S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 9, стр. 618–638 (2012) УДК 517.956.223
MSC 35J40

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Л.Н. БОНДАРЬ

Abstract. In the present paper we consider the Dirichlet problem for one elliptic equation with a parameter in a half-space. We establish solvability of the boundary value problem in the Sobolev space W_p^{4l} under restrictions on p.

Keywords: elliptic equation, boundary value problem, Sobolev space.

1. Постановка задачи

В работе рассматривается задача Дирихле в полупространстве $R^n_+ = \{x = (x', x_n) : x' \in R^{n-1},\ x_n > 0\}$ для одного эллиптического уравнения:

$$\begin{cases} \triangle^{2l} u + \varepsilon(-1)^l \triangle^l u = f(x), \quad x \in R^n_+, \\ D^{j-1}_{x_n} u\big|_{x_n=0} = 0, \quad j = 1, \dots, 2l, \end{cases} \tag{1.1}$$

где $\varepsilon > 0$. Будем считать, что $2l < n + 1$. Исследуется разрешимость краевой задачи (1.1) в соболевском пространстве $W_p^{4l}(R^n_+)$, $1 < p < \infty$. Доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $f(x) \in L_p(R^n_+)$, $(1 + |x|)f(x) \in L_1(R^n_+)$ и $p > n/(n + 1 - 2l)$. Тогда краевая задача* (1.1) *однозначно разрешима в соболевском пространстве $W_p^{4l}(R^n_+)$, и для решения $u(x)$ справедлива оценка*

$$\|u(x), W_p^{4l}(R^n_+)\| \le c(\|f(x), L_p(R^n_+)\| + \|(1 + |x|)f(x), L_1(R^n_+)\|) \tag{1.2}$$

с константой $c > 0$, не зависящей от $f(x)$.

Bondar, L.N., On solvability of one elliptic equation in a half-space.

© 2012 Бондарь Л.Н.

Работа выполнена при поддержке ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг.(соглашение №14.B37.21.0355), Российского фонда фундаментальных исследований (№ 12-01-31030) и Сибирского отделения Российской академии наук (междисциплинарный проект № 80).

Поступила 3 октября 2012 г., опубликована 7 декабря 2012 г.

Замечание 1. Ограничение на p, $p > n/(n+1-2l)$, в теореме по существу. Так, например, даже в случае $f(x) \in C_0^\infty(R_+^3)$ для разрешимости краевой задачи (1.1) при $l=1$, $n=3$ в $W_p^4(R_+^3)$, $1 < p \le 3/2$, необходимо, чтобы

$$\int\limits_{R_+^3} \big(1 - \exp\left(-\sqrt{\varepsilon} x_3\right) - \sqrt{\varepsilon} x_3\big)\, f(x)\, dx = 0. \tag{1.3}$$

Доказательство этого утверждения содержится в п. 5.

Замечание 2. В пределе при $\varepsilon \to 0$ теорема не имеет места. Отметим, что краевая задача (1.1) в случае $\varepsilon = 0$ безусловно разрешима в $W_p^{4l}(R_+^n)$ для любой $f(x) \in C_0^\infty(R_+^n)$ только при $p > n/(n+1-4l)$, $n+1-4l > 0$. При $p \le n/(n+1-4l)$ для разрешимости необходимо, чтобы

$$\int\limits_{R_+^n} x_n f(x)\, dx = 0.$$

Подробнее см. [1].

2. Приближенные решения

Формулы решения краевой задачи (1.1) можно получить по аналогии с работой С.Л. Соболева (см., например, [2, § 14]). Мы доказываем теорему с помощью построения последовательности приближенных решений краевой задачи (1.1). Приближенные решения строятся по аналогии с приближенными решениями краевых задач для квазиэллиптических уравнений с постоянными коэффициентами (см. [3, 4]). Кратко опишем эту конструкцию. Она основана на использовании интегрального представления функций $f(x') \in L_p(R^{n-1})$, полученного С. В. Успенским [5, 6]:

$$f(x') = \lim_{k\to\infty} (2\pi)^{1-n} \int\limits_{1/k}^{k} v^{-1} \int\limits_{R^{n-1}} \int\limits_{R^{n-1}} \exp\left(i(x'-y')s\right) G(s v^{\frac{1}{2l}}) f(y')\, ds\, dy'\, dv,$$

где

$$G(s) = N|s|^{2lN} \exp\left(-|s|^{2lN}\right),$$

предел понимается в смысле сходимости в $L_p(R^{n-1})$. Натуральное число N можно выбрать сколь угодно большим.

Предположим, что правая часть $f(x) \in C_0^\infty(R_+^n)$. Обозначим через $\widetilde{f}(s, x_n)$ преобразование Фурье функции $f(x', x_n)$ по x'.

Рассмотрим краевую задачу на полуоси для обыкновенного дифференциального уравнения с параметром $s \in R^{n-1} \setminus \{0\}$:

$$\begin{array}{l} (D_{x_n}^2 - |s|^2)^l((D_{x_n}^2 - |s|^2)^l + \varepsilon(-1)^l)\omega = \widetilde{f}(s, x_n), \quad x_n > 0, \\ D_{x_n}^{q-1}\omega|_{x_n=0} = 0, \quad q = 1, \dots, 2l, \\ \sup\limits_{x_n>0} |\omega| < \infty. \end{array} \tag{2.1}$$

Решение краевой задачи (2.1) можно представить в виде

$$\omega(s, x_n) = \omega_0(s, x_n) + v(s, x_n), \tag{2.2}$$

где $\omega_0(s, x_n)$ — ограниченное решение уравнения

$$(D_{x_n}^2 - |s|^2)^l((D_{x_n}^2 - |s|^2)^l + \varepsilon(-1)^l)\omega = \widetilde{f}(s, x_n), \quad x_n > 0,$$

и функция $v(s,x_n)$ — решение краевой задачи

$$\begin{aligned} &(D^2_{x_n}-|s|^2)^l((D^2_{x_n}-|s|^2)^l+\varepsilon(-1)^l)\omega=0, \quad x_n>0,\\ &D^{q-1}_{x_n}\omega|_{x_n=0}=\varphi_q(s), \quad q=1,\dots,2l,\\ &\sup_{x_n>0}|\omega|<\infty, \end{aligned} \tag{2.3}$$

где $\varphi_q(s)=-D^{q-1}_{x_n}\omega_0(s,x_n)|_{x_n=0}$.

В качестве $\omega_0(s,x_n)$ можно взять следующую ограниченную функцию

$$\omega_0(s,x_n)=Rf(s,x_n)=\int\limits_0^{x_n}J^{\varepsilon}_{+}(s,x_n-y_n)\widetilde{f}(s,y_n)dy_n$$

$$+\int\limits_{x_n}^{\infty}J^{\varepsilon}_{-}(s,x_n-y_n)\widetilde{f}(s,y_n)dy_n, \tag{2.4}$$

где

$$\begin{aligned} J^{\varepsilon}_{+}(s,x_n)&=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma^+}\frac{\exp(ix_n\lambda)}{(|s|^2+\lambda^2)^l((|s|^2+\lambda^2)^l+\varepsilon)}d\lambda,\\ J^{\varepsilon}_{-}(s,x_n)&=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma^-}\frac{\exp(ix_n\lambda)}{(|s|^2+\lambda^2)^l((|s|^2+\lambda^2)^l+\varepsilon)}d\lambda, \end{aligned} \tag{2.5}$$

при этом контур $\Gamma^+=\Gamma^+(s)$ охватывает все корни $(|s|^2+\lambda^2)^l((|s|^2+\lambda^2)^l+\varepsilon)=0, \quad s\in R^{n-1}\backslash\{0\}$, лежащие в верхней полуплоскости, а контур $\Gamma^-=\Gamma^-(s)$ охватывает корни, лежащие в нижней полуплоскости.

Обозначим через $\omega_j(s,x_n)$ решение краевой задачи (2.3) с граничным вектором $(\varphi_1,\dots,\varphi_{2l})^T=e_j$. Тогда функцию $v(s,x_n)$ из (2.2) можно представить следующим образом

$$v(s,x_n)=\sum_{j=1}^{2l}\varphi_j(s)\omega_j(s,x_n),$$

где $\varphi_j(s)=-D^{j-1}_{x_n}\omega_0(s,x_n)|_{x_n=0}$.

Следовательно,

$$\omega(s,x_n)=\omega_0(s,x_n)+\sum_{j=1}^{2l}\varphi_j(s)\omega_j(s,x_n). \tag{2.6}$$

Проводя рассуждения, как и в [3, 4], получим, что в качестве приближенных решений можно взять следующую последовательность функций

$$u_k(x)=(2\pi)^{(1-n)/2}\int\limits_{1/k}^{k}v^{-1}\int\limits_{R^{n-1}}\exp(ix's)G(sv^{\frac{1}{2l}})\omega(s,x_n)dsdv.$$

3. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *При $x_n>0$ и $s\in R^{n-1}\backslash\{0\}$ для любых $\varkappa$ справедливы оценки*

$$\begin{aligned} &|D^{\varkappa_n}_{x_n}D^{\varkappa'}_{s}J^{\varepsilon}_{+}(s,x_n)|+|D^{\varkappa_n}_{x_n}D^{\varkappa'}_{s}J^{\varepsilon}_{-}(s,-x_n)|\\ &\le c_1|s|^{1-2l+\varkappa_n-|\varkappa'|}(|s|+\varepsilon^{\frac{1}{2l}})^{-2l}\exp(-|s|x_n/2)\\ &+c_2(|s|+\varepsilon^{\frac{1}{2l}})^{1-4l+\varkappa_n-|\varkappa'|}\exp(-\delta/2(|s|+\varepsilon^{\frac{1}{2l}})x_n), \end{aligned}$$

$$|D_{x_n}^{\varkappa_n} D_s^{\varkappa'} \omega_j(s,x_n)| \le c_1 |s|^{1-j+\varkappa_n-|\varkappa'|} \exp\left(-|s|x_n/2\right)$$
$$+c_2|s|^{l-j+1-|\varkappa'|}(|s|+\varepsilon^{\frac{1}{2l}})^{\varkappa_n-l} \exp\left(-\delta/2(|s|+\varepsilon^{\frac{1}{2l}})x_n\right), \quad j=1,\dots,l,$$
$$|D_{x_n}^{\varkappa_n} D_s^{\varkappa'} \omega_j(s,x_n)| \le c_1 |s|^{1-l+\varkappa_n-|\varkappa'|}(|s|+\varepsilon^{\frac{1}{2l}})^{l-j} \exp\left(-|s|x_n/2\right)$$
$$+c_2(|s|+\varepsilon^{\frac{1}{2l}})^{1-j+\varkappa_n-|\varkappa'|} \exp\left(-\delta/2(|s|+\varepsilon^{\frac{1}{2l}})x_n\right), \quad j=l+1,\dots,2l.$$

Доказательство. Поскольку для корней уравнения $(|s|^2+\lambda^2)^l((|s|^2+\lambda^2)^l+\varepsilon)=0, \quad s\in R^{n-1}\backslash\{0\}$ выполнены следующие неравенства

$$\delta(|s|+\varepsilon^{\frac{1}{2l}}) \le |\mathrm{Im}\lambda_j^{\pm}(s)| \le |\lambda_j^{\pm}(s)| \le (|s|+\varepsilon^{\frac{1}{2l}}), \quad 0<\delta<1,$$
$$\lambda_{j+l}^{\pm}(s) = \pm i|s|, \quad j=1,\dots,l,$$

значит группы корней, лежащие в верхней полуплоскости $\lambda_j^+(s)$, $j=1,\dots,2l$, и в нижней полуплоскости $\lambda_j^-(s)$, $j=1,\dots,2l$, расположены друг от друга на расстоянии не менее, чем $\min\{2|s|, 2\delta(|s|+\varepsilon^{\frac{1}{2l}})\}$. Поэтому в малой окрестности любой точки $s^*\in R^{n-1}\backslash\{0\}$ рассматриваемые контурные интегралы можно записать по контурам, не зависящим от s. Следовательно, при вычислении их производных по s можно дифференцировать только подынтегральные выражения.

Оценим $D_{x_n}\omega_j(s,x_n)$. Функции $D_{x_n}^{\varkappa_n} D_s^{\varkappa'} \omega_j(s,x_n)$, $D_{x_n}^{\varkappa_n} D_s^{\varkappa'} J_{\pm}^{\varepsilon}(s,x_n)$ оцениваются аналогично. Функцию $\omega_j(s,x_n)$ можно представить в виде

$$\omega_j(s,x_n) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma^+(s)} \frac{\exp(ix_n\lambda)}{M^+(s,\lambda)} N_j(s,\lambda)\,d\lambda,$$

где по определению

$$M^+(s,\lambda) = (\lambda - i|s|)^l \prod_{j=1}^{l}(\lambda-\lambda_j^+(s)) = \sum_{j=0}^{2l} a_j(s)\lambda^{2l-j},$$
$$N_j(s,\lambda) = \sum_{i=0}^{2l-j} a_i(s)\lambda^{2l-j-i}.$$

Из явного вида $N_j(s,\lambda)$ получим при $j=1,\dots,l$

$$|N_j(s,\lambda)| \le \begin{cases} c_1(|s|+\varepsilon^{\frac{1}{2l}})^{2l-j}, & |\lambda|<2(|s|+\varepsilon^{\frac{1}{2l}}), \\ c_2|s|^{l-j}(|s|+\varepsilon^{\frac{1}{2l}})^{l}, & |\lambda|<2|s|. \end{cases}$$

При $j=l+1,\dots,2l$

$$|N_j(s,\lambda)| \le c_1(|s|+\varepsilon^{\frac{1}{2l}})^{2l-j}, \quad |\lambda|<2(|s|+\varepsilon^{\frac{1}{2l}}), \quad |\lambda|<2|s|.$$

Рассмотрим отдельно два случая, когда $|s|>\gamma$ и $|s|<\gamma$, где $\gamma=\frac{\delta}{8-\delta}\varepsilon^{\frac{1}{2l}}$. В первом случае в качестве контура $\Gamma^+(s)$ возьмем границу области $\{\lambda\in C: \mathrm{Im}\lambda>|s|/2,\ |\lambda|<2(|s|+\varepsilon^{\frac{1}{2l}})\}$,

$$|D_{x_n}\omega_j(s,x_n)| \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma^+(s)} |\lambda|\frac{\exp(-x_n\mathrm{Im}\lambda)}{|M^+(s,\lambda)|}|N_j(s,\lambda)|\,d\lambda$$
$$\le c_1|s|^{-l}(|s|+\varepsilon^{\frac{1}{2l}})^{2+l-j}\exp\left(-|s|x_n/2\right)$$

$$\leq c_2 \begin{cases} |s|^{2-j} \exp{(-|s|x_n/2)}, & j = 1, \dots, l, \\ \\ |s|^{2-l}(|s| + \varepsilon^{\frac{1}{2l}})^{l-j} \exp{(-|s|x_n/2)}, & j = l+1, \dots, 2l. \end{cases}$$

В случае, когда $|s| < \gamma$ разобьем контур $\Gamma^+(s)$ на два контура $\Gamma^+_{\text{н}}(s) = \partial\{\lambda \in C : |s|/2 < \mathrm{Im}\lambda,\ |\lambda| < 2|s|\}$ и $\Gamma^+_{\text{в}}(s) = \partial\{\lambda \in C : \delta/2(|s| + \varepsilon^{\frac{1}{2l}}) < \mathrm{Im}\lambda,\ |\lambda| < 2(|s| + \varepsilon^{\frac{1}{2l}})\}$. Для проведения оценки функции $D_{x_n}\omega_j(s, x_n)$ преобразуем интеграл по $\Gamma^+_{\text{в}}(s)$, пользуясь при этом теоремой Коши, следующим образом:

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma^+_{\text{в}}(s)} \exp{(i\lambda x_n)}\lambda^{1-j} \frac{M^+(s,\lambda) - a_{2l-j+1}(s)\lambda^{j-1} - \dots - a_{2l}(s)}{M^+(s,\lambda)}\, d\lambda$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma^+_{\text{в}}(s)} \exp{(i\lambda x_n)} \frac{a_{2l-j+1}(s) + \dots + a_{2l}(s)\lambda^{1-j}}{M^+(s,\lambda)}\, d\lambda.$$

Тогда будем иметь

$$|D_{x_n}\omega_j(s, x_n)| \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma^+_{\text{н}}(s)} |\lambda| \frac{\exp{(-x_n \mathrm{Im}\lambda)}}{|M^+(s,\lambda)|} |N_j(s,\lambda)|\, d\lambda$$

$$+\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma^+_{\text{в}}(s)} \frac{\exp{(-x_n \mathrm{Im}\lambda)}}{|M^+(s,\lambda)|} (|a_{2l-j+1}(s)| + \dots + |a_{2l}(s)||\lambda|^{1-j}|)\, d\lambda$$

$$\leq \begin{cases} c_1|s|^{2-j} \exp{(-|s|x_n/2)}, & j = 1, \dots, l, \\ \\ c_2|s|^{2-l}(|s| + \varepsilon^{\frac{1}{2l}})^{l-j} \exp{(-|s|x_n/2)}, & j = l+1, \dots, 2l, \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} c_1|s|^{1+l-j}(|s| + \varepsilon^{\frac{1}{2l}})^{1-l} \exp{(-\delta/2(|s| + \varepsilon^{\frac{1}{2l}})x_n)}, & j = 1, \dots, l, \\ \\ c_2(|s| + \varepsilon^{\frac{1}{2l}})^{2-j} \exp{(-\delta/2(|s| + \varepsilon^{\frac{1}{2l}})x_n)}, & j = l+1, \dots, 2l, \end{cases}$$

Лемма 2. *Для любого вектора* $\nu = (\nu', \nu_n)$, $|\nu| = 4l$, *функции*

$$\mu^+(s, i\xi_n) = (is)^{\nu'} \int\limits_0^\infty \exp{(-ix_n\xi_n)} D^{\nu_n}_{x_n} J^\varepsilon_+(s, x_n)\, dx_n,$$

$$\mu^-(s, i\xi_n) = (is)^{\nu'} \int\limits_{-\infty}^0 \exp{(ix_n\xi_n)} D^{\nu_n}_{x_n} J^\varepsilon_-(s, x_n)\, dx_n,$$

$$\mu_j(s, \xi_n) = |s|^{j-1-\nu_n} \int\limits_0^\infty \exp{(ix_n\xi_n)} D^{\nu_n+1}_{x_n} \omega_j(s, x_n)\, dx_n,$$

$$j = 1, \dots, 2l, \quad \nu_n < l,$$

$$\mu_j(s, \xi_n) = |s|^{-1}(|s| + \varepsilon^{\frac{1}{2l}})^{j-\nu_n} \int\limits_0^\infty \exp{(ix_n\xi_n)} D^{\nu_n+1}_{x_n} \omega_j(s, x_n)\, dx_n,$$

$$j = 1, \dots, l, \quad \nu_n \geq l,$$

$$\mu_j(s, \xi_n) = (|s| + \varepsilon^{\frac{1}{2l}})^{j-1-\nu_n} \int\limits_0^\infty \exp{(ix_n\xi_n)} D^{\nu_n+1}_{x_n} \omega_j(s, x_n)\, dx_n,$$

$$j = l+1, \dots, 2l, \quad \nu_n \geq l,$$

являются мультипликаторами в $L_p(R^n)$.

В силу теоремы Лизоркина (см., например, [6, 7]) и леммы 1 получим требуемое утверждение.

4. Доказательство теоремы

Для доказательства теоремы нам нужно оценить $u_k(x)$ в W_p^{4l}-норме. Представим функцию $u_k(x)$ в виде:

$$u_k(x) = u_k^0(x) + \sum_{j=1}^{2l} u_k^j(x), \tag{4.1}$$

где

$$u_k^0(x) = (2\pi)^{(1-n)/2} \int\limits_{1/k}^{k} v^{-1} \int\limits_{R^{n-1}} \exp{(ix's)} G(sv^{\frac{1}{2l}}) \omega_0(s, x_n) \, ds \, dv,$$

$$u_k^j(x) = (2\pi)^{(1-n)/2} \int\limits_{1/k}^{k} v^{-1} \int\limits_{R^{n-1}} \exp{(ix's)} G(sv^{\frac{1}{2l}}) \varphi_j(s) \omega_j(s, x_n) \, ds \, dv.$$

Лемма 3. *Имеет место следующая оценка*

$$\|D_x^{4l} u_k^0(x),\, L_p(R_+^n)\| \leq c(\|f(x),\, L_p(R_+^n)\|,$$

где $c > 0$ *не зависит от* k *и* $f(x)$.

Доказательство в точности повторяет рассуждения из работы [3] с использованием леммы 2.

Лемма 4. *Пусть* $p > n/(n+1-2l)$. *Имеет место следующая оценка*

$$\|D_x^{4l} u_k^j(x),\, L_p(R_+^n)\| \leq c(\|f(x),\, L_p(R_+^n)\| + \|f(x),\, L_1(R_+^n)\|), \; j = 1, \dots, 2l,$$

где $c > 0$ *не зависит от* k *и* $f(x)$.

Доказательство. Поскольку функции $\omega_j(s, x_n)$, $j = 1, \dots, 2l$, экспоненциально убывают при $x_n \to 0$, то, применяя формулу Ньютона – Лейбница, будем иметь

$$\varphi_j(s)\omega_j(s, x_n) = -D_{y_n}^{j-1} \omega_0(s, y_n)|_{y_n=0} \omega_j(s, x_n)$$

$$= \int\limits_0^\infty D_{y_n}^j \omega_0(s, y_n) \omega_j(s, x_n + y_n) \, dy_n + \int\limits_0^\infty D_{y_n}^{j-1} \omega_0(s, y_n) D_{y_n} \omega_j(s, x_n + y_n) \, dy_n.$$

Введем обозначение

$$K(s, 1/k, k) = (2\pi)^{(1-n)/2} \int\limits_{1/k}^{k} v^{-1} G(sv^{\frac{1}{2l}}) \, dv.$$

Тогда функцию $D_{x_n}^{\nu_n} u_k^j(x)$, $\nu_n = 4l$, можно переписать как

$$D_{x_n}^{\nu_n} u_k^j(x) = \int\limits_{R^{n-1}} \exp{(ix's)} K(s, 1/k, k) \left(\int\limits_0^\infty D_{y_n}^j \omega_0(s, y_n) D_{x_n}^{\nu_n} \omega_j(s, x_n + y_n) \, dy_n \right.$$

$$+\int_0^\infty D_{y_n}^{j-1}\omega_0(s,y_n)D_{y_n}D_{x_n}^{\nu_n}\omega_j(s,x_n+y_n)\,dy_n\Bigg)\,ds = I_{j1}^{4l}(x)+I_{j2}^{4l}(x). \tag{4.2}$$

Проведем оценку, например, второго слагаемого, первое оценивается аналогично. Воспользуемся формулой преобразования Фурье для свертки, получим

$$\|I_{j2}^{4l}(x),\, L_p(R_+^n)\| \le c_1\|\int_{R^n}\exp(ix's-ix_n\xi_n)K(s,1/k,k)$$

$$\left(\int_0^\infty \exp(it_n\xi_n)D_{t_n}^{4l+1}\omega_j(s,t_n)\,dt_n\right)F[D_{y_n}^{j-1}\omega_0(s,y_n)\theta(y_n)](\xi_n)\,d\xi_n\,ds,\, L_p(R^n)\|.$$

Рассмотрим случай $j=1,\ldots,l$. Поскольку в силу леммы 2

$$|s|^{-1}(|s|+\varepsilon^{\frac{1}{2l}})^{j-4l}\int_0^\infty \exp(it_n\xi_n)D_{t_n}^{4l+1}\omega_j(s,t_n)\,dt_n$$

— мультипликатор в $L_p(R^n)$, следовательно, будем иметь

$$\|I_{j2}^{4l}(x),\, L_p(R_+^n)\| \le c_2\|\int_{R^{n-1}}\exp(ix's)K(s,1/k,k)|s|(|s|+\varepsilon^{\frac{1}{2l}})^{4l-j}$$

$$\times D_{x_n}^{j-1}\omega_0(s,x_n)\theta(x_n)\,ds,\, L_p(R^n)\|.$$

В силу леммы 3 из [4] функцию $\omega_0(s,x_n)$ можно представить в виде

$$\omega_0(s,x_n) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_R \exp(ix_n\xi_n)\frac{\hat f_\theta(s,\xi_n)}{(|s|^2+\xi_n^2)^l((|s|^2+\xi_n^2)^l+\varepsilon)}\,d\xi_n, \tag{4.3}$$

где

$$\hat f_\theta(s,\xi_n) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{R^n}\exp(-ix's-ix_n\xi_n)f(x',x_n)\theta(x_n)\,dx.$$

Тогда

$$\|I_{j2}^{4l}(x),\, L_p(R_+^n)\| = c_3\|\int_{R^n}\exp(ix's+ix_n\xi_n)K(s,1/k,k)|s|(|s|+\varepsilon^{\frac{1}{2l}})^{4l-j}$$

$$\times(i\xi_n)^{j-1}\frac{\hat f_\theta(s,\xi_n)}{(|s|^2+\xi_n^2)^l((|s|^2+\xi_n^2)^l+\varepsilon)}\,d\xi_n\,ds,\, L_p(R^n)\|.$$

Поскольку $\dfrac{(|s|+\varepsilon^{\frac{1}{2l}})^{2l}}{(|s|^2+\xi_n^2)^l+\varepsilon}$ —мультипликатор в $L_p(R^n)$, получим

$$\|I_{j2}^{4l}(x),\, L_p(R_+^n)\| \le c_4\Big\|\int_{R^n}\exp(ix's+ix_n\xi_n)K(s,1/k,k)$$

$$\times|s|(|s|+\varepsilon^{\frac{1}{2l}})^{2l-j}(i\xi_n)^{j-1}\frac{\hat f_\theta(s,\xi_n)}{(|s|^2+\xi_n^2)^l}\,d\xi_n\,ds,\, L_p(R^n)\Big\|.$$

Имеет место представление

$$1 = \frac{(|s|^2+\xi_n^2)^l}{(|s|^2+\xi_n^2)^l+\varepsilon}+\frac{\varepsilon}{(|s|^2+\xi_n^2)^l+\varepsilon}.$$

Воспользуемся этим представлением, применим неравенство Минковского, получим

$$\|I_{j2}^{4l}(x),\, L_p(R_+^n)\| \le c_4\Big\|\int\limits_{R^n} \exp{(ix's + ix_n\xi_n)}K(s, 1/k, k)$$

$$\times \frac{1}{(|s|^2+\xi_n^2)^l+\varepsilon}|s|(|s|+\varepsilon^{\frac{1}{2l}})^{2l-j}(i\xi_n)^{j-1}\hat{f}_\theta(s,\xi_n)\,d\xi_n\,ds,\, L_p(R^n)\Big\|$$

$$+c_4\varepsilon\Big\|\int\limits_{R^n} \exp{(ix's + ix_n\xi_n)}K(s, 1/k, k)$$

$$\times \frac{\varepsilon}{(|s|^2+\xi_n^2)^l+\varepsilon}|s|(|s|+\varepsilon^{\frac{1}{2l}})^{2l-j}(i\xi_n)^{j-1}\frac{\hat{f}_\theta(s,\xi_n)}{(|s|^2+\xi_n^2)^l}\,d\xi_n\,ds,\, L_p(R^n)\Big\|.$$

Поскольку функции

$$(|s|+i\xi_n)\frac{(|s|+\varepsilon^{\frac{1}{2l}})^{2l-j}(i\xi_n)^{j-1}}{(|s|^2+\xi_n^2)^l+\varepsilon}, \quad \frac{(|s|+\varepsilon^{\frac{1}{2l}})^{2l-j}}{(|s|^2+\xi_n^2)^l+\varepsilon}$$

— мультипликаторы в $L_p(R^n)$, то будем иметь

$$\|I_{j2}^{4l}(x),\, L_p(R_+^n)\|$$

$$\le c_5\Big\|\int\limits_{R^n} \exp{(ix's + ix_n\xi_n)}K(s, 1/k, k)\frac{|s|}{|s|+i\xi_n}\hat{f}_\theta(s,\xi_n)\,d\xi_n\,ds,\, L_p(R^n)\Big\|$$

$$+c_6\varepsilon\Big\|\int\limits_{R^n} \exp{(ix's + ix_n\xi_n)}K(s, 1/k, k)\frac{|s|(i\xi_n)^{j-1}}{(|s|^2+\xi_n^2)^l}\hat{f}_\theta(s,\xi_n)\,d\xi_n\,ds,\, L_p(R^n)\Big\|.$$

Далее воспользуемся равенствами

$$\int\limits_R \exp{(ix_n\xi_n)}\frac{1}{|s|+i\xi_n}\hat{f}_\theta(s,\xi_n)\,d\xi_n = (2\pi)^{-1/2}\int\limits_0^{x_n} \exp{(-|s|(x_n-y_n))}\tilde{f}(s,y_n)\,dy_n,$$

$$\int\limits_R \exp{(ix_n\xi_n)}\frac{(i\xi_n)^{j-1}}{(|s|^2+\xi_n^2)^l}\hat{f}_\theta(s,\xi_n)\,d\xi_n = \int\limits_R \big(D_{x_n}^{j-1}J_+(s, x_n-y_n)\theta(x_n-y_n)$$

$$+D_{x_n}^{j-1}J_-(s,x_n-y_n)\theta(y_n-x_n)\big)\,\tilde{f}(s,y_n)\,dy_n,$$

где

$$J_+(s,x_n) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\lambda|=2|s|,\quad \mathrm{Im}\lambda\ge|s|/2}\frac{\exp(ix_n\lambda)}{(|s|^2+\lambda^2)^l}d\lambda,$$

$$J_-(s,x_n) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\lambda|=2|s|,\quad \mathrm{Im}\lambda\le-|s|/2}\frac{\exp(ix_n\lambda)}{(|s|^2+\lambda^2)^l}d\lambda.$$

Тогда, применяя неравенство Юнга, Минковского, учитывая определение $K(s, 1/k, k)$, будем иметь

$$\|I_{j2}^{4l}(x),\, L_p(R_+^n)\| \le c_6\Big\|\int\limits_{R^{n-1}} \exp{(ix's)}K(s,1/k,k)|s|\exp{(-|s|x_n)}\,ds,\, L_1(R_+^n)\Big\|$$

$$\times\|f(x), L_p(R_+^n)\| + c_7\int\limits_{1/k}^{1} v^{-1}\Big\|\int\limits_{R^{n-1}} \exp{(ix's)}G(sv^{\frac{1}{2l}})|s|\,\big(D_{x_n}^{j-1}J_+(s,x_n)\theta(x_n)$$

$$+D_{x_n}^{j-1}J_-(s,x_n)\theta(-x_n)\Big)\,ds,\ L_1(R^n)\Big\|dv\,\|f(x),L_p(R^n_+)\|$$

$$+c_7\int\limits_1^k v^{-1}\Big\|\int\limits_{R^{n-1}}\exp{(ix's)}G(sv^{\frac{1}{2l}})|s|\,\Big(D_{x_n}^{j-1}J_+(s,x_n)\theta(x_n)$$

$$+D_{x_n}^{j-1}J_-(s,x_n)\theta(-x_n)\Big)\,ds,\ L_p(R^n)\Big\|dv\,\|f(x),L_1(R^n_+)\|.$$

Для первого слагаемого воспользуемся равенством

$$K(s,1/k,k)=(2\pi)^{(1-n)/2}\left(\exp\left(-k^{-N}|s|^{2lN}\right)-\exp\left(-k^{N}|s|^{2lN}\right)\right),$$

а для второго и третьего слагаемых соотношениями

$$D_{x_n}^{j-1}J_+(s,x_n)=c^{1-\frac{j}{2l}}D_{y_n}^{j-1}J_+(sc^{\frac{1}{2l}},y_n)\big|_{y_n=x_nc^{-\frac{1}{2l}}},$$

$$D_{x_n}^{j-1}J_-(s,x_n)=c^{1-\frac{j}{2l}}D_{y_n}^{j-1}J_-(sc^{\frac{1}{2l}},y_n)\big|_{y_n=x_nc^{-\frac{1}{2l}}}.$$

Учитывая эти равенства, будем иметь следующую оценку при $j=1,\dots,l$

$$\|I_{j2}^{4l},\,L_p(R^n_+)\|\le c_8\left(\Big\|\int\limits_{R^{n-1}}\exp{(ix's)}\exp\left(-k^{-N}|s|^{2lN}\right)|s|\exp{(-|s|x_n)}\,ds,L_1(R^n_+)\Big\|\right.$$

$$\left.+\Big\|\int\limits_{R^{n-1}}\exp{(ix's)}\exp\left(-k^{N}|s|^{2lN}\right)|s|\exp{(-|s|x_n)}\,ds,L_1(R^n_+)\Big\|\right)\|f(x),L_p(R^n_+)\|$$

$$+c_9\int\limits_{1/k}^1 v^{-\frac{j}{2l}}\|\int\limits_{R^{n-1}}\exp{(ix's)}G(s)|s|$$

$$\times\left(D_{x_n}^{j-1}J_+(s,x_n)\theta(x_n)+D_{x_n}^{j-1}J_-(s,x_n)\theta(-x_n)\right)ds,\ L_1(R^n)\|\,dv\|f(x),\ L_p(R^n_+)\|$$

$$+c\int\limits_1^k v^{-\frac{j}{2l}-\frac{n}{2lp'}}\|\int\limits_{R^{n-1}}\exp{(ix's)}G(s)|s|$$

$$\times\left(D_{x_n}^{j-1}J_+(s,x_n)\theta(x_n)+D_{x_n}^{j-1}J_-(s,x_n)\theta(-x_n)\right)ds,\ L_p(R^n)\|\,dv\|f(x),\ L_1(R^n_+)\|.$$

Поскольку имеют место равенства

$$\Big\|\int\limits_{R^{n-1}}\exp{(ix's)}\exp\left(-k^{-N}|s|^{2lN}\right)|s|\exp{(-|s|x_n)}\,ds,L_1(R^n_+)\Big\|$$

$$=\Big\|\int\limits_{R^{n-1}}\exp{(ix's)}\exp\left(-k^{N}|s|^{2lN}\right)|s|\exp{(-|s|x_n)}\,ds,L_1(R^n_+)\Big\|$$

$$=\Big\|\int\limits_{R^{n-1}}\exp{(ix's)}\exp\left(-|s|^{2lN}\right)|s|\exp{(-|s|x_n)}\,ds,L_1(R^n_+)\Big\|$$

и в силу условий леммы $p>n/(n+j-2l)$, то, выбирая N в определение $G(s)$ достаточно большим, рассуждая как в [4] при оценке подобных выражений, получим требуемую оценку.

Аналогично доказывается оценка для $D_{x_n}^{4l}u_k^j(x)$ в случае $j=l+1,\dots,2l$.

Лемма доказана.

Оценим $u_k(x)$ в L_p-норме, для этого перепишем ее в следующем виде

$$u_k(x) = u_{k1}(x) + u_{k2}(x), \tag{4.4}$$

где

$$u_{k1}(x) = (2\pi)^{(1-n)/2} \int\limits_{1/k}^{1} v^{-1} \int\limits_{R^{n-1}} \exp{(ix's)} G(sv^{\frac{1}{2l}}) \omega(s, x_n) ds dv,$$

$$u_{k2}(x) = (2\pi)^{(1-n)/2} \int\limits_{1}^{k} v^{-1} \int\limits_{R^{n-1}} \exp{(ix's)} G(sv^{\frac{1}{2l}}) \omega(s, x_n) ds dv.$$

Проведем сначала оценку $u_{k1}(x)$, перепишем ее, используя (2.6):

$$u_{k1}(x) = u^0_{k1}(x) + \sum_{j=1}^{2l} u^j_{k1}(x), \tag{4.5}$$

где

$$u^0_{k1}(x) = (2\pi)^{(1-n)/2} \int\limits_{1/k}^{1} v^{-1} \int\limits_{R^{n-1}} \exp{(ix's)} G(sv^{\frac{1}{2l}}) \omega_0(s, x_n)\, ds\, dv,$$

$$u^j_{k1}(x) = (2\pi)^{(1-n)/2} \int\limits_{1/k}^{1} v^{-1} \int\limits_{R^{n-1}} \exp{(ix's)} G(sv^{\frac{1}{2l}}) \varphi_j(s) \omega_j(s, x_n)\, ds\, dv.$$

Лемма 5. *Имеет место следующая оценка*

$$\|u^0_{k1}(x),\, L_p(R^n_+)\| \le c(\|f(x),\, L_p(R^n_+)\|, \tag{4.6}$$

где $c > 0$ не зависит от k и $f(x)$.

Доказательство. В силу (4.3) $u^0_{k1}(x)$ из (4.5) перепишется в виде

$$u^0_{k1}(x) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{1/k}^{1} v^{-1} \int\limits_{R^n} \exp{(ix's + i\xi_n x_n)} G(sv^{\frac{1}{2l}})$$

$$\times \frac{\hat{f}_\theta(s, \xi_n)}{(|s|^2 + \xi_n^2)^l ((|s|^2 + \xi_n^2)^l + \varepsilon)}\, d\xi_n\, ds\, dv.$$

Поскольку функция $\dfrac{1}{(|s|^2 + \xi_n^2)^l + \varepsilon}$ в силу теоремы Лизоркина является мультипликатором в $L_p(R^n)$, то, применяя неравенство Минковского, $u^0_{k1}(x)$ можно оценить следующим образом:

$$\|u^0_{k1}(x),\, L_p(R^n_+)\| \le c \int\limits_{1/k}^{1} v^{-1} \| \int\limits_{R^n} \exp{(ix's + i\xi_n x_n)} G(sv^{\frac{1}{2l}})$$

$$\times \frac{\hat{f}_\theta(s, \xi_n)}{(|s|^2 + \xi_n^2)^l}\, d\xi_n\, ds,\, L_p(R^n) \| dv.$$

Применяя лемму 3 из [4], получим

$$\|u^0_{k1}(x),\, L_p(R^n_+)\| \le c \int\limits_{1/k}^{1} v^{-1} \| \int\limits_{R^n} \int\limits_{R^{n-1}} \exp{(i(x' - y')s)} G(sv^{\frac{1}{2l}})$$

$\times\,(J_+(s,x_n-y_n)\theta(x_n-y_n)+J_-(s,x_n-y_n)\theta(y_n-x_n))\,f(y)\theta(y_n)\,ds\,dy,\,L_p(R^n)\|.$

Применим неравенство Юнга, получим

$$\|u^0_{k1}(x),\,L_p(R^n_+)\|\le c\int\limits_{1/k}^{1}v^{-1}\|\int\limits_{R^{n-1}}\exp{(ix's)}G(sv^{\frac{1}{2l}})\,(J_+(s,x_n)\theta(x_n)$$

$$+J_-(s,x_n)\theta(-x_n))\,ds,\,L_1(R^n)\|\,dv\|f(x),\,L_p(R^n_+)\|.$$

Имеют место следующие соотношения

$$J_+(s,x_n)=c^{1-\frac{1}{2l}}J_+(sc^{\frac{1}{2l}},x_nc^{-\frac{1}{2l}}),\quad J_-(s,x_n)=c^{1-\frac{1}{2l}}J_-(sc^{\frac{1}{2l}},x_nc^{-\frac{1}{2l}}).$$

Учитывая эти равенства, будем иметь

$$\|u^0_{k1}(x),\,L_p(R^n_+)\|\le c\int\limits_{1/k}^{1}dv\|\int\limits_{R^{n-1}}\exp{(ix's)}G(s)\,(J_+(s,x_n)\theta(x_n)$$

$$+J_-(s,x_n)\theta(-x_n))\,ds,\,L_1(R^n)\|\|f(x),\,L_p(R^n_+)\|.$$

Выбирая N в определение $G(s)$ достаточно большим, рассуждая как в [4] при оценке подобных выражений, получим требуемую оценку (4.6).

Лемма 6. *Имеет место следующая оценка*

$$\|u^j_{k1}(x),\,L_p(R^n_+)\|\le c(\|f(x),\,L_p(R^n_+)\|,$$

где $c>0$ *не зависит от* k *и* $f(x)$.

Доказательство. Полагая в (4.2) $\nu_n=0$, представим $u^j_{k1}(x)$ в виде

$$u^j_{k1}(x)=\int\limits_{R^{n-1}}\exp{(ix's)}K(s,1/k,1)\left(\int\limits_0^\infty D^j_{y_n}\omega_0(s,y_n)\omega_j(s,x_n+y_n)\,dy_n\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^\infty D^{j-1}_{y_n}\omega_0(s,y_n)D_{y_n}\omega_j(s,x_n+y_n)\,dy_n\right)ds=I_{j1}(x)+I_{j2}(x).$$

Проведем оценку $I_{j2}(x)$, оценка $I_{j1}(x)$ проводится аналогично. Воспользуемся формулой преобразования Фурье для свертки, получим

$$\|I_{j2}(x),\,L_p(R^n_+)\|\le c_1\|\int\limits_{R^n}\exp{(ix's-ix_n\xi_n)}K(s,1/k,1)$$

$$\times\left(\int\limits_0^\infty\exp{(it_n\xi_n)}D_{t_n}\omega_j(s,t_n)\,dt_n\right)F[D^{j-1}_{y_n}\omega_0(s,y_n)\theta(y_n)](\xi_n)\,d\xi_n\,ds,\,L_p(R^n)\|.$$

Поскольку в силу леммы 2

$$|s|^{j-1}\int\limits_0^\infty\exp{(it_n\xi_n)}D_{t_n}\omega_j(s,t_n)\,dt_n$$

— мультипликатор в $L_p(R^n)$, следовательно, будем иметь

$$\|I_{j2}(x),\,L_p(R^n_+)\|\le c_2\|\int\limits_{R^{n-1}}\exp{(ix's)}K(s,1/k,1)$$

$$\times|s|^{1-j}D_{x_n}^{j-1}\omega_0(s,x_n)\theta(x_n)\,ds,\ L_p(R^n)\|.$$

Далее аналогично, как при оценке u_{k1}^0.

Лемма доказана.

Для проведения L_p-оценок второго слагаемого из (4.4) преобразуем его.

Определим функции при $x_n>0$, $s\in R^{n-1}\backslash\{0\}$

$$\Omega_+(s,x_n,y_n)=J_+^\varepsilon(s,x_n-y_n)+\sum_{j=1}^{2l}\omega_j(s,x_n)W_j(s,y_n),$$

$$\Omega_-(s,x_n,y_n)=J_-^\varepsilon(s,x_n-y_n)+\sum_{j=1}^{2l}\omega_j(s,x_n)W_j(s,y_n),$$

где $W_j(s,y_n)=-D_{z_n}^{j-1}J_-^\varepsilon(s,z_n-y_n)\big|_{z_n=0}$.

Из определения контурных интегралов (2.5), $\omega_j(s,x_n)$, $W_j(s,0)$ при $s\in R^{n-1}\backslash\{0\}$ получаем

$$D_{x_n}^{j-1}\Omega_+(s,x_n,0)\big|_{x_n=0}=0.$$

Тогда в силу определения контурных интегралов $J_+^\varepsilon(s,x_n)$, $\omega_j(s,x_n)$, функция $\Omega_+(s,x_n,0)$ при $s\in R^{n-1}\backslash\{0\}$ является решением краевой задачи

$$\begin{aligned}&(D_{x_n}^2-|s|^2)^l((D_{x_n}^2-|s|^2)^l+\varepsilon(-1)^l)\Omega_+=0,\quad x_n>0,\\&D_{x_n}^{j-1}\Omega_+\big|_{x_n=0}=0,\quad j=1,\dots,2l,\\&\sup_{x_n>0}|\Omega_+|<\infty.\end{aligned}$$

Следовательно, $\Omega_+(s,x_n,0)\equiv0$. Из определения функции $\Omega_-(s,x_n,y_n)$ имеем $\Omega_-(s,0,y_n)\equiv0$.

Используя полученные тождества, функции $u_{k,2}(x)$ можно представить в виде

$$u_{k,2}(x)=(2\pi)^{(1-n)/2}\int_1^k v^{-1}\int_{R^{n-1}}\exp\,(ix's)G(sv^{\frac{1}{2l}})$$

$$\times\left(\int_0^{x_n}\Omega_+(s,x_n,y_n)\widetilde{f}(s,y_n)\,dy_n+\int_{x_n}^\infty\Omega_-(s,x_n,y_n)\widetilde{f}(s,y_n)\,dy_n\right)ds\,dv$$

$$=(2\pi)^{(1-n)/2}\int_1^k v^{-1}\int_{R^{n-1}}\exp\,(ix's)G(sv^{\frac{1}{2l}})$$

$$\times\left(\int_0^{x_n}(\Omega_+(s,x_n,y_n)-\Omega_+(s,x_n,0))\,\widetilde{f}(s,y_n)\,dy_n\right.$$

$$\left.+\int_{x_n}^\infty(\Omega_-(s,x_n,y_n)-\Omega_-(s,0,y_n))\,\widetilde{f}(s,y_n)\,dy_n\right)ds\,dv=I_1(x)+I_2(x).\qquad(4.7)$$

Проведем оценки двух слагаемых (4.7) отдельно.

Лемма 7. *Пусть $p > n/(n+1-2l)$. Имеет место оценка*

$$\|I_1(x), L_p(R^n_+)\| \le c\|x_n f(x), L_1(R^n_+)\|, \tag{4.8}$$

где константа $c > 0$ не зависит от $f(x)$ и k.

Доказательство. Используя лемму Адамара, представим функцию $I_1(x)$ из (4.7) в виде

$$I_1(x) = I_1^0 + \sum_{j=1}^{2l} I_1^j(x), \tag{4.9}$$

где

$$I_1^0 = -(2\pi)^{1-n} \int_1^k v^{-1} \int_{R^{n-1}} \int_0^\infty \int_{R^{n-1}} \exp{(i(x'-y')s)} G(sv^{\frac{1}{2l}})$$

$$\times \int_0^1 \theta(x_n - y_n) D_{x_n} J_+^\varepsilon(s, x_n - \lambda y_n)\, d\lambda y_n f(y', y_n)\, ds\, dy_n\, dy'\, dv,$$

$$I_1^j(x) = (2\pi)^{1-n} \int_1^k v^{-1} \int_{R^{n-1}} \int_0^{x_n} \int_{R^{n-1}} \exp{(i(x'-y')s)} G(sv^{\frac{1}{2l}})$$

$$\times \omega_j(s, x_n) \int_0^1 D_{z_n} W_j(s, z_n)\big|_{z_n = \lambda y_n} d\lambda y_n f(y', y_n)\, ds\, dy_n\, dy'\, dv.$$

В силу неравенств Минковского, Юнга, будем иметь

$$\|I_1^0(x), L_p(R^n_+)\| \le c_1 \int_1^k v^{-1} \| \int_{R^{n-1}} \exp{(ix's)} G(sv^{\frac{1}{2l}}) \theta(x_n)$$

$$\times D_{x_n} J_+^\varepsilon(s, x_n)\, ds, L_p(R^n)\|\, dv \|x_n f(x), L_1(R^n_+)\|$$

$$= c_1 \int_1^k v^{-1} \|K_+(v, x, \varepsilon), L_p(R^n)\|\, dv \|x_n f(x), L_1(R^n_+)\|,$$

где

$$K_+(v, x, \varepsilon) = \int_{R^{n-1}} \exp{(ix's)} G(sv^{\frac{1}{2l}}) \theta(x_n) D_{x_n} J_+^\varepsilon(s, x_n)\, ds.$$

Поскольку $K_+(v, x, \varepsilon) = v^{2-\frac{n+1}{2l}} K_+(1, xv^{-\frac{1}{2l}}, \varepsilon v)$, тогда имеем

$$\|I_1^0(x), L_p(R^n_+)\| \le c_2 \int_1^k v^{1-\frac{n+1}{2l}+\frac{n}{2lp}}\, dv$$

$$\times \|K_+(1, x, \varepsilon v), L_p(R^n)\| \|x_n f(x), L_1(R^n_+)\|.$$

Покажем, что

$$\|K_+(1, x, \varepsilon v), L_p(R^n)\| \le cv^{-1}. \tag{4.10}$$

Учитывая оценки контурных интегралов из леммы 1, применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$\|K_+(1, x, \varepsilon v), L_p(R^n)\| \le \sum_{|\varkappa|+|\gamma| \le 2q} \| \frac{1}{1+|x'|^{2q}} \int_{R^{n-1}} |D_s^\varkappa G(s)|$$

$$\times\Big(c_1|s|^{2-2l-|\gamma|}(|s|+(v\varepsilon)^{\frac{1}{2l}})^{-2l}\exp\left(-|s|x_n/2\right)$$

$$+\,c_2(|s|+(v\varepsilon)^{\frac{1}{2l}})^{2-4l-|\gamma|}\exp\left(-\delta/2(|s|+(v\varepsilon)^{\frac{1}{2l}})x_n\right)\Big)\,ds,\ L_p(R^n_+)\|$$

$$\le c_3v^{-1}\sum_{|\varkappa|+|\gamma|\le 2q}\|\frac{1}{1+|x'|^{2q}}\frac{1}{1+x_n}\int\limits_{R^{n-1}}|D^{\varkappa}_sG(s)||s|^{1-2l-|\gamma|}(1+|s|),\ L_p(R^n_+)\|.$$

Выбирая показатель N в определении функции $G(s)$ достаточно большим и q из условия $2qp>n-1$, получим требуемую оценку (4.10). Следовательно,

$$\|I^0_1(x),L_p(R^n_+)\|\le c_4\int\limits_1^k v^{-\frac{n+1}{2l}+\frac{n}{2lp}}\,dv\|x_nf(x),L_1(R^n_+)\|.$$

Поскольку $p>n/(n+1-2l)$, будем иметь

$$\|I^0_1(x),L_p(R^n_+)\|\le c_5\|x_nf(x),L_1(R^n_+)\|. \tag{4.11}$$

Рассмотрим второе слагаемое из (4.9). Применяя неравенство Минковского, получим

$$\|I^j_1(x),L_p(R^n_+)\|\le c_1\int\limits_0^1\int\limits_1^k v^{-1}\|\int\limits_{R^{n-1}}\int\limits_0^\infty\Big|\int\limits_{R^{n-1}}\exp\left(i(x'-y')s\right)G(sv^{\frac{1}{2l}})$$

$$\times D_{z_n}W_j(s,z_n)\big|_{z_n=\lambda y_n}\omega_j(s,x_n)\,ds\Big||y_nf(y)|\,dy_n\,dy',L_p(R^n_+)\|\,dv\,d\lambda$$

$$\le c_1\int\limits_0^1\int\limits_1^k v^{-1}\|\int\limits_{R^n}|K_j(v,x'-y',x_n,\lambda y_n)||\theta(y_n)y_nf(y)|^{(1/p+1/p')}dy,L_p(R^n)\|dv\,d\lambda,$$

где

$$K_j(v,x',x_n,z_n)=\int\limits_{R^{n-1}}\exp\left(ix's\right)G(sv^{\frac{1}{2l}})D_{z_n}W_j(s,z_n)\omega_j(s,x_n)\theta(x_n)\theta(z_n)\,ds.$$

Используя неравенство Гельдера, будем иметь

$$\|I^j_1(x),L_p(R^n_+)\|$$

$$\le c_2\int\limits_0^1\int\limits_1^k v^{-1}\|\int\limits_{R^n}|K_j(v,x'-y',x_n,\lambda y_n)|^p|y_nf(y)|\,dy,L_1(R^n)\|^{1/p}\,dv\,d\lambda$$

$$\times\|x_nf(x),L_1(R^n_+)\|^{1/p'}.$$

В силу теоремы Тонелли неравенство перепишется в виде

$$\|I^j_1(x),L_p(R^n_+)\|$$

$$\le c_2\int\limits_0^1\int\limits_1^k v^{-1}\|\int\limits_{R^n}|K_j(v,x'-y',x_n,\lambda y_n)|^p\,dx|y_nf(y)|,L_1(R^n)\|^{1/p}\,dv\,d\lambda$$

$$\times\|x_nf(x),L_1(R^n_+)\|^{1/p'}. \tag{4.12}$$

Для дальнейшего нам понадобится оценить интеграл

$$A_j(v,y',\lambda y_n)=\int\limits_{R^n_+}|K_j(v,x'-y',x_n,\lambda y_n)|^p\,dx,\quad \lambda>0.$$

В силу определения функции $K_j(v,x',x_n,\lambda y_n)$ имеем

$$A_j(v,y',\lambda y_n)=\int\limits_{R^n}|K_j(v,x',x_n,\lambda y_n)|^p\theta(x_n)\,dx$$

$$=v^{\frac{n-1}{2l}(1-p)}\int\limits_{R^n}\Bigg|\int\limits_{R^{n-1}}\exp(ix's)G(s)$$

$$\times D_{z_n}W_j(sv^{-\frac{1}{2l}},z_n)\big|_{z_n=\lambda y_n}\theta(\lambda y_n)\omega_j(sv^{-\frac{1}{2l}},x_n)\theta(x_n)\,ds\Bigg|^p\,dx.$$

Докажем неравенство

$$A_j(v,y',\lambda y_n)\le cv^{\frac{n}{2l}+p(1-\frac{n+1}{2l})}\theta(\lambda y_n)\tag{4.13}$$

с константой $c>0$, не зависящей от v, λ, y.

Учитывая лемму 1, оценим $A_j(v,y',\lambda y_n)$ для $j=1,\dots,l$, следующим образом

$$A_j(v,y',\lambda y_n)\le\theta(\lambda y_n)v^{\frac{n-1}{2l}(1-p)}\sum_{|\varkappa|+|\gamma_1|+|\gamma_2|\le 2q}\int\limits_{R^n}\frac{1}{(1+|x'|^{2q})^p}\Bigg(\int\limits_{R^{n-1}}|D_s^{\varkappa}G(s)|$$

$$\times\Bigg(c_1v^{1-\frac{1}{l}}|s|^{2-2l-|\gamma_1|-|\gamma_2|}\exp(-|s|x_nv^{-\frac{1}{2l}}/2)$$

$$+c_2v^{-\frac{1}{2l}(2-l)}|s|^{2-l-|\gamma_1|-|\gamma_2|}(|s|v^{-\frac{1}{2l}}+\varepsilon^{\frac{1}{2l}})^{-3l}\exp(-\delta/2(|s|v^{-\frac{1}{2l}}+\varepsilon^{\frac{1}{2l}})x_n)$$

$$+c_3v^{-\frac{1}{2l}(1-j)}|s|^{1-j-|\gamma_1|-|\gamma_2|}(|s|v^{-\frac{1}{2l}}+\varepsilon^{\frac{1}{2l}})^{1+j-4l}\exp(-|s|x_nv^{-\frac{1}{2l}}/2)+c_4v^{-\frac{1}{2l}(1-j+l)}$$

$$\times|s|^{1-j+l-|\gamma_1|-|\gamma_2|}(|s|v^{-\frac{1}{2l}}+\varepsilon^{\frac{1}{2l}})^{1+j-3l}\exp(-\delta/2(|s|v^{-\frac{1}{2l}}+\varepsilon^{\frac{1}{2l}})x_n)\Bigg)\theta(x_n)\,ds\Bigg)^p\,dx.$$

Отсюда получим

$$A_j(v,y',\lambda y_n)\le\theta(\lambda y_n)v^{\frac{n-1}{2l}+p(1-\frac{n+1}{2l})}\sum_{|\varkappa|+|\gamma_1|+|\gamma_2|\le 2q}\int\limits_{R^n}\frac{1}{(1+|x'|^{2q})^p}$$

$$\times\Bigg(\int\limits_{R^{n-1}}|D_s^{\varkappa}G(s)||s|^{2-2l-|\gamma_1|-|\gamma_2|}\exp(-\delta/2|s|v^{-\frac{1}{2l}}x_n)\theta(x_n)\,ds\Bigg)^p\,dx.$$

Следовательно, проводя рассуждения, как и ранее для подобных выражений, получим оценку (4.13) при $j=1,\dots,l$.

Оценка (4.13) в случае $j=l+1,\dots,2l$ доказывается аналогично. Тогда, из (4.13) будем иметь

$$\|I_1^j(x),L_p(R^n_+)\|\le c_5\int\limits_1^k v^{\frac{n}{2lp}-\frac{n+1}{2l}}\,dv\|x_nf(x),L_1(R^n_+)\|.$$

Поскольку $p>n/(n+1-2l)$, то отсюда следует

$$\|I_1^j(x),L_p(R^n_+)\|\le c\|x_nf(x),L_1(R^n_+)\|,$$

где константа $c>0$ не зависит от $f(x)$ и k.

Из полученной оценки, (4.9), (4.11) вытекает (4.8). Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть $p > n/(n+1-2l)$. Имеет место оценка*

$$\|I_2(x), L_p(R^n_+)\| \leq c\|x_n f(x), L_1(R^n_+)\|,$$

где константа $c > 0$ не зависит от $f(x)$ и k.

Доказательство повторяет рассуждения леммы 7.

В силу представлений (4.1), (4.4), (4.5), (4.7) лемм 5–8 вытекает следующая оценка

$$\|u_k(x), L_p(R^n_+)\| \leq c(\|f(x), L_p(R^n_+)\| + \|(1+x_n)f(x), L_1(R^n_+)\|)$$

с константой $c > 0$, не зависящей от $f(x)$ и k. Аналогичным образом доказывается, что $\|u_{k_1}(x) - u_{k_2}(x), L_p(R^n_+)\| \to 0, \quad k_1, k_2 \to \infty$.

Используя это неравенство, оценки старших производных из лемм 3, 4 и проводя аналогичные рассуждения, как и в [3], нетрудно установить однозначную разрешимость краевой задачи (1.1) в соболевском пространстве $W^{4l}_p(R^n_+)$.

Теорема доказана.

5. Пример

Рассмотрим задачу Дирихле в полупространстве $R^3_+ = \{x = (x', x_3) : x' \in R^2,\ x_3 > 0\}$ для одного эллиптического уравнения:

$$\begin{cases} \triangle^2 u - \varepsilon \triangle u = f(x), \quad x \in R^3_+, \\ u\big|_{x_3=0} = 0, \\ D_{x_3} u\big|_{x_3=0} = 0, \end{cases} \tag{5.1}$$

где $\varepsilon > 0$. Докажем, что даже в случае $f(x) \in C^\infty_0(R^3_+)$ для разрешимости краевой задачи (5.1) в $W^4_p(R^3_+)$ при $1 < p \leq 3/2$ необходимо, чтобы выполнялось условие (1.3).

При доказательстве будем использовать схему рассуждений, предложенную в [4]. Укажем идею доказательства и остановимся на отличительных моментах.

Предположим, что краевая задача (5.1) имеет решение $u(x) \in W^4_p(R^3_+)$, $1 < p \leq 3/2$, хотя условие (1.3) не выполнено. В силу неравенства Хаусдорфа – Юнга для $u(x)$ имеет место оценка

$$\|\|\widetilde{u}(s, x_3), L_{p'}(R^2)\|, L_p(R_+)\| \leq c\|u(x), L_p(R^3_+)\|, \tag{5.2}$$

где $\widetilde{u}(s, x_3)$ — частичное преобразование Фурье по x' функции $u(x', x_3)$. Функция $\widetilde{u}(s, x_3)$ является решением краевой задачи (2.3) при $l = 1$, $n = 3$, и представима в виде

$$\widetilde{u}(s, x_3) = \frac{1}{2\varepsilon|s|}\int_0^{x_3} \exp\left(-|s|(x_3 - y_3)\right)\tilde{f}(s, y_3)\, dy_3$$

$$-\frac{1}{2\varepsilon\sqrt{|s|^2+\varepsilon}}\int_0^{x_3} \exp\left(-\sqrt{|s|^2+\varepsilon}(x_3 - y_3)\right)\tilde{f}(s, y_3)\, dy_3$$

$$+\frac{1}{2\varepsilon|s|}\int_{x_3}^{\infty} \exp\left(|s|(x_3 - y_3)\right)\tilde{f}(s, y_3)\, dy_3$$

$$-\frac{1}{2\varepsilon\sqrt{|s|^2+\varepsilon}}\int\limits_{x_3}^{\infty}\exp\left(\sqrt{|s|^2+\varepsilon}(x_3-y_3)\right)\tilde{f}(s,y_3)\,dy_3$$

$$-\frac{|s|+\sqrt{|s|^2+\varepsilon}}{\varepsilon^2}\int\limits_0^{\infty}\exp\left(-|s|(x_3+y_3)\right)\tilde{f}(s,y_3)\,dy_3$$

$$-\frac{1}{2\varepsilon|s|}\int\limits_0^{\infty}\exp\left(-|s|(x_3+y_3)\right)\tilde{f}(s,y_3)\,dy_3$$

$$-\frac{|s|+\sqrt{|s|^2+\varepsilon}}{\varepsilon^2}\frac{|s|}{\sqrt{|s|^2+\varepsilon}}\int\limits_0^{\infty}\exp\left(-\sqrt{|s|^2+\varepsilon}(x_3+y_3)\right)\tilde{f}(s,y_3)\,dy_3$$

$$-\frac{1}{2\varepsilon\sqrt{|s|^2+\varepsilon}}\int\limits_0^{\infty}\exp\left(-\sqrt{|s|^2+\varepsilon}(x_3+y_3)\right)\tilde{f}(s,y_3)\,dy_3$$

$$+\frac{|s|+\sqrt{|s|^2+\varepsilon}}{\varepsilon^2}\int\limits_0^{\infty}\exp\left(-(|s|x_3+\sqrt{|s|^2+\varepsilon}y_3)\right)\tilde{f}(s,y_3)\,dy_3$$

$$+\frac{|s|+\sqrt{|s|^2+\varepsilon}}{\varepsilon^2}\int\limits_0^{\infty}\exp\left(-(\sqrt{|s|^2+\varepsilon}x_3+|s|y_3)\right)\tilde{f}(s,y_3)\,dy_3.$$

Будем рассматривать функцию $\widetilde{u}(s,x_3)$ при $x_3\geq a=\mathrm{diam}(\mathrm{supp}f(x))$, тогда получим

$$\widetilde{u}(s,x_3)=\int\limits_0^{\infty}\Omega_+(s,x_3,y_3)\widetilde{f}(s,y_3)\,dy_3,$$

где

$$\Omega_+(s,x_3,y_3)=\frac{1}{2\varepsilon|s|}\exp\left(-|s|(x_3-y_3)\right)-\frac{1}{2\varepsilon\sqrt{|s|^2+\varepsilon}}\exp\left(-\sqrt{|s|^2+\varepsilon}(x_3-y_3)\right)$$

$$-\frac{|s|+\sqrt{|s|^2+\varepsilon}}{\varepsilon^2}\exp\left(-|s|(x_3+y_3)\right)-\frac{1}{2\varepsilon|s|}\exp\left(-|s|(x_3+y_3)\right)$$

$$-\frac{|s|+\sqrt{|s|^2+\varepsilon}}{\varepsilon^2}\frac{|s|}{\sqrt{|s|^2+\varepsilon}}\exp\left(-\sqrt{|s|^2+\varepsilon}(x_3+y_3)\right)$$

$$-\frac{1}{2\varepsilon\sqrt{|s|^2+\varepsilon}}\exp\left(-\sqrt{|s|^2+\varepsilon}(x_3+y_3)\right)$$

$$+\frac{|s|+\sqrt{|s|^2+\varepsilon}}{\varepsilon^2}\exp\left(-(|s|x_3+\sqrt{|s|^2+\varepsilon}y_3)\right)$$

$$+\frac{|s|+\sqrt{|s|^2+\varepsilon}}{\varepsilon^2}\exp\left(-(\sqrt{|s|^2+\varepsilon}x_3+|s|y_3)\right).$$

Поскольку $\Omega_+(s,x_3,0)=0$, $D_{z_3}\Omega_+(s,x_3,z_3)\big|_{z_3=0}=0$, тогда

$$\widetilde{u}(s,x_3)=\int\limits_0^{\infty}[\Omega_+(s,x_3,y_3)-\Omega_+(s,x_3,0)]\widetilde{f}(s,y_3)\,dy_3$$

$$= \int_0^\infty y_3 \int_0^1 D_{z_3}\Omega_+(s,x_3,z_3)\big|_{z_3=\lambda_1 y_3}\, d\lambda_1 \widetilde{f}(s,y_3)\, dy_3$$

$$= \int_0^\infty y_3 \int_0^1 \Big[D_{z_3}\Omega_+(s,x_3,z_3)\big|_{z_3=\lambda_1 y_3} - D_{z_3}\Omega_+(s,x_3,z_3)\big|_{z_3=0}\Big]\, d\lambda_1 \widetilde{f}(s,y_3)\, dy_3$$

$$= \int_0^\infty y_3^2 \int_0^1 \lambda_1 \int_0^1 D^2_{z_3}\Omega_+(s,x_3,z_3)\big|_{z_3=\lambda_1\lambda_2 y_3}\, d\lambda_2\, d\lambda_1 \widetilde{f}(s,y_3)\, dy_3.$$

Здесь

$$D^2_{z_3}\Omega_+(s,x_3,z_3) = \frac{|s|}{2\varepsilon}\exp\left(-|s|(x_3-z_3)\right) - \frac{\sqrt{|s|^2+\varepsilon}}{2\varepsilon}\exp\left(-\sqrt{|s|^2+\varepsilon}(x_3-z_3)\right)$$
$$-\frac{|s|^2(|s|+\sqrt{|s|^2+\varepsilon})}{\varepsilon^2}\exp\left(-|s|(x_3+z_3)\right) - \frac{|s|}{2\varepsilon}\exp\left(-|s|(x_3+z_3)\right)$$
$$-\frac{|s|\sqrt{|s|^2+\varepsilon}(|s|+\sqrt{|s|^2+\varepsilon})}{\varepsilon^2}\exp\left(-\sqrt{|s|^2+\varepsilon}(x_3+z_3)\right)$$
$$-\frac{\sqrt{|s|^2+\varepsilon}}{2\varepsilon}\exp\left(-\sqrt{|s|^2+\varepsilon}(x_3+z_3)\right)$$
$$+\frac{(|s|^2+\varepsilon)(|s|+\sqrt{|s|^2+\varepsilon})}{\varepsilon^2}\exp\left(-(|s|x_3+\sqrt{|s|^2+\varepsilon}z_3)\right)$$
$$+\frac{|s|^2(|s|+\sqrt{|s|^2+\varepsilon})}{\varepsilon^2}\exp\left(-(\sqrt{|s|^2+\varepsilon}x_3+|s|z_3)\right).$$

Перепишем $\widetilde{u}(s,x_3)$ в виде суммы нескольких слагаемых

$$\widetilde{u}(s,x_3) = \sum_{j=1}^4 I_j(s,x_3), \tag{5.3}$$

где

$$I_1(s,x_3) = \int_0^\infty y_3^2 \int_0^1 \lambda_1 \int_0^1 \Bigg\{\frac{|s|}{2\varepsilon}\exp\left(-|s|(x_3-z_3)\right) - \Bigg(\frac{|s|^2(|s|+\sqrt{|s|^2+\varepsilon})}{\varepsilon^2}$$
$$+\frac{|s|}{2\varepsilon}\Bigg)\exp\left(-|s|(x_3+z_3)\right) + \frac{|s|\sqrt{|s|^2+\varepsilon}(|s|+\sqrt{|s|^2+\varepsilon})}{\varepsilon^2}$$
$$\times\exp\left(-(|s|x_3+\sqrt{|s|^2+\varepsilon}z_3)\right)\Bigg\}\Big|_{z_3=\lambda_1\lambda_2 y_3}\, d\lambda_2\, d\lambda_1 \widetilde{f}(s,y_3)\, dy_3,$$

$$I_2(s,x_3) = \int_0^\infty y_3^2 \int_0^1 \lambda_1 \int_0^1 \Bigg\{-\frac{\sqrt{|s|^2+\varepsilon}}{2\varepsilon}\exp\left(-\sqrt{|s|^2+\varepsilon}(x_3-z_3)\right)$$
$$-\Bigg(\frac{|s|\sqrt{|s|^2+\varepsilon}(|s|+\sqrt{|s|^2+\varepsilon})}{\varepsilon^2} + \frac{\sqrt{|s|^2+\varepsilon}}{2\varepsilon}\Bigg)\exp\left(-\sqrt{|s|^2+\varepsilon}(x_3+z_3)\right)$$
$$+\frac{|s|^2(|s|+\sqrt{|s|^2+\varepsilon})}{\varepsilon^2}\exp\left(-(\sqrt{|s|^2+\varepsilon}x_3+|s|z_3)\right)\Bigg\}\Big|_{z_3=\lambda_1\lambda_2 y_3} d\lambda_2 d\lambda_1 \widetilde{f}(s,y_3)\, dy_3,$$

$$I_3(s,x_3)=\int\limits_0^\infty y_3^2\int\limits_0^1\lambda_1\int\limits_0^1\frac{\sqrt{|s|^2+\varepsilon}}{\varepsilon}\exp\left(-(|s|x_3+\sqrt{|s|^2+\varepsilon}z_3)\right)\big|_{z_3=\lambda_1\lambda_2y_3}\,d\lambda_2\,d\lambda_1$$

$$\times[\widetilde{f}(s,y_3)-\widetilde{f}(0,y_3)]\,dy_3$$

$$=\int\limits_0^\infty y_3^2\int\limits_0^1\lambda_1\int\limits_0^1\frac{\sqrt{|s|^2+\varepsilon}}{\varepsilon}\exp\left(-(|s|x_3+\sqrt{|s|^2+\varepsilon}z_3)\right)\big|_{z_3=\lambda_1\lambda_2y_3}\,d\lambda_2\,d\lambda_1$$

$$\times\int\limits_0^1\sum_{j=1}^2 s_jD_{\tau_j}\widetilde{f}(\tau,y_3)\big|_{\tau_j=\lambda_3s_j}d\lambda_3\,dy_3,$$

$$I_4(s,x_3)=\int\limits_0^\infty y_3^2\int\limits_0^1\lambda_1\int\limits_0^1\frac{\sqrt{|s|^2+\varepsilon}}{\varepsilon}$$

$$\times\exp\left(-(|s|x_3+\sqrt{|s|^2+\varepsilon}z_3)\right)\big|_{z_3=\lambda_1\lambda_2y_3}\,d\lambda_2\,d\lambda_1\widetilde{f}(0,y_3)\,dy_3.$$

Рассмотрим функцию $I_4(s,x_3)$, представим ее в виде суммы двух функций:

$$I_4(s,x_3)=-\int\limits_0^\infty y_3\int\limits_0^1\frac{1}{\varepsilon}\exp\left(-(|s|x_3+\sqrt{|s|^2+\varepsilon}z_3)\right)\big|_{z_3=\lambda_1y_3}d\lambda_1\widetilde{f}(0,y_3)\,dy_3$$

$$+\frac{\exp(-|s|x_3)}{\varepsilon}\int\limits_0^\infty y_3\widetilde{f}(0,y_3)\,dy_3$$

$$=\frac{\exp(-|s|x_3)}{\varepsilon}\int\limits_0^\infty y_3\int\limits_0^1[\exp(-\lambda_1\sqrt{\varepsilon}y_3)-\exp(-\lambda_1\sqrt{|s|^2+\varepsilon}y_3)]d\lambda_1\widetilde{f}(0,y_3)\,dy_3$$

$$+\frac{\exp(-|s|x_3)}{\varepsilon}\int\limits_0^\infty\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}(\exp(-\sqrt{\varepsilon}y_3)-1)\widetilde{f}(0,y_3)\,dy_3$$

$$+\frac{\exp(-|s|x_3)}{\varepsilon}\int\limits_0^\infty y_3\widetilde{f}(0,y_3)\,dy_3$$

$$=-\frac{\exp(-|s|x_3)}{\varepsilon}\int\limits_0^\infty y_3\int\limits_0^1\int\limits_0^1 D_{\lambda_2}\exp(-\lambda_1\sqrt{\lambda_2|s|^2+\varepsilon}y_3)d\lambda_2\,d\lambda_1\widetilde{f}(0,y_3)\,dy_3$$

$$+\frac{\exp(-|s|x_3)}{\varepsilon}\int\limits_0^\infty\left(\frac{\exp(-\sqrt{\varepsilon}y_3)-1}{\sqrt{\varepsilon}}+y_3\right)\widetilde{f}(0,y_3)\,dy_3$$

$$=\frac{\exp(-|s|x_3)}{\varepsilon}\int\limits_0^\infty y_3^2\int\limits_0^1\int\limits_0^1\lambda_1\frac{|s|^2\exp(-\lambda_1\sqrt{\lambda_2|s|^2+\varepsilon}y_3)}{2\sqrt{\lambda_2|s|^2+\varepsilon}}d\lambda_2\,d\lambda_1\widetilde{f}(0,y_3)\,dy_3$$

$$+\frac{\exp(-|s|x_3)}{\varepsilon}\int\limits_0^\infty\left(\frac{\exp(-\sqrt{\varepsilon}y_3)-1}{\sqrt{\varepsilon}}+y_3\right)\widetilde{f}(0,y_3)\,dy_3$$

$$= I_5(s,x_3) + \frac{\exp(-|s|x_3)}{\varepsilon}\int_0^\infty \left(\frac{\exp(-\sqrt{\varepsilon}y_3)-1}{\sqrt{\varepsilon}} + y_3\right)\widetilde{f}(0,y_3)\,dy_3. \tag{5.4}$$

В силу (5.2), учитывая (5.3), (5.4) и неравенство Минковского, будем иметь

$$\frac{1}{\varepsilon}\left|\int_0^\infty \left(\frac{\exp(-\sqrt{\varepsilon}y_3)-1}{\sqrt{\varepsilon}} + y_3\right)\widetilde{f}(0,y_3)\,dy_3\right|$$

$$\times \|\|\exp(-|s|x_3), L_{p'}(|s|<1)\|, L_p(x_3>2a)\| \le c\|u(x), L_p(R^3_+)\|$$

$$+ \sum_{j=1,\, j\ne 4}^{5} \|\|I_j(s,x_3), L_{p'}(|s|<1)\|, L_p(x_3>2a)\|. \tag{5.5}$$

Проведем оценку $I_1(s,x_3)$. Поскольку $x_3 > 2y_3 > 0$, будем иметь

$$\|\|I_1(s,x_3), L_{p'}(|s|<1)\|, L_p(x_3>2a)\|$$

$$\le \left\|\left\|\int_0^\infty y_3^2\int_0^1 \lambda_1\int_0^1 \left\{\frac{|s|}{2\varepsilon}\exp\left(-|s|\left(1-\frac{\lambda_1\lambda_2}{2}\right)x_3\right)\right.\right.\right.$$

$$+\left(\frac{|s|^2(|s|+\sqrt{|s|^2+\varepsilon})}{\varepsilon^2} + \frac{|s|}{2\varepsilon} + \frac{|s|\sqrt{|s|^2+\varepsilon}(|s|+\sqrt{|s|^2+\varepsilon})}{\varepsilon^2}\right)$$

$$\left.\left.\times\exp(-|s|x_3)\right\}d\lambda_2\,d\lambda_1|\widetilde{f}(s,y_3)|\,dy_3, L_{p'}(|s|<1)\right\|, L_p(x_3>2a)\right\|$$

$$\le c\left\|\left\|\left(\frac{2|s|}{\varepsilon} + \frac{2|s|^2(|s|+\sqrt{|s|^2+\varepsilon})}{\varepsilon^2}\right)\exp(-|s|x_3/2), L_{p'}(|s|<1)\right\|, L_p(x_3>2a)\right\|$$

$$\times\|x_3^2 f(x), L_1(R_3^+)\|.$$

Учитывая оценку

$$|s|\exp(-|s|x_3/2) \le c\,\frac{1+|s|}{1+x_3},$$

получим

$$I_1(s,x_3) \le c_1(f).$$

Функции $I_2(s,x_3)$, $I_3(s,x_3)$, $I_5(s,x_3)$ оцениваются аналогично. Будем иметь

$$I_1(s,x_3) + I_2(s,x_3) + I_3(s,x_3) + I_5(s,x_3) \le c_2(f). \tag{5.6}$$

Из неравенств (5.5), (5.6) вытекает оценка

$$\left|\int_0^\infty \left(1-\exp(-\sqrt{\varepsilon}y_3) - \sqrt{\varepsilon}y_3\right)\widetilde{f}(0,y_3)\,dy_3\right|$$

$$\times\|\|\exp(-|s|x_3), L_{p'}(|s|<1)\|, L_p(x_3>2a)\| \le c < \infty.$$

По предположению

$$\int_0^\infty \left(1-\exp(-\sqrt{\varepsilon}y_3) - \sqrt{\varepsilon}y_3\right)\widetilde{f}(0,y_3)\,dy_3 \ne 0,$$

следовательно, имеет место оценка

$$\|\|\exp(-|s|x_3), L_{p'}(|s|<1)\|, L_p(x_3>2a)\| \le c < \infty. \tag{5.7}$$

С другой стороны, используя замену $s_1 = \rho \sin\varphi$, $s_2 = \rho\cos\varphi$, имеем

$$\|\|\exp(-|s|x_3), L_{p'}(|s|<1)\|, L_p(x_3>2a)\|^p$$
$$= \int\limits_{2a}^{\infty}\left(\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 \rho\exp(-p'x_3\rho)\,d\rho\,d\varphi\right)^{p/p'} dx_3$$
$$= 2\pi\int\limits_{2a}^{\infty}\left(\frac{1-(1+p'x_3)\exp(-p'x_3)}{p'^2x_3^2}\right)^{p/p'} dx_3 \geq \frac{\pi}{p'^{2p/p'}}\int\limits_{x*}^{\infty}\frac{1}{x_3^{2p/p'}}\,dx_3.$$

Здесь через $x*$ обозначено число такое, что при $x_3 \geq x* \geq 2a$ выполнено неравенство

$$(1+p'x_3) \leq \frac{\exp(p'x_3)}{2}.$$

Поскольку при $1 < p \leq 3/2$ интеграл

$$\int\limits_{x*}^{\infty}\frac{1}{x_3^{2p/p'}}\,dx_3$$

— расходится, следовательно,

$$\|\|\exp(-|s|x_3), L_{p'}(|s|<1)\|, L_p(x_3>2a)\| = \infty.$$

Значит наше предположение неверно, и условие (1.3) необходимо для разрешимости краевой задачи (5.1) в $W_p^4(R_+^3)$.

Автор выражает благодарность профессору Г. В. Демиденко за постановку задачи и внимание к работе.

Список литературы

[1] Л.Н. Бондарь, *О разрешимости краевой задачи для одного эллиптического уравнения с младшими членами*, Сборник статей VI Международной научно-технической конференции “Аналитические и численные методы моделирования естественнонаучных и социальных проблем”. Пенза: Приволжский Дом знаний, 2011. С. 27–29.

[2] С.Л. Соболев, *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*, М.: Наука, 1988. MR0986735

[3] Г.В. Демиденко, *О корректной разрешимости краевых задач в полупространстве для квазиэллиптических уравнений*, Сиб. мат. журн. 1988. Т. 29, № 4. С. 54–67. MR0969103

[4] Г.В. Демиденко, *Интегральные операторы, определяемые квазиэллиптическими уравнениями. II*, Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 1. С. 41–65. MR1290098

[5] С.В. Успенский, *О представлении функций, определяемых одним классом гипоэллиптических операторов*, Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1972. Т. 117. С. 292–299. MR0355581

[6] Г.В. Демиденко, С.В. Успенский, *Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной*, Новосибирск: Научная книга, 1998. MR1831690

[7] П.И. Лизоркин, *Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложений классов дифференцируемых функций*, Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1969. Т. 105. С. 89–167. MR0262814

Лина Николаевна Бондарь
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: b_lina@ngs.ru