,*;k,\nu}_{1,m,\zeta}(x,t),\quad \frac{\partial\overline{U}^{\,k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x}(x,t)-\frac{\partial\overline{U}^{\,*;k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x}(x,t),$$

$$\overline{V}^{\,k,\nu}_{1,m,\zeta}(x,t)-\overline{V}^{\,*;k,\nu}_{1,m,\zeta}(x,t),\quad \frac{\partial\overline{V}^{\,k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x}(x,t)-\frac{\partial\overline{V}^{\,*,k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x}(x,t),$$

$$\overline{W}^{\,k,\nu}_{1,m,\zeta}(x,t)-\overline{W}^{\,*;k,\nu}_{1,m,\zeta}(x,t),\quad \frac{\partial\overline{W}^{\,k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x}(x,t)-\frac{\partial\overline{W}^{\,*;k,\nu}_{1,m,\zeta}}{\partial x}(x,t),$$

коэффициентами при которых в силу (7.21)–(7.25), (7.26)–(7.30), (7.33)–(7.37), (7.38)–(7.42), (7.45)–(7.49), (7.50)–(7.54), а также в силу (7.10)–(7.13) являются функции, зависящие от c_0, c^*_0, a_0, a^*_0, ρ_0, ρ^*_0, k, ν, r_0.

Вектор-функция $\overrightarrow{\mathcal{W}}_0$ в силу (7.11), (7.15), (7.1), (7.2) определяется посредством разностей

$$\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)-\widehat{c}^{\,*}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0),\quad \widehat{c}^{\,\prime}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)-\widehat{c}^{\,*\prime}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0),$$
$$\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)-\widehat{a}^{\,*}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0),\quad \widehat{a}^{\,\prime}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)-\widehat{a}^{\,*\prime}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0),$$
$$\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)-\widehat{\rho}^{\,*}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0),\quad \widehat{\rho}^{\,\prime}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)-\widehat{\rho}^{\,*\prime}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0),$$

коэффициенты при которых зависят от k, ν, m, ζ.

Также вектор-функция $\overrightarrow{\mathcal{W}}_0$ в силу (7.11)–(7.13) зависит от разностей

$$\overline{U}_0^{\,m,\zeta}-\overline{U}_{0,*}^{\,m,\zeta},\quad \frac{\partial\overline{U}_0^{\,m,\zeta}}{\partial x}-\frac{\partial\overline{U}_{0,*}^{\,m,\zeta}}{\partial x},\quad \frac{\partial^2\overline{U}_0^{\,m,\zeta}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\overline{U}_{0,*}^{\,m,\zeta}}{\partial x^2},$$

коэффициенты при которых зависят от c_0, c_0^*, a_0, a_0^*, ρ_0, ρ_0^* и

$$\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x),\quad \widehat{c}^{\,*}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x),\quad \widehat{c}^{\,\prime}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x),\quad \widehat{c}^{\,*\prime}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x),$$
$$\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x),\quad \widehat{a}^{\,*}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x),\quad \widehat{a}^{\,\prime}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x),\quad \widehat{a}^{\,*\prime}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x),$$
$$\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x),\quad \widehat{\rho}^{\,*}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x),\quad \widehat{\rho}^{\,\prime}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x),\quad \widehat{\rho}^{\,*\prime}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x).$$

Кроме того, в силу (7.11)–(7.13) вектор-функция $\overrightarrow{\mathcal{W}}_0$ определяется посредством разностей $c_0-c_0^*,\ a_0-a_0^*,\ \rho_0-\rho_0^*$ с коэффициентами, зависящими от функций

$$\overline{U}_0^{\,m,\zeta},\quad \overline{U}_{0,*}^{\,m,\zeta},\quad \frac{\partial\overline{U}_0^{\,m,\zeta}}{\partial x},\quad \frac{\partial\overline{U}_{0,*}^{\,m,\zeta}}{\partial x},\quad \frac{\partial^2\overline{U}_0^{\,m,\zeta}}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2\overline{U}_{0,*}^{\,m,\zeta}}{\partial x^2},$$
$$\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x),\quad \widehat{c}^{\,*}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x),\quad \widehat{c}^{\,\prime}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x),\quad \widehat{c}^{\,*\prime}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x),$$
$$\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x),\quad \widehat{a}^{\,*}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x),\quad \widehat{a}^{\,\prime}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x),\quad \widehat{a}^{\,*\prime}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x),$$
$$\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x),\quad \widehat{\rho}^{\,*}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x),\quad \widehat{\rho}^{\,\prime}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x),\quad \widehat{\rho}^{\,*\prime}_{1,m+k,\zeta+\nu}(x).$$

Также вектор-функция $\overrightarrow{\mathcal{W}}_0$ в силу (7.21)–(7.25), (7.26)–(7.30), (7.33)–(7.37), (7.38)–(7.42), (7.45)–(7.49), (7.50)–(7.54) определяется посредством данных обратной задачи

$$\overline{H}^{\,k,\nu}_{r;m,\zeta}(t)-\overline{H}^{\,*;k,\nu}_{r;m,\zeta}(t),\quad \left(\overline{H}^{\,k,\nu}_{r;m,\zeta}\right)'(t)-\left(\overline{H}^{\,*;k,\nu}_{r;m,\zeta}\right)'(t),$$
$$\overline{H}^{\,k,\nu}_{\varphi;m,\zeta}(t)-\overline{H}^{\,*;k,\nu}_{\varphi;m,\zeta}(t),\quad \left(\overline{H}^{\,k,\nu}_{\varphi;m,\zeta}\right)'(t)-\left(\overline{H}^{\,*;k,\nu}_{\varphi;m,\zeta}\right)'(t),$$
$$\overline{H}^{\,k,\nu}_{z;m,\zeta}(t)-\overline{H}^{\,*;k,\nu}_{z;m,\zeta}(t),\quad \left(\overline{H}^{\,k,\nu}_{z;m,\zeta}\right)'(t)-\left(\overline{H}^{\,*;k,\nu}_{z;m,\zeta}\right)'(t),$$

коэффициенты при которых зависят от c_0, c_0^*, a_0, a_0^*.

В силу (9.2) и замечаний 7.1 и 7.2 получим оценку для разности известных функций

$$\overline{F}^{\,k,\nu}_{\varphi;m,\zeta}(t)-\overline{F}^{\,*;k,\nu}_{\varphi;m,\zeta}(t),\quad \overline{F}^{\,k,\nu}_{r;m,\zeta}(t)-\overline{F}^{\,*;k,\nu}_{r;m,\zeta}(t),\quad \overline{F}^{\,k,\nu}_{z;m,\zeta}(t)-\overline{F}^{\,*;k,\nu}_{z;m,\zeta}(t),$$
$$\gamma^{k,\nu}_{3,m,\zeta}(x)-\gamma^{*;k,\nu}_{3,m,\zeta}(x),\qquad \eta^{k,\nu}_{3,m,\zeta}(x)-\eta^{*;k,\nu}_{3,m,\zeta}(x),\qquad \varepsilon^{k,\nu}_{3,m,\zeta}(x)-\varepsilon^{*;k,\nu}_{3,m,\zeta}(x),$$

которые выражаются через разности значений

$$\widehat{c}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)-\widehat{c}^{\,*}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0),\quad \widehat{c}^{\,\prime}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)-\widehat{c}^{\,*\prime}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0),$$
$$\widehat{a}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)-\widehat{a}^{\,*}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0),\quad \widehat{a}^{\,\prime}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)-\widehat{a}^{\,*\prime}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0),$$
$$\widehat{\rho}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)-\widehat{\rho}^{\,*}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0),\quad \widehat{\rho}^{\,\prime}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)-\widehat{\rho}^{\,*\prime}_{1,m+k,\zeta+\nu}(0)$$

и входят в $\overrightarrow{\mathbf{W}}_0(x,t)$ в уравнении (7.65).

Итак, переходя в операторном уравнении (7.65) к вектор-функциям $\overrightarrow{\mathcal{W}}(x,t)$ и $\overrightarrow{\mathcal{W}}_0(x,t)$, получим операторное уравнение

$$\overrightarrow{\mathcal{W}}(x,t) = \mathcal{A}\overrightarrow{\mathcal{W}}(x,t) + \overrightarrow{\mathcal{W}}_0(x,t). \tag{9.4}$$

Здесь $\mathcal{A}$ – интегральный оператор вольтерровского типа по переменной x.

Применяя к системе (9.4) лемму Гронуолла и используя леммы 9.1, 9.2 и замечание 9.1, а также, возвращаясь от функций

$$\overline{U}^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(x,t),\ \overline{U}^{*;k,\nu}_{1,m,\zeta}(x,t),\ \overline{V}^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(x,t),\ \overline{V}^{*;k,\nu}_{1,m,\zeta}(x,t),\ \overline{W}^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(x,t),\ \overline{W}^{*;k,\nu}_{1,m,\zeta}(x,t)$$

и

$$\overline{H}^{k,\nu}_{r;m,\zeta}(t),\quad \overline{H}^{*;k,\nu}_{r;m,\zeta}(t),\quad \overline{H}^{k,\nu}_{\varphi;m,\zeta}(t),\quad \overline{H}^{*;k,\nu}_{\varphi;m,\zeta}(t),\quad \overline{H}^{k,\nu}_{z;m,\zeta}(t),\quad \overline{H}^{*;k,\nu}_{z;m,\zeta}(t),$$

к функциям

$$U^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(x,t),\ U^{*;k,\nu}_{1,m,\zeta}(x,t),\ V^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(x,t),\ V^{*;k,\nu}_{1,m,\zeta}(x,t),\ W^{k,\nu}_{1,m,\zeta}(x,t),\ W^{*;k,\nu}_{1,m,\zeta}(x,t)$$

и

$$h^{k,\nu}_{r;m,\zeta}(t),\quad h^{*;k,\nu}_{r;m,\zeta}(t),\quad h^{k,\nu}_{\varphi;m,\zeta}(t),\quad h^{*;k,\nu}_{\varphi;m,\zeta}(t),\quad h^{k,\nu}_{z;m,\zeta}(t),\quad h^{*;k,\nu}_{z;m,\zeta}(t),$$

получим оценки (9.3). □

Далее рассматриваем функции

$$a_1(x,\varphi,z) := a_1(r(x),\varphi,z) \quad\text{и}\quad a_1^*(x,\varphi,z) := a_1^*(r(x),\varphi,z)\,,$$

где функция $r(x)$ определяется равенством (2.30). Для них имеют место равенства, аналогичные (2.8):

$$\begin{aligned} a_1(x,\varphi,z) \;&=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{a}_{1;k,\nu}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu\, z}\,d\,\nu\Big)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\varphi},\\ a_1^*(x,\varphi,z) \;&=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{a}^*_{1;k,\nu}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu\, z}\,d\,\nu\Big)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\varphi}, \end{aligned} \tag{9.5}$$

здесь $\widehat{a}_{1;k,\nu}(x) := \widehat{a}_{1;k}(r(x),\nu)$, $\widehat{a}^*_{1;k,\nu}(x) := \widehat{a}^*_{1;k}(r(x),\nu)$.

Аналогично определяем функции $c_1(x,\varphi,z)$, $c_1^*(x,\varphi,z)$, $\rho_1(x,\varphi,z)$, $\rho_1^*(x,\varphi,z)$, для которых имеют место аналогичные представления.

При этом функции $c_1(x,\varphi,z)$, $a_1(x,\varphi,z)$, $\rho_1(x,\varphi,z)$ и $c_1^*(x,\varphi,z)$, $a_1^*(x,\varphi,z)$, $\rho_1^*(x,\varphi,z)$ обладают такими же свойствами, что и функции $c_1(r,\varphi,z)$, $a_1(r,\varphi,z)$, $\rho_1(r,\varphi,z)$, указанными в пункте 2.

Пусть $\widehat{L}_*$, c_0, a_0, ρ_0 – заданные положительные числа. Положим

$$I = [0, a_0T/(a_0+c_0)]\,,\quad J=[0,T]\,,\quad \Lambda = \{(\varphi,z)\mid\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ -\infty<z<\infty\}$$

и определим следующие классы функций:

$$C^{k;m}_{(1);(2,3)} := \Big\{ f(x,\varphi,z)\,\Big|\,\forall\, x\in I\ f(x,\cdot,\cdot)\in C^m(\Lambda),\ \forall\,(\varphi,z)\in\Lambda\ f(\cdot,\varphi,z)\in C^k(I)\Big\},$$

$$CL^{k;m}_{(1);(2,3)} := \Big\{ f\in C^{k;m}_{(1);(2,3)}\ \Big|\ \forall x\in I\ \ f(x,\cdot,\cdot)\in L^1(\Lambda)\ \ \&\ \ \|f\|_{CL^{k;m}_{(1);(2,3)}} < +\infty\Big\}\,,$$

где

$$\|f\|_{CL^{k;m}_{(1);(2,3)}} := \iint\limits_{\Lambda}\ \sum_{\substack{0\le i\le k\\ 0\le j\le m\\ 0\le p\le m}}\ \sup_{x\in I}\left|\frac{\partial^{i+j+p}f}{\partial x^i\partial\varphi^j\partial z^p}\,(x,\varphi,z)\right|\,d\varphi\,dz\,,$$

$$\widetilde{C}^{k;m}_{(1);(2,3)} := \Big\{ h(t,\varphi,z) \;\Big|\; \forall\, t\in J\; h(t,\cdot,\cdot)\in C^m(\Lambda),\ \forall\,(\varphi,z)\in\Lambda\ \ h(\cdot,\varphi,z)\in C^k(J)\Big\},$$

$$\widetilde{CL}^{k;m}_{(1);(2,3)} := \Big\{ h\in C^{k;m}_{(1);(2,3)} \;\Big|\; \forall\, t\in J\ \ h(t,\cdot,\cdot)\in L^1(\Lambda)\ \ \&\ \ \|f\|_{\widetilde{CL}^{k;m}_{(1);(2,3)}} < +\infty \Big\},$$

где

$$\|h\|_{\widetilde{CL}^{k;m}_{(1);(2,3)}} := \iint\limits_{\Lambda} \sum_{\substack{0\le i\le k\\ 0\le j\le m\\ 0\le p\le m}} \sup_{t\in J} \left| \frac{\partial^{i+j+p} h}{\partial t^i \partial\varphi^j \partial z^p}\,(t,\varphi,z)\right| d\varphi\, dz\,,$$

и класс

$$\mathbf{Q}^*_1 = \Big\{ f(x,\varphi,z)\in CL^{1;2}_{(1);(2,3)} \;\Big|\; \Delta_{\varphi,z} f \in CL^{1;1}_{(1);(2,3)}\ \ \&\ \ \|\Delta_{\varphi,z} f\|_{CL^{1;1}_{(1);(2,3)}} \le \widehat{L}_* \Big\},$$

где $\Delta_{\varphi,z} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Так как для функции $c_1(x,\varphi,z)$ из класса $\mathbf{Q}^*_1$ справедливо равенство

$$\Delta_{\varphi,z} c_1(r,\varphi,z) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big(\frac{(\mathrm{i}k)^2}{r^2} + (\mathrm{i}\nu)^2\Big)\widehat{c}_{1;k}(r,\nu)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z\nu}\, d\,\nu\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\varphi},$$

то

$$\widehat{\Delta_{\varphi,z} c_1}_{k,\nu}(x) = \left(\frac{(\mathrm{i}k)^2}{r^2} + (\mathrm{i}\nu)^2\right)\widehat{c}_{1;k,\nu}(x)$$

и, следовательно,

$$\widehat{c}_{1;k,\nu}(x) = \frac{r^2(x)}{(\mathrm{i}k)^2 + r^2(x)(\mathrm{i}\nu)^2}\,\widehat{\Delta_{\varphi,z} c_1}_{k,\nu}(x)\,. \tag{9.6}$$

Если $f(x,\varphi,z)\in CL^{1;1}_{(1);(2,3)}$, то

$$\begin{aligned}\widehat{f}_{k,\nu}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_k(x,z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z\nu}\, d\,z = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{2\pi} f(x,\varphi,z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\varphi}\, d\,\varphi\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z\nu}\, d\,z = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{2\pi}\left(f(x,\varphi,z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\varphi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z\nu}\right) d\,\varphi\, d\,z\,,\end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\sup_{x\in I}|\widehat{f}_{k,\nu}(x)| \le \frac{1}{2\pi}\cdot\|f\|_{CL^{1;1}_{(1);(2,3)}}\,.$$

Поэтому, применяя эту оценку к равенству (9.6), получаем, что

$$|\widehat{c}_{1;k,\nu}(x)| \le \frac{\widehat{L}_*}{2\pi}\cdot\frac{r_0^2}{k^2+\varepsilon_0^2\nu^2} \le \frac{r_0^2\widehat{L}_*}{k^2+\varepsilon_0^2\nu^2}\,,\quad x\in I,\quad k^2+\nu^2\ne 0,$$

где константа $\widehat{L}_*$ – из определения класса функций $\mathbf{Q}^*_1$, а ε_0 – константа, отделяющая функцию $r(x)$ от нуля.

Так как в качестве параметров m и ζ мы взяли $m = 1$ и $\zeta = 1$, то

$$(9.7) \qquad |\widehat{c}_{1;k+1,\nu+1}(x)| \leq \frac{r_0^2 \widehat{L}_*}{(k+1)^2 + \varepsilon_0^2(\nu+1)^2}, \quad x \in I, \quad k, \nu \neq -1.$$

При $k = -1$, $\nu = -1$ в силу определения класса Q_1^* для $x \in I$ имеем

$$|\widehat{c}_{1;0,0}(x)|, \quad |\widehat{c}'_{1;0,0}(x)|, \quad |\widehat{a}_{1;0,0}(x)|, \quad |\widehat{a}'_{1;0,0}(x)|, \quad |\widehat{\rho}_{1;0,0}(x)|, \quad |\widehat{\rho}'_{1;0,0}(x)| \leqslant \widehat{L}_*.$$

Обозначим

$$\begin{aligned}\kappa^2 &= \|H_0^{0,0} - H_{0,*}^{0,0}\|^2_{C^2[0,T]} + \|H_0^{1,1} - H_{0,*}^{1,1}\|^2_{C^2[0,T]} + \\ &+ \|h_r^1 - h_{r;*}^1\|^2_{\widetilde{CL}^{3;2}_{(1);(2,3)}} + \|h_\varphi^1 - h_{\varphi;*}^1\|^2_{\widetilde{CL}^{3;2}_{(1);(2,3)}} + \|h_z^1 - h_{z;*}^1\|^2_{\widetilde{CL}^{3;2}_{(1);(2,3)}}.\end{aligned}$$

Из (9.5) и леммы 9.2 следует теорема, доказательство которой проводится аналогично работе [4] .

Теорема 9.1. Пусть T, r_0, L_0, $\widehat{L}_*$, δ_0 - заданные положительные числа, $T < 2r_0/L_0$ и $\kappa < \exp(-1/2)$. Тогда для функций $c_1(x,\varphi,z)$, $c_1^*(x,\varphi,z)$, $a_1(x,\varphi,z)$, $a_1^*(x,\varphi,z)$, $\rho_1(x,\varphi,z)$, $\rho_1^*(x,\varphi,z) \in \mathbf{Q}_1^*$, отвечающих информации $h_r^1(x,\varphi,z)$, $h_{r;*}^1(x,\varphi,z)$, $h_\varphi^1(x,\varphi,z)$, $h_{\varphi;*}^1(x,\varphi,z)$, $h_z^1(x,\varphi,z)$, $h_{z;*}^1(x,\varphi,z)$, соответственно, имеют место следующие оценки

$$\begin{aligned}\|c_1 - c_1^*\|^2_{CL^{1;2}_{(1);(2,3)}} &\leq \frac{\mathbf{b}_1}{\ln \kappa^{-1}}, \\ \|a_1 - a_1^*\|^2_{CL^{1;2}_{(1);(2,3)}} &\leq \frac{\mathbf{b}_1}{\ln \kappa^{-1}}, \\ \|\rho_1 - \rho_1^*\|^2_{CL^{1;2}_{(1);(2,3)}} &\leq \frac{\mathbf{b}_1}{\ln \kappa^{-1}},\end{aligned}$$

где константа $\mathbf{b}_1$ зависит от r_0, δ_0, ε_0, L_0, L_1, $\widehat{L}_*$.

Список литературы

[1] T. V. Bugueva, *Determining of density function in the multi-dimensional inverse problem of isotropic elasticity in a sphere*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. The Netherlands, Utrecht, VSP, **6**:3 (1998) 173–203. MR1643751

[2] T. V. Bugueva, *Multidimensional inverse problem for isotropic elasticity problem in a sphere*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. Walter de Gruyter, Berlin, New York, **15**:9 (2007), 893–934. MR2384301

[3] V. G. Romanov, *Inverse Problems of Mathematical Physics*, VNU Sciences Press, Utrecht, 1987. MR0885902

[4] T. V. Bugueva, *A linearized inverse problem for the wave equation in a sphere*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. The Netherlands, Utrecht, VSP, **4**:3 (1996) 171–189. MR1401485

Бугуева Татьяна Владимировна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова 2,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: bugueva@math.nsc.ru