

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 9, стр. 65–150 (2012)

УДК 517.95

MSC 35J05

ВЕСОВАЯ АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА В РАСПРЯМЛЯЕМЫХ
ОБЛАСТЯХ ЛОКАЛЬНОГО ТИПА ЛЯПУНОВА-ДИНИ

А.И. ПАРФЁНОВ

ABSTRACT. We prove the well-posedness of the Dirichlet problem for the Poisson equation in a weighted Sobolev space under weak assumptions both on the weight and on the boundary of the domain. The weight is supposed to satisfy the Muckenhoupt condition on the off-boundary cubes and an additional condition near the boundary. The boundary is Lipschitz, flat enough, straightenable (in a sense close to the one studied before by the author) and is either straightenable with small constant or satisfies the so-called local Lyapunov-Dini condition. The proof amounts to an a priori estimate obtained via localizing the problem, straightening the boundary, L_w^p -discretizing singular integrals and estimating a number of dyadic sums. Our results strengthen some of the results of V.G. Maz'ya, T.O. Shaposhnikova, K. Schumacher, R.G. Durán, M. Sanmartino and M. Toschi.

Keywords: Poisson equation, weighted Sobolev space, Muckenhoupt weight, power weight, Lyapunov-Dini domain, straightenable domain, pointwise multiplier, discretization, dyadic cube.

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим следующий вопрос. Пусть $n = 2, 3, \dots$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная липшицева область и $1 < p < \infty$. Требуется дать как можно менее ограничительные условия на гладкость границы $\partial\Omega$, при которых задача Дирихле для уравнения Пуассона

$$(0.1) \quad \begin{cases} \Delta u = f & \text{в } \Omega, \\ u = 0 & \text{на } \partial\Omega \end{cases}$$

PARFENOV, A.I., WEIGHTED A PRIORI ESTIMATE IN STRAIGHTENABLE DOMAINS OF LOCAL LYAPUNOV-DINI TYPE.

© 2011 ПАРФЁНОВ А.И.

Поступила 28 августа 2011 г., опубликована 24 января 2012 г.

однозначно разрешима в пространстве Соболева $W^{2,p}(\Omega)$ для любого $f \in L^p(\Omega)$, причем $\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq D\|f\|_{L^p(\Omega)}$ с не зависящей от f постоянной $D > 0$.

Наиболее сильные результаты по этой проблеме принадлежат В.Г. Мазье и Т.О. Шапошниковой [11, 72] и формулируются в терминах локально задающих $\partial\Omega$ функций $\omega : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$. От ω требуется либо принадлежность пространству Слободецкого $W^{2-1/p,p}(\mathbb{R}^{n-1})$, либо чтобы градиенты $\nabla\omega$ были поточечными мультипликаторами для пространства Слободецкого $W^{1-1/p,p}(\mathbb{R}^{n-1})$ и имели малую мультипликаторную норму, см. условия (96) ниже. Доказательство однозначной разрешимости задачи (0.1) опирается на локализацию, распрямление границы и ряд Неймана. Известно, что от условия малости мультипликаторных норм $\|\nabla\omega\|$ отказаться нельзя, как показывает пример области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, имеющей границу класса C^∞ всюду, кроме точки $0 \in \partial\Omega$, в окрестности $B = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1/2\}$ которой для некоторого $C \in \mathbb{R}$ выполнено

$$(0.2) \quad \begin{aligned} \Omega \cap B &= \{x \in B : x_2 > \omega_C(x_1)\}, \\ \omega_C(x_1) &= \begin{cases} 0, & x_1 = 0, \\ \frac{C|x_1|}{\ln(1/|x_1|)}, & 0 < |x_1| < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

В силу [11] производная функции $\omega = \omega_C\varphi$, где $\varphi \in C_0^\infty(-1, 1)$ тождественно равна единице на $[-1/2, 1/2]$, является мультипликатором для пространства Слободецкого $W^{1/2,2}(\mathbb{R})$ при любом C , тогда как однозначная разрешимость задачи (0.1) в пространстве $W^{2,2}(\Omega)$ для всевозможных $f \in L^2(\Omega)$ ввиду [9, 11] равносильна условию $C > -\pi/4$.

В настоящей статье решаются следующие задачи:

- (i) исследовать поведение первых и вторых производных слабого решения задачи (0.1) в окрестности $\partial\Omega$ с помощью локализации, распрямления границы и дискретизации;
- (ii) доказать вариант теоремы Мазьи и Шапошниковой, заменяя малость мультипликаторных норм на условие типа Ляпунова-Дини, что тоже позволяет исключить контрпример (0.2) с $C \leq -\pi/4$;
- (iii) доказать вариант теоремы Мазьи и Шапошниковой, заменяя малость мультипликаторных норм на аналогичное условие, выраженное в дискретных терминах;
- (iv) обобщить (i), (ii) и (iii) на весовые пространства Соболева $W_w^{2,p}(\Omega)$.

Сделаем необходимые пояснения.

Ранее в [15, 16, 17] автор исследовал некоторые аналитические вопросы, имеющие отношение к регулярности решений эллиптических краевых задач. Эти вопросы связаны с теорией поточечных мультипликаторов (см. [18]), однако центральное положение в группе работ [15, 16, 17, 18] занимают *дискретные весовые неравенства* (ДВН), а не мультипликаторы. Поэтому резонно найти дискретный подход и к задаче (0.1). Применением локализации и распрямления границы задача (0.1) приводится к уравнению с переменными коэффициентами в полупространстве, которое в случае “достаточно плоской” границы можно трактовать как возмущение уравнения с постоянными коэффициентами. Для последнего уравнения известна в явном виде функция Грина. Дифференцируя соответствующую формулу дважды для получения $W^{2,p}$ -оценки, приходим к сингулярному интегралу. Наш дискретный подход к (0.1) состоит в применении L^p -дискретизации сингулярного интеграла.

Простейшая форма L^p -дискретизации сингулярного интеграла такова. Для $a \in \mathbb{Z}^n$ обозначим $Q_a = a + [-1/2, 1/2]^n$. Пусть функция $K \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ однородна степени $-n$ и имеет нулевой интеграл по единичной сфере. Тогда для $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $x \in Q_a$

$$\begin{aligned} U(x) &\equiv \text{V.P.} \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y) dy \\ &= \text{V.P.} \int_{3Q_a} K(x-y)f(y) dy + \sum_{b \in \mathbb{Z}^n: Q_a \cap Q_b = \emptyset} \int_{Q_b} K(x-y)f(y) dy, \end{aligned}$$

где $3Q_a = a + [-3/2, 3/2]^n$. По теореме Кальдерона-Зигмунда

$$\begin{aligned} \left\| \text{V.P.} \int_{3Q_a} K(\cdot - y)f(y) dy \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\leq C_1(p, K) \|f\|_{L^p(3Q_a)} \\ &\leq C_1 \sum_{b \in \mathbb{Z}^n: Q_a \cap Q_b \neq \emptyset} \|f\|_{L^p(Q_b)}. \end{aligned}$$

Если $Q_a \cap Q_b = \emptyset$, то для $y \in Q_b$

$$|K(x-y)| \leq C_2(K)|x-y|^{-n} \leq C_3(K)|a-b|^{-n},$$

откуда по неравенству Гёльдера и неравенству треугольника в $L^p(Q_a)$

$$\begin{aligned} \left| \int_{Q_b} K(x-y)f(y) dy \right| &\leq C_3|a-b|^{-n} \|f\|_{L^1(Q_b)} \leq C_3|a-b|^{-n} \|f\|_{L^p(Q_b)}, \\ (0.3) \quad \|U\|_{L^p(Q_a)} &\leq \underbrace{\max\{(1+\sqrt{n})^n C_1, (3/2)^n C_3\}}_{C_4(p, K)} \sum_{b \in \mathbb{Z}^n} \frac{\|f\|_{L^p(Q_b)}}{(1+|a-b|)^n}. \end{aligned}$$

Таким образом, семейство $\{\|U\|_{L^p(Q_a)}\}_{a \in \mathbb{Z}^n}$ для U оценивается через такое же семейство для f . Представляется, что предложенная дискретизация нова и похожа на разные способы дискретизации сингулярных интегралов из численного анализа в меньшей степени, чем на дискретизацию неравенства Пуанкаре из [53, раздел 3] или на дискретные методы работ, упомянутых в [89, с. 225].

При реализации задачи (i) L^p -дискретизация производится в верхнем полупространстве $\mathbb{R}_+^n$. Кубы Q_a заменяются при этом на кубы Уитни — кубы $Q \subset \mathbb{R}_+^n$, рёбра $\ell(Q)$ которых сравнимы с расстояниями $\text{dist}(Q, \partial\mathbb{R}_+^n)$. L^p -дискретизацию допускают также связь между первыми и вторыми производными функций (формула Ньютона-Лейбница) и влияние распрямления границы на уравнение Пуассона. Последующее изучение проиндексированных кубами числовых семейств приводит к оценкам (32) на L^p -средние модулей первого и второго градиентов функции, исследуемой в распрямлённой области.

В оценки (32) входят, в частности, содержащие экспоненциальный множитель $e^{\partial S_I}$ величины W_I . Совершенно естественно рассмотреть отдельно случай ограниченности величин S_I . Так мы приходим к классу LLD областей *локального типа Ляпунова-Дини*, промежуточному между классом Ляпунова-Дини (областей с непрерывной по Дини нормалью к границе) и классом липшицевых областей. Для области $\Omega \in \text{LLD}$ оценки (32) упрощаются. Чтобы получить из них априорную оценку $\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq D\|f\|_{L^p(\Omega)}$, мы дополнительно требуем $W^{2,p}$ -распрямляемости области Ω , т.е. выполнения одного ДВН из изученных

в [16, 17]. Из этой априорной оценки легко выводится однозначная разрешимость в $W^{2,p}(\Omega)$ задачи (0.1) в “достаточно плоских” $W^{2,p}$ -распрямляемых областях класса LLD, что выполняет задачу (ii).

При решении задачи (ii) уже произошел переход от мультипликаторных условий к ДВН, поэтому решение задачи (iii) требует минимальных усилий. Мы получаем однозначную разрешимость задачи (0.1) в $W^{2,p}(\Omega)$ для любых $f \in L^p(\Omega)$, если Ω “достаточно плоская” и $W^{2,p}$ -распрямляемая с малой постоянной, что означает малость фигурирующих в ДВН постоянных. Как показано в разделе 5.5, этот результат несколько сильнее теоремы Мазьи и Шапошниковой. Дело в том, что согласно [18] принадлежность пространству мультипликаторов равносильна паре ДВН. В контексте настоящей статьи одно ДВН отвечает за липшицевость задающих $\partial\Omega$ функций ω , тогда как другое ДВН — за $W^{2,p}$ -распрямляемость области Ω . Малость мультипликаторных норм $\|\nabla\omega\|$ равносильна поэтому малости постоянной Липшица области Ω и $W^{2,p}$ -распрямляемости области Ω с малой постоянной. Однако можно построить область Ω с большой постоянной Липшица и, тем не менее, “достаточно плоскую” и $W^{2,p}$ -распрямляемую с малой постоянной. Отметим, что возможность такого усиления теоремы Мазьи и Шапошниковой можно ожидать и в рамках их теории мультипликаторов, в которой известны аналогичным образом распадающиеся на два условия критерии мультипликаторности, см. [11, с. 164].

Обсудим, как вышесказанное обобщается на весовые пространства $L_w^p(\Omega)$ и $W_w^{2,p}(\Omega)$. Несложно убедиться, что формула (0.3) после замен

$$\|U\|_{L^p(Q_a)} \rightarrow \|U\|_{L_w^p(Q_a)} / \|1\|_{L_w^p(Q_a)}, \quad \|f\|_{L^p(Q_b)} \rightarrow \|f\|_{L_w^p(Q_b)} / \|1\|_{L_w^p(Q_b)}$$

имеет место, если вес w принадлежит классу A_p^{loc} из работ [68, 76], т.е. если w удовлетворяет A_p -условию Макенхаупта на кубах $Q \subset \mathbb{R}^n$ с ребром $\ell(Q) \leq 1$. В этом случае говорим о L_w^p -дискретизации сингулярного интеграла. Проводя L_w^p -дискретизацию в $\mathbb{R}_+^n$, мы требуем условия $w \in A_p^{\text{comp}}(\mathbb{R}_+^n)$, т.е. выполнения A_p -условия Макенхаупта на кубах $Q \subset \mathbb{R}_+^n$ с рёбрами $\ell(Q) \leq \text{dist}(Q, \partial\mathbb{R}_+^n)$. Родственный весовой класс в Ω обозначается через $A_p^{\text{comp}}(\Omega)$. Вывод весовых оценок (32) в сравнении с невесовым случаем требует внесения только технических изменений. Что же касается теоремы об однозначной разрешимости задачи (0.1) в пространстве $W_w^{2,p}(\Omega)$, то теперь мы должны работать с понятием $W_w^{2,p}$ -распрямляемости области Ω . В соответствующее ему ДВН входят не только числа $b_I^{(1)}$, описывающие степень локальной близости $\partial\Omega$ к гиперплоскости, но и меры a_I “криволинейных кубов Уитни” относительно веса w . Для обеспечения ограниченности одного линейного оператора в дискретном пространстве ℓ^p с весами a_I мы вводим понятие $(p, \lambda, \mathfrak{I})$ -семейства и соответствующий весовой класс $\mathfrak{A}_p(\Omega)_\lambda$. В итоге задача (0.1) оказывается однозначно разрешимой в $W_w^{2,p}(\Omega)$ с любым $f \in L_w^p(\Omega)$, если

$$(\exists \lambda > 0) \quad w \in \mathfrak{A}_p^{\text{comp}}(\Omega)_\lambda \equiv \mathfrak{A}_p(\Omega)_\lambda \cap A_p^{\text{comp}}(\Omega),$$

а область Ω является “достаточно плоской” и либо $W_w^{2,p}$ -распрямляема и принадлежит классу LLD (обобщение для (ii)), либо $W_w^{2,p}$ -распрямляема с малой постоянной (обобщение для (iii)).

Опишем структуру статьи. В § 1 обсуждаются базовые свойства весов (варианты условий удвоения и Макенхаупта) и пространств Соболева $W_w^{m,p}(\Omega)$,

после чего L_w^p -дискретизация применяется к уравнению $L_0 u = f$ с постоянными коэффициентами в полупространстве. В § 2 получен ряд неравенств с участием числовых семейств, проиндексированных двоичными кубами в $\mathbb{R}^{n-1}$. Реализации задачи (i+iv) в виде вывода весовых оценок (32) посвящен § 3. В разделе 4.1 содержится обсуждение “достаточно плоских” областей как на языке вторых разностей (условие Зигмунда) и приближения многочленами (пространства Морри-Кампанато) для задающих $\partial\Omega$ функций ω , так и на геометрическом языке аппроксимации $\partial\Omega$ гиперплоскостями (области Райфенберга). В остальной части § 4 изучаются распрямляющие гомеоморфизмы, области классов $C^{1,\varepsilon}$, Ляпунова-Дини и LLD, $(p, \lambda, \mathcal{I})$ -семейства, весовой класс $\mathfrak{A}_p(\Omega)_\lambda$ и $W_w^{2,p}$ -распрямляемость. Раздел 5.1 содержит теоремы об однозначной разрешимости в $W_w^{2,p}(\Omega)$, дающие решение задачам (ii+iv) и (iii+iv). Далее мы получаем следствия этих теорем путём проверки в тех или иных предположениях условия $w \in \mathfrak{A}_p^{\text{comp}}(\Omega)_\lambda$ и ДВН из определения $W_w^{2,p}$ -распрямляемости. Эти следствия усиливают ряд ранее известных про задачу (0.1) результатов, см. заключительные абзацы разделов 5.2 и 5.4 и раздел 5.5.

Добавлено при корректуре. Основные результаты настоящей статьи были анонсированы в препринте [19].

1. ВЕСА МАКЕНХАУПТОВСКОГО ТИПА. ДИСКРЕТНАЯ $W_w^{2,p}$ -ОЦЕНКА В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

1.1. Свойство удвоения на внутренних подмножествах. Пусть $n \in \mathbb{N}$ (но $n \geq 2$ начиная с раздела 1.4) и E — измеримое подмножество в $\mathbb{R}^n$. Будем говорить, что $w \succ 0$ на E , если заданная на E функция w измерима и почти всюду положительна. Обозначим

$$|E|_w = \int_E w \, dx.$$

При $w \equiv 1$ пишем просто $|E|$ (это лебегова мера множества E).

Кубом в $\mathbb{R}^n$ называется декартово произведение n промежутков (интервалов, полуинтервалов или отрезков) одинаковой длины. Центр и длину ребра куба Q обозначим через $\mathbf{c}_Q$ и $\ell(Q)$. Для $t > 0$

$$tQ = \{\mathbf{c}_Q + t(x - \mathbf{c}_Q) : x \in Q\}.$$

Пусть E — множество в $\mathbb{R}^n$ с непустой внутренностью E° .

Определение 1. Через $D(E)$ обозначим множество всех функций $w \succ 0$ на E° , для каждой из которых существует число $\theta^* \geq 1$ такое, что для любой пары $\{Q_0, Q\}$ кубов

$$(1) \quad Q_0 \subset Q \subset E^\circ, \quad \ell(Q_0) = \ell(Q)/2,$$

выполнены неравенства

$$(2) \quad |Q|_w \leq \theta^* |Q_0|_w < \infty.$$

Для непустого множества $F \subset \mathbb{R}^n \setminus E^\circ$ и $\delta > 0$ через $D(E, F)_\delta$ обозначим множество всех функций $w \succ 0$ на E° , для каждой из которых существует $\theta^* \geq 1$ такое, что для любой пары кубов (1) со свойством

$$(3) \quad \ell(Q) \leq \delta \, \text{dist}(Q, F) \equiv \delta \inf_{x \in Q, y \in F} |x - y|$$

имеет место (2). При $E \neq \mathbb{R}^n$ положим

$$D^{\text{comp}}(E) = D(E, \partial(E^\circ))_1.$$

Во всех случаях пусть $D[w]$ — минимально возможное значение θ^* .

Замечание. В работах [35] и [78] применяются δ -шары, определяемые с помощью аналога условия (3). При этом свойство δ -удвоения меры из [35] нельзя получить из нашего определения 1. Что же касается свойства δ -удвоения из формулы (35) в [78], то оно сходно с условием $w \in D^{\text{comp}}(E)$, но из [78] нелегко выделить следующую лемму.

Лемма 1. Если $0 < \delta_1 < \delta_2 < \infty$, то $D(E, F)_{\delta_1} = D(E, F)_{\delta_2}$. Для соответствующих постоянных $D^{(\delta_1)}[w]$ и $D^{(\delta_2)}[w]$ имеем $D^{(\delta_1)}[w] \leq D^{(\delta_2)}[w]$ и

$$(4) \quad (\forall \theta^* \geq D^{(\delta_1)}[w]) \quad D^{(\delta_2)}[w] \leq c = c(n, \delta_2/\delta_1, \theta^*).$$

Доказательство. Из неравенств $\ell(Q) \leq \delta_1 \text{dist}(Q, F) < \delta_2 \text{dist}(Q, F)$ получаем

$$D^{(\delta_1)}[w] \leq D^{(\delta_2)}[w], \quad D(E, F)_{\delta_1} \supset D(E, F)_{\delta_2}.$$

Докажем обратные соотношения. Пусть $w \in D(E, F)_{\delta_1}$. Возьмём наименьшее целое число $N \geq 2\delta_2/\delta_1$. Произвольный куб $Q \subset E^\circ$ со свойством

$$\ell(Q) \leq \delta_2 \text{dist}(Q, F)$$

разобьём на N^n кубов Q_i с $\ell(Q_i) = \ell(Q)/N$. Если кубы Q_{i_1} и Q_{i_2} касаются, то они содержатся в некотором кубе $Q_{1,2} \subset Q$ с $\ell(Q_{1,2}) = 2\ell(Q)/N$, откуда

$$|Q_{i_2}|_w \leq |Q_{1,2}|_w \leq D^{(\delta_1)}[w]|Q_{i_1}|_w \leq \theta^*|Q_{i_1}|_w.$$

Мы учли, что для пары $\{Q_{i_1}, Q_{1,2}\}$ верно условие (1) и, ввиду неравенств

$$\ell(Q_{1,2}) \leq 2\delta_2 \text{dist}(Q, F)/N \leq \delta_1 \text{dist}(Q_{1,2}, F),$$

условие (3). Соединяя произвольные кубы Q_i и Q_j цепочкой касающихся, получаем неравенство $|Q_j|_w \leq c_0(n, \delta_2/\delta_1, \theta^*)|Q_i|_w$, из которого немедленно следуют вложение $D(E, F)_{\delta_1} \subset D(E, F)_{\delta_2}$ и оценка (4). $\square$

Замечание. Неравенства типа (4) для всех θ^* , а не только для $\theta^* = D^{(\delta_1)}[w]$, важны при работе с семействами функций w . О неравенстве (4) можно сказать, что постоянная c зависит только от n , δ_2/δ_1 и верхней границы для $D^{(\delta_1)}[w]$. Так будем говорить и в дальнейшем.

1.2. Классы весов макенхауптовского типа. Пусть E , F и δ такие же, как в определении 1.

Определение 2. Для $1 < p < \infty$ через $A_p(E)$ и $A_p(E, F)_\delta$ обозначим множества всех функций $w \succ 0$ на E° таких, что

$$A_p[w] \equiv \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w \, dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{-\frac{1}{p-1}} \, dx \right)^{p-1} < \infty,$$

где $\sup_Q$ берется по всем кубам $Q \subset E^\circ$ в случае $A_p(E)$ и, соответственно, по всем кубам $Q \subset E^\circ$ со свойством (3) в случае $A_p(E, F)_\delta$. Число $A_p[w]$ называется постоянной Макенхаупта веса w . Положим

$$A_p = A_p(\mathbb{R}^n),$$

$$A_p^{\text{comp}}(E) = A_p(E, \partial(E^\circ))_1 \quad (\text{если } E \neq \mathbb{R}^n).$$

Замечание. Базовые сведения по истории и свойствам классов $A_p = A_p(\mathbb{R}^n)$ (включая классы A_1 и A_∞) можно найти в [36] или [81, глава V]. Среди обобщений класса A_p отметим класс A_p^{loc} , определяемый с помощью кубов $Q \subset \mathbb{R}^n$ с $\ell(Q) \leq 1$. Он встречается уже в [68] и изучен в [76, § 1.1]. В работе [34] для открытого множества E используется еще один локальный класс

$$(5) \quad A_{p,\text{loc}}(E) = \left\{ w : w|_{Q^\circ} \in A_p(Q) \text{ для любого замкнутого куба } Q \subset E \right\}.$$

Лемма 2. Пусть E , F , δ и p такие, как в определениях 1 и 2. Тогда

(i) если Q — куб, а Q_0 — его измеримое подмножество с $|Q_0| > 0$, то

$$(6) \quad |Q|_w \leq \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w \, dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{-\frac{1}{p-1}} \, dx \right)^{p-1} \left(\frac{|Q|}{|Q_0|} \right)^p |Q_0|_w;$$

(ii) $A_p(E) \subset D(E)$, причем $D[w] \leq 2^{np} A_p[w]$ при $w \in A_p(E)$;

(iii) $A_p(E, F)_\delta \subset D(E, F)_\delta$, причем $D[w] \leq 2^{np} A_p[w]$ при $w \in A_p(E, F)_\delta$;

(iv) если $0 < \delta_1 < \delta_2 < \infty$, то $A_p(E, F)_{\delta_1} = A_p(E, F)_{\delta_2}$. Для любого элемента w этого множества и соответствующих постоянных $A_p^{(\delta_1)}[w]$ и $A_p^{(\delta_2)}[w]$ имеем $A_p^{(\delta_1)}[w] \leq A_p^{(\delta_2)}[w]$ и

$$(7) \quad A_p^{(\delta_2)}[w] \leq c = c(n, p, \delta_2/\delta_1, \theta), \quad \theta \geq A_p^{(\delta_1)}[w].$$

Доказательство. Для сопряженного веса $w' = w^{-\frac{1}{p-1}}$ по неравенству Гёльдера

$$|Q_0|^p \leq |Q_0|_w |Q_0|_{w'}^{p-1} \leq |Q_0|_w |Q|_{w'}^{p-1},$$

что равносильно (6). Утверждения (ii) и (iii) непосредственно вытекают из (i).

Оценка $A_p^{(\delta_1)}[w] \leq A_p^{(\delta_2)}[w]$ из (iv) и соответствующее вложение очевидны. Для установления (7) возьмём $w \in A_p(E, F)_{\delta_1}$ и заметим, что

$$w' \in A_{p'}(E, F)_{\delta_1} \quad \left(p' = \frac{p}{p-1} \right), \quad A_{p'}[w'] = A_p[w]^{\frac{1}{p-1}}.$$

Применение утверждения (iii) и леммы 1 к весам w и w' показывает, что они принадлежат $D(E, F)_{\delta_2}$, причем $D^{(\delta_2)}[w]$ и $D^{(\delta_2)}[w']$ оцениваются постоянными, зависящими только от n , p , δ_2/δ_1 и θ . Возьмём минимальное $k \in \mathbb{N}$ такое, что $2^k \geq \delta_2/\delta_1$. Для любого $Q \subset E^\circ$ со свойством $\ell(Q) \leq \delta_2 \text{dist}(Q, F)$ имеем

$$\begin{aligned} & \left(\int_Q w \, dx \right) \left(\int_Q w' \, dx \right)^{p-1} \\ & \leq \left(D^{(\delta_2)}[w]^k \int_{2^{-k}Q} w \, dx \right) \left(D^{(\delta_2)}[w']^k \int_{2^{-k}Q} w' \, dx \right)^{p-1} \\ & \leq D^{(\delta_2)}[w]^k D^{(\delta_2)}[w']^{k(p-1)} 2^{-npk} |Q|^p \theta, \end{aligned}$$

поскольку $\ell(2^{-k}Q) = 2^{-k}\ell(Q) \leq \delta_1 \text{dist}(Q, F) \leq \delta_1 \text{dist}(2^{-k}Q, F)$. Тем самым (7), утверждение (iv) и лемма 2 доказаны. $\square$

Замечание. Как и в лемме 2(ii,iii), в дальнейшем всегда будет ясно из контекста, каким именно классам из определений 1 и 2 соответствуют $D[w]$ и $A_p[w]$.

В связи с обилием в литературе информации о классе A_p полезна такая

Лемма 3. Для любых куба $B \subset \mathbb{R}^n$ и веса $v \in A_p(B)$ существует вес $w \in A_p$ такой, что $w|_{B^\circ} = v$ и $A_p[w] \leq 3^{np} A_p[v]$.

Доказательство. Подправим незначительно доказательство леммы 1.1 из [76]. В качестве w берётся продолжение функции v , четное относительно всех $(n-1)$ -мерных плоскостей решетки, порожденной кубом B , и равное, скажем, нулю на самих плоскостях. Такое продолжение единственно и имеет период $2\ell(B)$ по всем переменным. Для оценивания $A_p[w]$ берётся произвольный куб $Q \subset \mathbb{R}^n$. Случай $\ell(Q) \geq \ell(B)$ разбирается аналогично [76]. При $\ell(Q) < \ell(B)$ пусть $B_1, B_2, \dots, B_k$ — кубы вышеупомянутой решетки, пересекающиеся с Q . Рассмотрение проекций на координатные оси показывает, что $k \leq 2^n$. Возьмём такое i_0 , что мера Лебега параллелепипеда $\Pi = Q \cap B_{i_0}$ максимальна. По построению для любого i

$$\begin{aligned} \int_{Q \cap B_i} w \, dx &\leq \int_{\Pi} w \, dx \leq \int_K w \, dx, \\ \int_{Q \cap B_i} w^{-\frac{1}{p-1}} \, dx &\leq \int_{\Pi} w^{-\frac{1}{p-1}} \, dx \leq \int_K w^{-\frac{1}{p-1}} \, dx, \end{aligned}$$

где K — куб с $\ell(K) = \ell(Q)$ и свойствами $\Pi \subset K \subset B_{i_0}$. Отсюда

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w \, dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{-\frac{1}{p-1}} \, dx \right)^{p-1} &\leq \\ k^p \left(\frac{1}{|K|} \int_K w \, dx \right) \left(\frac{1}{|K|} \int_K w^{-\frac{1}{p-1}} \, dx \right)^{p-1} &\leq 2^{np} A_p[v], \end{aligned}$$

так как $w|_{B_{i_0}^\circ} \in A_p(B_{i_0})$ и $A_p \left[w|_{B_{i_0}^\circ} \right] = A_p[v]$. Ввиду произвольности Q лемма доказана. $\square$

1.3. Дифференциальные операторы в весовых пространствах Соболева. Пусть множество $E \subset \mathbb{R}^n$ измеримо и $w \succ 0$ на E . При $1 \leq p < \infty$ для измеримой на E функции f положим

$$\|f\|_{L_w^p(E)} = \left(\int_E |f|^p w \, dx \right)^{1/p}.$$

Пространство всех f с $\|f\|_{L_w^p(E)} < \infty$ обозначается через $L_w^p(E)$. Множество $L_{w,\text{loc}}^p(E)$ и класс (5) являются частными случаями следующего соглашения.

Определение 3. Пусть Ω и E — измеримые множества в $\mathbb{R}^n$. Тогда $\Omega \in E$ значит, что замыкание $\bar{\Omega}$ компактно и содержится в E . Для символа X через $X_{\text{loc}}(E)$ будет обозначаться множество всех измеримых функций f на E таких, что $f|_{\Omega} \in X(\Omega)$ для любого открытого $\Omega \in E$.

При $w \equiv 1$ пишем $\|f\|_{L^p(E)}$, $L^p(E)$ и $L_{\text{loc}}^p(E)$ соответственно. Введём также обозначение

$$\|f\|_{L^\infty(E)} \equiv \operatorname{ess\,sup}_E |f|.$$

Пусть $1 < p < \infty$ и $w \in A_{p,\text{loc}}(\Omega)$ для открытого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. По неравенству Гёльдера $L_w^p(\Omega) \subset L_{\text{loc}}^1(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$, поэтому можно говорить об обобщенных производных функций из $L_w^p(\Omega)$ и о пространствах Соболева

$$W_w^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L_w^p(\Omega) : D^\alpha u \in L_w^p(\Omega) \text{ при } 1 \leq |\alpha| \leq m \right\}, \quad m \in \mathbb{N},$$

$$\|u\|_{W_w^{m,p}(\Omega)} = \sum_{j=0}^m \|\nabla^j u\|_{L_w^p(\Omega)} \equiv \sum_{j=0}^m \left\| |\nabla^j u| \right\|_{L_w^p(\Omega)}.$$

Здесь $|\nabla^j u| = \sqrt{\sum_{|\alpha|=j} |D^\alpha u|^2}$. При $w \equiv 1$ пишем просто $W^{m,p}(\Omega)$ и имеем право рассматривать еще пространства $W^{m,1}(\Omega)$ и $W_{\text{loc}}^{m,1}(\Omega)$.

Многие результаты теории невесовых пространств $W^{m,p}(\Omega)$ обобщаются на случай веса $w \in A_p$: банаховость [33, 73, 88], плотность гладких функций и усреднение по Соболеву [33, 44, 73], неравенство Пуанкаре и полиномиальная аппроксимация [33, 38, 42, 88], интерполяционное неравенство [33, 44, 88], теорема вложения Соболева [42, 44, 73], продолжение с $W_w^{m,p}(\Omega)$ на $W_w^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ [33, 88]. В частности, справедлива

Лемма 4. *Для любых открытого куба $B \subset \mathbb{R}^n$ и функции $u \in L^1(B)$ со свойством $|\nabla^m u| \in L_w^p(B)$, где $w \in A_p(B)$, найдётся такой многочлен π степени менее m , что*

$$\sum_{j=0}^{m-1} \ell(B)^j \|\nabla^j(u - \pi)\|_{L_w^p(B)} \leq C \ell(B)^m \|\nabla^m u\|_{L_w^p(B)},$$

где $C > 0$ зависит только от n , m , p и верхней границы для $A_p[w]$.

Доказательство. По лемме 3 можно считать, что $w \in A_p$. В силу неравенства Гёльдера $|\nabla^m u| \in L^1(B)$, откуда $u \in W^{m,1}(B)$. Теперь доказательство следствия 2.1.15 из [88] легко переносится со случая “ B — шар” на наш случай. $\square$

Замечание. Как правило, для справедливости названных результатов предположение $w \in A_p$ не является необходимым. О функциональных пространствах с весами из A_p^{loc} см. [76] и библиографию в [56]. В литературе иногда применяют термин A_p -согласованность (A_p -consistency, см. [38, 43, 44, 79]) для указания на зависимость постоянной (например, постоянной C из леммы 4) от верхней границы для постоянной Макенхаупта.

Для веса $w \in A_p$ хорошо известна ограниченность в $L_w^p(\mathbb{R}^n)$: максимального оператора Харди-Литтлвуда и сингулярных интегральных операторов [36], мультипликаторов Фурье [67], псевдодифференциальных операторов нулевого порядка [73]; см. также [5]. Менее известна A_p -согласованность оценок сверху норм этих операторов, которая проверяется исследованием соответствующих доказательств. Эти факты позволяют получить некоторые A_p -весовые результаты об уравнениях $\Delta u = f$, $\Delta^m u = f$, $\text{div } u = f$, уравнениях гидродинамики, неравенстве Корна и иных вопросах, см. [38, 40, 41, 42, 43, 44, 79]. К этому же кругу тем принадлежит следующая лемма, которую докажем аналогично лемме 6.4.1 из [21].

Лемма 5. *Пусть B — открытый куб в $\mathbb{R}^n$, $u \in L^1(2B)$ и $f \in L_w^p(2B)$, где $w \in A_p(2B)$ и $f = \Delta u$ в смысле распределений. Тогда $u \in W_w^{2,p}(B)$ и*

$$\sum_{j=0}^2 \ell(B)^j \|\nabla^j u\|_{L_w^p(B)} \leq C \left[\ell(B)^2 \|f\|_{L_w^p(2B)} + \frac{|B|^{1/p}}{|B|} \int_{2B} |u| dx \right],$$

где $C > 0$ зависит только от n , p и верхней границы θ для $A_p[w]$.

Доказательство. Растяжения показывают, что достаточно разобрать случай $\ell(B) = 1$. Как и выше, по лемме 3 считаем, что $w \in A_p$.

Пусть F — оператор Фурье в пространствах $\mathcal{S}$ быстро убывающих функций и $\mathcal{S}'$ умеренных обобщенных функций. Для любого $-\infty < s < \infty$ введём оператор

$$I_s v = F^{-1}(1 + |x|^2)^{s/2} F v.$$

Хорошо известно, что I_s является автоморфизмом пространств $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}'$. Введём весовое пространство бесселевых потенциалов

$$H_w^{s,p} = I_{-s}(L_w^p(\mathbb{R}^n))$$

с нормой $\|U\|_{H_w^{s,p}} = \|I_s U\|_{L_w^p(\mathbb{R}^n)}$. Согласно [73, 79] имеют место следующие утверждения:

- (i) $H_w^{m,p} = W_w^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ при $m \in \mathbb{N}$, причем нормы эквивалентны с постоянными, зависящими только от n, m, p и θ ;
- (ii) имеют место вложения $\mathcal{S} \subset H_w^{s,p} \subset \mathcal{S}'$, причем первое — плотное;
- (iii) при $s > 0$ сопряженное пространство $(H_w^{s,p})'$ изометрично пространству $H_{w'}^{-s,p'}$, где $p' = p/(p-1)$ и $w' = w^{-1/(p-1)}$;
- (iv) дифференцирование $\frac{\partial}{\partial x_i}$ — ограниченный оператор из $H_w^{t,p}$ в $H_w^{t-1,p}$ для любого $t \in \mathbb{R}$ с мажорантой нормы, зависящей только от n, t, p и θ ;
- (v) аналогичное (iv) утверждение для оператора вложения $H_w^{t,p} \rightarrow H_w^{t-1,p}$;
- (vi) I_s изометрично отображает $H_w^{t,p}$ на $H_w^{t-s,p}$.

Пусть $B_k = (1 + \frac{k+3}{n+2})B$ при $-3 \leq k \leq n-1$, так что $B_{-3} = B$ и $B_{n-1} = 2B$. Для $-2 \leq k \leq n-1$ построим функции $\varphi_k \in C_0^\infty(B_k)$ с $|D^\alpha \varphi_k| \leq c(\alpha)$ и $\varphi_k \equiv 1$ на B_{k-1} . Пусть $u_k = \bar{u}\varphi_k$ и $u_n = \bar{u}$, где $\bar{u}$ — продолжение функции u нулём на $\mathbb{R}^n \setminus 2B$. Тогда

$$f_k := \Delta u_k = \overline{(\Delta u)\varphi_k + 2\nabla u \nabla \varphi_k + u \Delta \varphi_k} = \overline{f\varphi_k} + 2\nabla u_{k+1} \nabla \varphi_k + u_{k+1} \Delta \varphi_k.$$

Ввиду (i) и (iii) умножение на функцию из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ — ограниченный оператор в $H_w^{t,p}$, $t \in \mathbb{Z}$. Отсюда и из (iv,v,vi) при $-2 \leq k \leq n-1$ имеем

$$\begin{aligned} \|f_k\|_{H_w^{-k-2,p}} &\leq c \left[\|\overline{f\varphi_k}\|_{H_w^{-k-2,p}} + \|u_{k+1}\|_{H_w^{-k-1,p}} + \|u_{k+1}\|_{H_w^{-k-2,p}} \right] \\ &\leq c \left[\|f\|_{L_w^p(2B)} + \|u_{k+1}\|_{H_w^{-k-1,p}} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|u_k\|_{H_w^{-k,p}} &= \|(I - \Delta)u_k\|_{H_w^{-k-2,p}} \leq \|u_{k+1}\varphi_k\|_{H_w^{-k-2,p}} + \|f_k\|_{H_w^{-k-2,p}} \\ &\leq c \left[\|f\|_{L_w^p(2B)} + \|u_{k+1}\|_{H_w^{-(k+1),p}} \right], \end{aligned}$$

$$\|u_{-2}\|_{H_w^{2,p}} \leq c \left[\|f\|_{L_w^p(2B)} + \|u_{-1}\|_{H_w^{1,p}} \right] \leq \dots \leq c \left[\|f\|_{L_w^p(2B)} + \|u_n\|_{H_w^{-n,p}} \right].$$

Здесь c — различные положительные постоянные, зависящие от n, k, p и θ . Из теоремы вложения, неравенства Гёльдера, (6) и (i,ii,iii) следует, что

$$\|\psi\|_{L^\infty(2B)} \leq c \sum_{|\alpha| \leq n} \|D^\alpha \psi\|_{L^1(2B)} \leq c|2B|_w^{1/p} \|\psi\|_{W_{w'}^{n,p'}(\mathbb{R}^n)} \leq c|B|_w^{1/p} \|\psi\|_{H_{w'}^{n,p'}},$$

$$\|u_n\|_{H_w^{-n,p}} = \sup_{\substack{\psi \in \mathcal{S}: \\ \|\psi\|_{H_{w'}^{n,p'}} \leq 1}} |\langle \bar{u}, \psi \rangle| \leq \|u\|_{L^1(2B)} \sup_{\psi} \|\psi\|_{L^\infty(2B)} \leq c|B|_w^{1/p} \|u\|_{L^1(2B)},$$

$$\|u\|_{W_w^{2,p}(B)} \leq \|u_{-2}\|_{W_w^{2,p}(\mathbb{R}^n)} \leq c\|u_{-2}\|_{H_w^{2,p}}.$$

Сопутствующие выкладкам рассуждения показывают, что $u \in W_w^{2,p}(B)$, а сами выкладки дают требуемое неравенство. $\square$

Аналогично доказывается

Лемма 6. Пусть B — открытый куб в $\mathbb{R}^n$, $u \in W^{1,1}(2B)$ и $f \in L_w^p(2B)$, где $w \in A_p(2B)$ и $f = \Delta u$ в смысле распределений. Тогда $u \in W_w^{2,p}(B)$ и

$$\sum_{j=1}^2 \ell(B)^j \|\nabla^j u\|_{L_w^p(B)} \leq C \left[\ell(B)^2 \|f\|_{L_w^p(2B)} + \frac{|B|_w^{1/p}}{\ell(B)^{n-1}} \int_{2B} |\nabla u| dx \right],$$

где $C > 0$ зависит только от n , p и верхней границы для $A_p[w]$.

Доказательство. Как и в лемме 5, достаточно рассмотреть случай $\ell(B) = 1$ и $w \in A_p$. Сохраним обозначения леммы 5. Операция $f \mapsto \overline{f\varphi_k}$ определена для любого $f \in \mathcal{D}'(2B)$. В выкладках леммы 5 понизим на единицу индекс t у всех пространств $H_w^{t,p}$. Чтобы дойти до пространства $H_w^{-n,p}$, нужны индексы $-2 \leq k \leq n-2$. Мы получаем

$$\begin{aligned} \|u\|_{W_w^{1,p}(B)} &\leq \|u_{-2}\|_{W_w^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|u_{-2}\|_{H_w^{1,p}} \leq c \left[\|\overline{f\varphi_{n-2}}\|_{H_w^{-1,p}} + \|u_{-1}\|_{H_w^{0,p}} \right] \leq \dots \\ &\leq c \left[\|\overline{f\varphi_{n-2}}\|_{H_w^{-1,p}} + \|u_{n-1}\|_{H_w^{-n,p}} \right] \\ &\leq c \left[\|\overline{f\varphi_{n-2}}\|_{H_w^{-1,p}} + |B|_w^{1/p} \|u\|_{L^1(2B)} \right]. \end{aligned}$$

Положим $u = D_i u$ и $f = D_i f$, $1 \leq i \leq n$. Требуемое неравенство следует из оценки

$$\|(\overline{D_i f})\varphi_{n-2}\|_{H_w^{-1,p}} = \|\varphi_{n-2} D_i \{\overline{f\varphi_{n-1}}\}\|_{H_w^{-1,p}} \leq c \|\overline{f\varphi_{n-1}}\|_{H_w^{0,p}} \leq c \|f\|_{L_w^p(2B)}. \quad \square$$

1.4. Основные двоичные обозначения. Всюду в дальнейшем фиксировано целое число $n \geq 2$. Пусть $\mathcal{D}$ — множество всех “полуоткрытых” кубов в $\mathbb{R}^{n-1}$ вида

$$I = 2^k \vec{a} + [0, 2^k)^{n-1}, \quad (k, \vec{a}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{n-1}.$$

Ребро $\ell(I) = 2^k$ куба I обозначается через l_I . Куб $I' \in \mathcal{D}$ задан условиями $l_{I'} = 2l_I$ и $I \subset I'$, а лежащие в $\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ кубы $I^\square$ и $I^\square$ — формулами

$$I^\square = I \times [l_I, 2l_I), \quad I^\square = \overline{I^\square} = \overline{I} \times [l_I, 2l_I].$$

Если $w \succ 0$ на $\mathbb{R}_+^n$ и $w \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+^n)$, то для функции $f \in L_{w,\text{loc}}^p(\mathbb{R}_+^n)$ ($1 < p < \infty$) имеют смысл средние

$$\|f\|_I = \left(\frac{1}{|I^\square|_w} \int_{I^\square} |f|^p w dx \right)^{1/p}, \quad I \in \mathcal{D}.$$

Определим также серию числовых характеристик геометрических объектов:

$$\begin{aligned} |x|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq \nu} |x_i|, \quad x \in \mathbb{R}^\nu, \\ \text{diam}_\infty X &= \sup_{\xi, \eta \in X} |\xi - \eta|_\infty, \quad \emptyset \neq X \subset \mathbb{R}^{n-1}, \\ \text{dist}_\infty(X, Y) &= \inf_{\xi \in X, \eta \in Y} |\xi - \eta|_\infty, \quad \emptyset \neq Y \subset \mathbb{R}^{n-1}, \\ [I, J] &= \text{diam}_\infty(I \cup J), \quad I, J \in \mathcal{D}, \\ \langle I, J \rangle &= \text{dist}_\infty(I, J), \end{aligned}$$

$$\Gamma_{IJ}^{(\alpha,\beta)} = l_I^\alpha l_J^\beta [I, J]^{-\alpha-\beta}, \quad \alpha, \beta \in (-\infty, \infty).$$

1.5. Дискретная $W_w^{2,p}$ -оценка в $\mathbb{R}_+^n$. Выделим результат о сингулярных интегралах в $L_w^p(\mathbb{R}^n)$, достаточный для дальнейшего.

Лемма 7. Пусть функция $\mathfrak{E} \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ однородна степени $1-n$. Пусть $1 < p < \infty$ и $w \in A_p$. Тогда для любой функции $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\|\nabla(\mathfrak{E} * f)\|_{L_w^p(\mathbb{R}^n)} \leq c \|f\|_{L_w^p(\mathbb{R}^n)},$$

где $c > 0$ зависит только от $n, p, \mathfrak{E}$ и верхней границы для $A_p[w]$.

Доказательство. По теоремам 7.1.16 и 7.1.18 из [22] преобразование Фурье $F\mathfrak{E} \in \mathcal{S}'$ однородно степени -1 и принадлежит классу $C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Поэтому $F(D_i \mathfrak{E})$ однородно степени 0 и тоже принадлежит $C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, $1 \leq i \leq n$. Требуемое неравенство вытекает теперь из теорем I, II и леммы 3 в [36] для ядра $K = D_i \mathfrak{E}$ (можно также сослаться на следствие в § V.4.2 из [81]). $\square$

Пусть $C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^n})$ — сужение пространства $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ на замкнутое верхнее полупространство $\overline{\mathbb{R}_+^n} = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$. Для $u \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^n})$ положим

$$\gamma_0 u(\xi) = u(\xi, 0), \quad \xi \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Согласно Э. Гальярдо γ_0 продолжается по непрерывности до сюръективного оператора следа $\gamma_0 : W^{1,1}(\mathbb{R}_+^n) \rightarrow L^1(\mathbb{R}^{n-1})$, см. [86, лекция 32].

В следующем частичном результате использована L_w^p -дискретизация сингулярного интеграла. Формулировка и доказательство леммы имеют общие элементы с леммой 9.12 из [4], в которой, грубо говоря, $\|\nabla^2 u\|_{L^p(\mathbb{R}_+^n)}$ оценивается через $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}_+^n)}$.

Лемма 8. Пусть носитель функции $u \in W^{1,1}(\mathbb{R}_+^n)$ ограничен и $\gamma_0 u = 0$. Пусть обобщенный лапласиан $f = \Delta u$ принадлежит $L_{w,\text{loc}}^p(\mathbb{R}_+^n)$, где $1 < p < \infty$ и $w \in A_p^{\text{comp}}(\mathbb{R}_+^n)$. Тогда $D^\alpha u \in L_{w,\text{loc}}^p(\mathbb{R}_+^n)$ при $|\alpha| = 2$, и для любого $I \in \mathcal{D}$

$$(8) \quad \|\nabla^2 u\|_I \leq c \sum_{J \in \mathcal{D}} \Gamma_{IJ}^{(0,n+1)} \|f\|_J,$$

где $c > 0$ зависит только от n, p и верхней границы θ для $A_p[w]$.

Доказательство. Пусть сначала $u \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^n})$. Пусть Ω_n — площадь сферы $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$. Рассмотрим фундаментальное решение оператора Лапласа

$$E(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln |x|, & n = 2, \\ \frac{1}{(2-n)\Omega_n} |x|^{2-n}, & n \geq 3. \end{cases}$$

Для $y = (y', y_n) \in \mathbb{R}^n$ положим $\tilde{y} = (y', -y_n)$ и $G(x, y) = E(x - y) - E(x - \tilde{y})$. Хорошо известно, что при $x_n > 0$

$$u(x) = \int_{y_n > 0} G(x, y) f(y) dy.$$

Зафиксировав I , рассмотрим параллелепипед и куб

$$\mathfrak{P}_I = \overline{\frac{5}{2}I} \times \left[\frac{5}{8}l_I, \frac{11}{4}l_I \right], \quad \mathfrak{P}_I^* = (3I)^\circ \times \left(\frac{1}{2}l_I, \frac{7}{2}l_I \right).$$

Представим $f = f_1 + f_2$ с такими функциями $f_i \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^n})$, что $|f_i| \leq |f|$, $\text{supp } f_1 \subset \overline{\mathbb{R}_+^n} \setminus \mathfrak{P}_I$ и $\text{supp } f_2 \subset \mathfrak{P}_I^*$. Тогда

$$u(x) = u_1(x) + u_2(x) = \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \mathfrak{P}_I} G(x, y) f_1(y) dy + \int_{\mathfrak{P}_I^*} G(x, y) f_2(y) dy.$$

Покажем, что если $x \in I^\square$, $y \in J^\square$ и $y \notin \mathfrak{P}_I$, то $[I, J] \leq 4|x - y|_\infty$. Из $|x - y|_\infty > \frac{3}{8}l_I$ следует, что при $[I, J] \leq \frac{3}{2}l_I$ требуемое неравенство очевидно. Пусть $[I, J] > \frac{3}{2}l_I$. При $l_J \leq \frac{1}{2}l_I$ это значит, что $\langle I, J \rangle \geq \frac{1}{2}l_I$, откуда

$$[I, J] \leq l_I + \langle I, J \rangle + l_J \leq \langle I, J \rangle + \frac{3}{2}l_I \leq 4\langle I, J \rangle \leq 4|x' - y'|_\infty \leq 4|x - y|_\infty.$$

Пусть $l_J \geq l_I$. Тогда из условия $y \notin \mathfrak{P}_I$ следует, что $|x - y|_\infty > \frac{3}{4}l_I$, так что требуемое неравенство очевидно при $[I, J] \leq 3l_I$. Осталось разобрать подслучаи $l_J \in \{l_I, 2l_I\}$ и $l_J \geq 4l_I$ случая $[I, J] > 3l_I$. В них, соответственно, имеем

$$\begin{aligned} \langle I, J \rangle \geq l_I &\Rightarrow [I, J] \leq l_I + \langle I, J \rangle + l_J \leq \langle I, J \rangle + 3l_I \leq 4\langle I, J \rangle \leq 4|x - y|_\infty; \\ [I, J] \leq l_I + \langle I, J \rangle + l_J &\leq \langle I, J \rangle + \frac{5}{4}l_J \leq |x' - y'|_\infty + \frac{5}{2}|x_n - y_n| \leq \frac{7}{2}|x - y|_\infty. \end{aligned}$$

Отсюда, дифференцируя при $x \in I^\square$ под знаком интеграла, получаем

$$\begin{aligned} |\nabla^2 u_1(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \mathfrak{P}_I} |\nabla_x^2 G(x, y)| |f_1(y)| dy \\ &\leq C_1(n) \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \mathfrak{P}_I} y_n |x - y|_\infty^{-n-1} |f(y)| dy \\ &\leq C_1 \sum_{J \in \mathcal{D}} \int_{J^\square \setminus \mathfrak{P}_I} 2l_J ([I, J]/4)^{-n-1} |f(y)| dy, \end{aligned}$$

где C_1 возникает из известной [93] оценки для $|\nabla_x^2 G(x, y)|$. По неравенству Гёльдера и предположению $w \in A_p^{\text{comp}}(\mathbb{R}_+^n) \equiv A_p(\mathbb{R}_+^n, \partial\mathbb{R}_+^n)_1$

$$\begin{aligned} (9) \quad \int_{J^\square} |f| dy &\leq \left(\int_{J^\square} |f|^p w dy \right)^{1/p} \left(\int_{J^\square} w^{-\frac{1}{p-1}} dy \right)^{(p-1)/p} \leq \theta^{1/p} l_J^n \|f\|_J, \\ \|\nabla^2 u_1\|_I &\leq \sup_{I^\square} |\nabla^2 u_1| \leq 2C_1 4^{n+1} \theta^{1/p} \sum_{J \in \mathcal{D}} \Gamma_{IJ}^{(0, n+1)} \|f\|_J. \end{aligned}$$

Оценим $|\nabla^2 u_2|$. При $1 \leq i \leq n$ и $x \in I^\square$

$$\begin{aligned} \nabla D_i u_2(x) &= \nabla \int_{\mathfrak{P}_I^*} (D_i E)(x - y) f_2(y) dy - \int_{\mathfrak{P}_I^*} (\nabla D_i E)(x - \tilde{y}) f_2(y) dy \\ &\equiv V_1(x) + V_2(x). \end{aligned}$$

Согласно условию $w \in A_p^{\text{comp}}(\mathbb{R}_+^n)$ и лемме 2(iv) вес $v = w|_{\mathfrak{P}_I^*}$ принадлежит к $A_p(\mathfrak{P}_I^*)$ и может быть по лемме 3 продолжен до веса $w_I \in A_p$ с постоянной Макенхаупта $A_p[w_I] \leq \theta' = \theta'(n, p, \theta)$. По лемме 7

$$\begin{aligned} \|V_1\|_I &\leq |I^\square|_w^{-1/p} \|\nabla(D_i E * f_2)\|_{L_{w_I}^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C_2(n, p, \theta') |I^\square|_w^{-1/p} \|f_2\|_{L_{w_I}^p(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

$$\leq C_2 |I^\square|_w^{-1/p} \left(\sum_{J \in \mathcal{D}: \mathfrak{P}_I^* \cap J^\square \neq \emptyset} |J^\square|_w \|f\|_J^p \right)^{1/p}.$$

Из лемм 2(iii) и 1 выводится, что

$$(10) \quad |J^\square|_w \leq C_3(n, p, \theta) |I^\square|_w, \quad \mathfrak{P}_I^* \cap J^\square \neq \emptyset.$$

Поэтому

$$\|V_1\|_I \leq C_2 C_3^{1/p} \sum_{J \in \mathcal{D}: \mathfrak{P}_I^* \cap J^\square \neq \emptyset} \|f\|_J \leq C_2 C_3^{1/p} 4^{n+1} \sum_{J \in \mathcal{D}} \Gamma_{IJ}^{(0, n+1)} \|f\|_J.$$

Величину $|V_2|$ можно оценить равномерно:

$$\begin{aligned} |V_2(x)| &\leq C_4(n) l_I^{-n} \sum_{J: \mathfrak{P}_I^* \cap J^\square \neq \emptyset} \int_{J^\square} |f| dy \stackrel{(9)}{\leq} C_4 \theta^{1/p} \sum_{J: \mathfrak{P}_I^* \cap J^\square \neq \emptyset} l_I^{-n} l_J^n \|f\|_J, \\ \|V_2\|_I &\leq \sup_{I^\square} |V_2| \leq C_5(n) \theta^{1/p} \sum_{J \in \mathcal{D}} \Gamma_{IJ}^{(0, n+1)} \|f\|_J. \end{aligned}$$

Соединяя оценки для $|\nabla^2 u_1|$, V_1 и V_2 , получаем (8).

Исследуем случай $u \notin C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^n})$. Включение $|\nabla^2 u| \in L_{w, \text{loc}}^p(\mathbb{R}_+^n)$ вытекает из леммы 5. Следовательно, $u \in W_{\text{loc}}^{2,1}(\mathbb{R}_+^n)$ и $\Delta u = f$ почти всюду. Безусловно, можно считать ряд в (8) сходящимся. Тогда

$$(11a) \quad \sum_{J \in \mathcal{D}} l_J^{n+1} \|f\|_J < \infty,$$

поскольку $[I, J] \leq C(I, f) < \infty$ при $\|f\|_J \neq 0$ в силу ограниченности $\text{supp } f$. Из (11a) на основании неравенства (9) получаем

$$(11b) \quad \int_{x_n > 0} x_n |f(x)| dx \leq 2 \sum_{J \in \mathcal{D}} l_J \int_{J^\square} |f| dx \leq 2 \theta^{1/p} \sum_{J \in \mathcal{D}} l_J^{n+1} \|f\|_J < \infty.$$

Поэтому имеет смысл обобщенная функция

$$\langle F, \varphi \rangle \equiv \int_{x_n > 0} f(x) [\varphi(x) - \varphi(\tilde{x})] dx.$$

Зададим функцию $U \in L^1(\mathbb{R}^n)$ формулой

$$U(x) = \begin{cases} u(x), & x_n > 0, \\ -u(\tilde{x}), & x_n < 0. \end{cases}$$

Покажем, что $\Delta U = F$ в смысле обобщенных функций из $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Интегрирование по частям с учетом условия $\gamma_0 u = 0$ (см. [86, лекция 14]) показывает, что для любого $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} \langle U, \Delta \varphi \rangle &= \int_{x_n > 0} u(x) [\Delta \varphi(x) - \Delta \varphi(\tilde{x})] dx \\ (12) \quad &= - \sum_{i=1}^n \int_{x_n > 0} \frac{\partial u}{\partial x_i} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) - s_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\tilde{x}) \right] dx, \end{aligned}$$

где $s_i = 1$ при $i < n$, но $s_n = -1$. Опять интегрируя по частям, получаем

$$\int_{x_n > 0} \frac{\partial u}{\partial x_i} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\tilde{x}) \right] dx \stackrel{(*)}{=} - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{x_n > \varepsilon} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} [\varphi(x) - \varphi(\tilde{x})] dx \quad (i < n),$$

$$\begin{aligned} \int_{x_n > \varepsilon} \frac{\partial u}{\partial x_n} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(\tilde{x}) \right] dx &= - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial u}{\partial x_n}(\xi, \varepsilon) [\varphi(\xi, \varepsilon) - \varphi(\xi, -\varepsilon)] d\xi \\ &\quad - \int_{x_n > \varepsilon} \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} [\varphi(x) - \varphi(\tilde{x})] dx \quad (i = n), \end{aligned}$$

где $\varepsilon > 0$ и функция $\frac{\partial u}{\partial x_n}(\cdot, \varepsilon) \in L^1(\mathbb{R}^{n-1})$ понимается в смысле следов. Из условия $\frac{\partial u}{\partial x_n} \in L^1(\mathbb{R}_+^n)$ получаем

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left| \frac{\partial u}{\partial x_n}(\xi, \varepsilon) \right| \varepsilon d\xi = 0,$$

поэтому для некоторой последовательности $\varepsilon_k \downarrow 0$

$$\int_{x_n > 0} \frac{\partial u}{\partial x_n} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(\tilde{x}) \right] dx = - \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{x_n > \varepsilon_k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} [\varphi(x) - \varphi(\tilde{x})] dx.$$

Отсюда, из (12), (*) и равенства $\Delta u = f$ п.в. следует, что

$$\langle \Delta U, \varphi \rangle = \langle U, \Delta \varphi \rangle = \langle F, \varphi \rangle.$$

Возьмём усредняющее ядро φ_1 со свойством $\varphi_1(x) = \varphi_1(\tilde{x}) \geq 0$ и носителем в шаре $\{|x| \leq 1/7\}$. Для $h > 0$ пусть $\varphi_h(x) = h^{-n} \varphi_1(x/h)$. Функция

$$u_h = U * \varphi_h|_{\overline{\mathbb{R}_+^n}}$$

принадлежит $C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^n})$, причем $\gamma_0 u_h = 0$ и $\Delta u_h = F * \varphi_h$. Пусть $h < a/2$, где a — степень двойки. Тогда на основании (8)

$$\begin{aligned} \|\nabla^2 u_h\|_I &\leq c \sum_{J \in \mathcal{D}} \Gamma_{IJ}^{(0, n+1)} \|F * \varphi_h\|_J \\ (13) \quad &= c \left[\sum_{h \leq l_J \leq a/2} (\dots) + \sum_{l_J < h} (\dots) + \sum_{l_J \geq a} (\dots) \right]. \end{aligned}$$

Пусть $h \leq l_J \leq a/2$ и $y \in J^\square$. Тогда для $C_6 = \sup |\varphi_1|$

$$\begin{aligned} Y \equiv F * \varphi_h(y) &\stackrel{(**)}{=} \int_{x_n > 0} f(x) [\varphi_h(y-x) - \varphi_h(y-\tilde{x})] dx \\ &= \int_{x_n > 0} f(x) \varphi_h(y-x) dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |Y|^p &\leq \left(\int_{x_n > 0} |f(x)|^p w(x) \varphi_h(y-x) dx \right) \left(\int_{x_n > 0} w(x)^{-\frac{1}{p-1}} \varphi_h(y-x) dx \right)^{p-1} \\ &\leq C_6^{p-1} \int_{x_n > 0} |f(x)|^p w(x) \varphi_h(y-x) \left(h^{-n} \int_{|y-z| < \frac{h}{7}} w(z)^{-\frac{1}{p-1}} dz \right)^{p-1} dx \\ &\leq C_6^p h^{-np} \int_{|x-y| < \frac{h}{7}} |f(x)|^p w(x) \mathcal{I}_h(x) dx, \\ \int_{J^\square} |F * \varphi_h(y)|^p w(y) dy &\leq C_6^p h^{-np} \int_{x_n > 0} |f(x)|^p w(x) \mathcal{I}_{h,J}^*(x) dx, \end{aligned}$$

где

$$\mathcal{I}_h(x) = \left(\int_{|x-z| < \frac{2h}{7}} w(z)^{-\frac{1}{p-1}} dz \right)^{p-1},$$

$$\mathcal{J}_{h,J}^*(x) = \mathcal{J}_h(x) \int_{y \in J^\square: |x-y| < \frac{h}{7}} w(y) dy.$$

Если $\mathcal{J}_{h,J}^*(x) \neq 0$, то $|x-y| < \frac{h}{7} \leq \frac{l_J}{7}$ для некоторого $y \in J^\square$, откуда $x_n > \frac{6}{7}l_J$ и куб $Q = \{z \in \mathbb{R}^n: |x-z|_\infty < \frac{2h}{7}\}$ обладает свойством $\ell(Q) \leq \text{dist}(Q, \partial\mathbb{R}_+^n)$. По условию Макенхаупта $\mathcal{J}_{h,J}^*(x) \leq \theta|Q|^p = \theta\left(\frac{4h}{7}\right)^{np}$, поэтому

$$\int_{J^\square} |F * \varphi_h(y)|^p w(y) dy \leq C_6^p \theta (4/7)^{np} \sum_{K: J^\square \cap K^\square \neq \emptyset} \int_{K^\square} |f(x)|^p w(x) dx.$$

Если $J^\square \cap K^\square \neq \emptyset$, то $\mathfrak{P}_J^* \cap K^\square \neq \emptyset$, откуда с учетом (10)

$$\begin{aligned} \int_{K^\square} |f(x)|^p w(x) dx &= |K^\square|_w \|f\|_K^p \leq C_3 |J^\square|_w \|f\|_K^p, \\ \|F * \varphi_h\|_J &\leq C_7(\varphi_1, p, \theta) \sum_{K: J^\square \cap K^\square \neq \emptyset} \|f\|_K, \\ \sum_{J: h \leq l_J \leq a/2} \Gamma_{IJ}^{(0,n+1)} \|F * \varphi_h\|_J &\leq l_I^{-n-1} \sum_{J: h \leq l_J \leq a/2} l_J^{n+1} \|F * \varphi_h\|_J \\ &\leq C_7 C_8(n) l_I^{-n-1} \sum_{l_K \leq a} l_K^{n+1} \|f\|_K. \end{aligned}$$

Последнее выражение в силу (11a) можно сделать меньше произвольного $\varepsilon > 0$ выбором достаточно малого a .

Пусть $l_J < h$ и $y \in J^\square$. Из равенства (**) и неравенств

$$|\varphi_h(y-x) - \varphi_h(y-\tilde{x})| \leq C_9(\varphi_1) h^{-n-1} x_n$$

и $2l_J + \frac{h}{7} < \frac{15}{7}h < \frac{15}{14}a$ выводим, что

$$\begin{aligned} |F * \varphi_h(y)| &\leq C_9 h^{-n-1} \int_{x_n > 0, \min\{|x-y|, |x-\tilde{y}|\} < \frac{h}{7}} x_n |f(x)| dx \\ &\leq C_9 h^{-n-1} \int_{x_n > 0, \text{dist}(x, J^\square) < \frac{h}{7}} x_n |f(x)| dx, \\ \sum_{J: l_J < h} \Gamma_{IJ}^{(0,n+1)} \|F * \varphi_h\|_J &\leq \frac{C_9}{(hl_I)^{n+1}} \sum_{J: l_J < h} l_J^{n+1} \int_{x_n > 0, \text{dist}(x, J^\square) < \frac{h}{7}} x_n |f(x)| dx \\ &\leq \frac{C_9}{(hl_I)^{n+1}} \int_{0 < x_n < \frac{15}{14}a} x_n |f(x)| dx \sum_{J: l_J < h, \text{dist}(x', J) < \frac{h}{7}} l_J^{n+1} \\ &\leq C_9 C_{10}(n) l_I^{-n-1} \int_{0 < x_n < \frac{15}{14}a} x_n |f(x)| dx. \end{aligned}$$

При достаточно малом a последнее выражение меньше ε в силу (11b).

Если $l_J \geq a$, то $\|F * \varphi_h\|_J = \|f * \varphi_h\|_J$ ввиду $h < a/2$. Из (13) получаем

$$\|\nabla^2 u_h\|_I < c \left[2\varepsilon + \sum_{J \in \mathcal{D}: l_J \geq a} \Gamma_{IJ}^{(0,n+1)} \|f * \varphi_h\|_J \right].$$

В силу ограниченности $\text{supp } f$ суммирование здесь можно производить по не зависящему от h конечному подмножеству в $\mathcal{D}$. Переход к пределу при $h \rightarrow 0$

даёт неравенство

$$\|\nabla^2 u\|_I \leq c \left[2\varepsilon + \sum_{J \in \mathcal{D}} \Gamma_{IJ}^{(0,n+1)} \|f\|_J \right],$$

влекущее неравенство (8) для $u \notin C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n)$. Заметим, что предельный переход в $L_w^p(\Omega)$ и $W_w^{2,p}(\Omega)$ с $w \in A_{p,\text{loc}}(\mathbb{R}_+^n)$ и $\Omega \Subset \mathbb{R}_+^n$ законен по замечанию 3.4 из [44], которое надо применить к весу $w_Q \in A_p$, совпадающему с w на таком кубе Q , что $\Omega \Subset Q \Subset \mathbb{R}_+^n$ (см. построение веса w_I выше). $\square$

Определение 4. *Отображение $h : X_1 \rightarrow X_2$ одного подмножества евклидова пространства в другое называется билипшицевым с постоянной не более κ , где $\kappa \geq 1$, если*

$$\frac{1}{\kappa} |x - y| \leq |h(x) - h(y)| \leq \kappa |x - y|, \quad x, y \in X_1.$$

Мы будем часто использовать ограниченность почти всюду величиной κ^n якобианов отображений $h|_{X_1^\circ}$ и $h^{-1}|_{h(X_1)^\circ}$ и соответствующие результаты о замене переменной в пространствах L_w^p и $W_w^{1,p}$. Подробнее об этих вопросах см. [10, 1.1.7] и [23, гл. 3]. Перенесем известный (см. [79, лемма 3.1.4/1]) результат о сохранении класса A_p при билипшицевых отображениях на класс $A_p(E, F)_1$.

Лемма 9. *Пусть задано билипшицево отображение $h : E^\circ \cup F \rightarrow \mathbb{R}^n$ с постоянной не более κ , где множества E и F такие, как в определении 1. Пусть $w \in A_p(G, H)_1$, где $1 < p < \infty$, а множества G и H удовлетворяют условиям $h(E^\circ) \subset G^\circ \subset \mathbb{R}^n \setminus H \neq \mathbb{R}^n$. Пусть существуют $\delta_0 > 0$ и $\delta_1 > 0$ такие, что всякое непустое множество $K_0 \subset h(E^\circ)$ со свойством*

$$0 < \text{diam}(K_0) \leq \delta_0 \text{dist}(K_0, h(F))$$

содержится в кубе $K \subset G^\circ$ с ребром

$$\ell(K) \leq \min\{\text{diam}(K_0), \delta_1 \text{dist}(K, H)\}.$$

Тогда вес $w_\star = w \circ h$ принадлежит $A_p(E, F)_1$ и

$$A_p[w_\star] \leq c = c(n, p, \delta_0, \delta_1, \kappa, \theta), \quad \theta \geq A_p[w].$$

Доказательство. Ясно, что $w_\star \succ 0$ на E° . Для $\delta = \frac{\delta_0}{\kappa^2 \sqrt{n}}$ рассмотрим произвольный куб $K_\star$ со свойствами

$$K_\star \subset E^\circ, \quad \ell(K_\star) \leq \delta \text{dist}(K_\star, F).$$

Тогда $K_0 \equiv h(K_\star) \subset h(E^\circ)$ и

$$\text{diam}(K_0) \leq \kappa \text{diam}(K_\star) = \kappa \sqrt{n} \ell(K_\star) \leq \kappa \sqrt{n} \delta \text{dist}(K_\star, F) \leq \delta_0 \text{dist}(K_0, h(F)).$$

Для соответствующего по условию куба K , $K_0 \subset K \subset G^\circ$, имеем

$$\begin{aligned} \left(\int_{K_\star} w_\star dx \right) \left(\int_{K_\star} w_\star^{-\frac{1}{p-1}} dx \right)^{p-1} &\leq \kappa^{np} \left(\int_{K_0} w dy \right) \left(\int_{K_0} w^{-\frac{1}{p-1}} dy \right)^{p-1} \leq \\ &\leq \kappa^{np} \left(\int_K w dy \right) \left(\int_K w^{-\frac{1}{p-1}} dy \right)^{p-1} \leq \kappa^{np} A_p^{(\delta_1)}[w] |K|^p \leq \kappa^{np} c_1(n, p, \delta_1, \theta) |K|^p \end{aligned}$$

по лемме 2(iv). При этом $\ell(K) \leq \text{diam}(K_0) \leq \kappa \text{diam}(K_\star) = \kappa \sqrt{n} \ell(K_\star)$, откуда

$$w_\star \in A_p(E, F)_\delta, \quad A_p^{(\delta)}[w_\star] \leq \kappa^{2np} n^{np/2} c_1.$$

Применяя еще раз лемму 2(iv), получаем требуемое утверждение. $\square$

Установим полный результат о дискретной $W_w^{2,p}$ -оценке в полупространстве. Нам будет полезно наблюдение

$$(14) \quad I_1^\square \cap I_2^\square \neq \emptyset \ \& \ J_1^\square \cap J_2^\square \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad \Gamma_{I_1 J_1}^{(\alpha, \beta)} \leq C(\alpha, \beta) \Gamma_{I_2 J_2}^{(\alpha, \beta)},$$

следующее из неравенств $\frac{1}{2} \leq \frac{l_{I_1}}{l_{I_2}} \leq 2$, $\frac{1}{2} \leq \frac{l_{J_1}}{l_{J_2}} \leq 2$ и $\frac{1}{4} \leq \frac{[I_1, J_1]}{[I_2, J_2]} \leq 4$.

Теорема 1. Пусть $L_0 = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$ — дифференциальный оператор с постоянными вещественными коэффициентами такой, что для некоторого $\lambda \geq 1$ выполнено условие

$$(15) \quad \frac{1}{\lambda} |\zeta|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \zeta_i \zeta_j \leq \lambda |\zeta|^2, \quad \zeta \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда справедлива лемма 8, в которой лапласиан Δ заменён на оператор L_0 , а постоянная $c > 0$ зависит только от n, p, θ и λ .

Доказательство. Можно считать, что матрица $A_0 = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ симметрична. Найдём какую-нибудь ортогональную (то есть принадлежащую $O(n)$) матрицу S , приводящую A_0 к диагональной форме $D = S A_0 S^*$. Возьмём матрицу $T \in O(n)$, переводящую полупространство $\mathbb{R}_+^n$ в прообраз этого полупространства при отображении $S^* D^{1/2}$. Тогда отображение $B = S^* D^{1/2} T$ сохраняет это полупространство и обладает свойствами $BB^* = S^* D S = A_0$ и

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} |\zeta| = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} |T\zeta| \leq |B\zeta| = |D^{1/2} T\zeta| \leq \sqrt{\lambda} |T\zeta| = \sqrt{\lambda} |\zeta|.$$

Следовательно, B — билипшицев гомеоморфизм из $\overline{\mathbb{R}_+^n}$ на $\overline{\mathbb{R}_+^n}$ с постоянной не более $\sqrt{\lambda}$.

Пусть носитель функции $u_0 \in W^{1,1}(\mathbb{R}_+^n)$ ограничен, $\gamma_0 u_0 = 0$ и $L_0 u_0 = f_0$ в смысле распределений, причем $f_0 \in L_{w_0, \text{loc}}^p(\mathbb{R}_+^n)$, где $w_0 \in A_p^{\text{comp}}(\mathbb{R}_+^n)$. При $x_n > 0$ положим

$$u(x) = u_0(Bx), \quad f(x) = f_0(Bx), \quad w(x) = w_0(Bx).$$

Применим лемму 9 к $E = G = \mathbb{R}_+^n$, $F = H = \partial \mathbb{R}_+^n$, $h = B$, $\kappa = \sqrt{\lambda}$, $w = w_0$, $\delta_0 = \delta_1 = 1$ и $w_* = w$. Получаем $w \in A_p^{\text{comp}}(\mathbb{R}_+^n)$, причем $A_p[w] \leq c_1(n, p, \theta, \lambda)$ для любого $\theta \geq A_p[w_0]$. Остальные условия леммы 8 легко проверяются, откуда $|\nabla^2 u| \in L_{w, \text{loc}}^p(\mathbb{R}_+^n)$ и выполнено неравенство (8) с постоянной $c = c(n, p, \theta, \lambda)$.

Ясно, что $|\nabla^2 u_0| \in L_{w_0, \text{loc}}^p(\mathbb{R}_+^n)$. Среднее $\|f_0\|_I$, вычисляемое относительно веса w_0 , временно обозначим через $|f_0|_I$. Из соотношений $w \in D^{\text{comp}}(\mathbb{R}_+^n)$ и (14) получаем

$$\begin{aligned} |\nabla^2 u_0|_{I_0} &= |I_0^\square|_{w_0}^{-1/p} \left(\int_{I_0^\square} |\nabla^2 u_0|^p w_0 dx \right)^{1/p} \\ &\leq c_2(n, p, \lambda) |B^{-1} I_0^\square|_w^{-1/p} \left(\int_{B^{-1} I_0^\square} |\nabla^2 u|^p w dx \right)^{1/p} \\ &\leq c_2 |B^{-1} I_0^\square|_w^{-1/p} \sum_{I: I^\square \cap B^{-1} I_0^\square \neq \emptyset} |I^\square|_w^{1/p} \|\nabla^2 u\|_I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq c_3(n, p, \theta, \lambda) \sum_{I: I^\square \cap B^{-1}I_0^\square \neq \emptyset} \|\nabla^2 u\|_I \\
&\leq c_3 c \sum_{J \in \mathcal{D}} \|f\|_J \sum_{I: I^\square \cap B^{-1}I_0^\square \neq \emptyset} \Gamma_{IJ}^{(0, n+1)} \\
&\leq c_4(n, p, \theta, \lambda) \sum_{J \in \mathcal{D}} \Gamma_{\widehat{I}_0 J}^{(0, n+1)} \|f\|_J,
\end{aligned}$$

где $\widehat{I}_0$ — один из кубов в $\mathcal{D}$ со свойством $(\widehat{I}_0)^\square \cap B^{-1}I_0^\square \neq \emptyset$. Аналогично,

$$\begin{aligned}
\|f\|_J &= |J^\square|_w^{-1/p} \left(\int_{J^\square} |f|^p w \, dx \right)^{1/p} \\
&\leq c_5(n, p, \lambda) |BJ^\square|_{w_0}^{-1/p} \left(\int_{BJ^\square} |f_0|^p w_0 \, dx \right)^{1/p} \\
&\leq c_6(n, p, \theta, \lambda) \sum_{J_0: J_0^\square \cap BJ^\square \neq \emptyset} |f_0|_{J_0}, \\
\sum_{J \in \mathcal{D}} \Gamma_{\widehat{I}_0 J}^{(0, n+1)} \|f\|_J &\leq c_6 \sum_{J_0 \in \mathcal{D}} |f_0|_{J_0} \sum_{J: J^\square \cap B^{-1}J_0^\square \neq \emptyset} \Gamma_{\widehat{I}_0 J}^{(0, n+1)} \\
&\leq c_7(n, p, \theta, \lambda) \sum_{J_0 \in \mathcal{D}} \Gamma_{\widehat{I}_0 \widehat{J}_0}^{(0, n+1)} |f_0|_{J_0} \\
&\leq c_8(n, p, \theta, \lambda) \sum_{J_0 \in \mathcal{D}} \Gamma_{I_0 J_0}^{(0, n+1)} |f_0|_{J_0},
\end{aligned}$$

а это значит, что неравенство (8) верно для функций u_0 и f_0 и веса w_0 . $\square$

2. ОЦЕНИВАНИЕ РЯДА ДВОИЧНЫХ СУММ

2.1. Основная теорема про числа $\Gamma_{IJ}^{(\alpha, \beta)}$. Для $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$ и $I \in \mathcal{D}$ обозначим $\Xi \equiv \xi - \mathbf{c}_I$. Очевидно, что если $\xi \in J \in \mathcal{D}$, то

$$(16) \quad \max\{l_I, |\Xi|_\infty, l_J\} \leq [I, J] \leq \max\left\{l_I, \frac{1}{2}l_I + |\Xi|_\infty + l_J, l_J\right\} \leq \frac{5}{2} \max\{l_I, |\Xi|_\infty, l_J\}.$$

Лемма 10. Пусть $\beta > n - 1$. Тогда выполнены следующие утверждения.

(i) Если $\sigma > \beta$, то для любых $I \in \mathcal{D}$ и $b \geq l_I$

$$\sum_{J \in \mathcal{D}: [I, J] \geq b} \frac{l_J^\beta}{[I, J]^\sigma} \leq c_1(n, \beta, \sigma) b^{\beta - \sigma}.$$

(ii) Если $\sigma < \beta$, то для любых $I \in \mathcal{D}$ и $b \geq l_I$

$$\sum_{J \in \mathcal{D}: [I, J] \leq b} \frac{l_J^\beta}{[I, J]^\sigma} \leq c_2(n, \beta, \sigma) b^{\beta - \sigma}.$$

Доказательство. (i) Для степени двойки a положим

$$S_a = \sum_{J \in \mathcal{D}: l_J = a \text{ \& } [I, J] \geq b} \frac{l_J^{n-1}}{[I, J]^\sigma} = \sum_{J \in \mathcal{D}: l_J = a \text{ \& } [I, J] \geq b} \int_J \frac{d\xi}{[I, J]^\sigma}.$$

В силу (16) и условия $\sigma > 0$

$$\begin{aligned} S_a &\leq \sum_{J \in \mathcal{D}: l_J = a \text{ \& } [I, J] \geq b} \int_J \max\{l_I, |\Xi|_\infty, l_J\}^{-\sigma} d\xi \\ &\leq \int_{\max\{l_I, |\Xi|_\infty, a\} \geq 2b/5} \max\{l_I, |\Xi|_\infty, a\}^{-\sigma} d\xi. \end{aligned}$$

Если $a < \frac{2}{5}b$, то в силу условия $\sigma > n - 1$ имеем

$$S_a \leq \int_{\max\{l_I, |\Xi|_\infty\} \geq 2b/5} \max\{l_I, |\Xi|_\infty\}^{-\sigma} d\xi \leq \begin{cases} c_3(n, \sigma) b^{n-1-\sigma}, & l_I < \frac{2}{5}b, \\ c_4(n, \sigma) l_I^{n-1-\sigma}, & b \geq l_I \geq \frac{2}{5}b, \end{cases}$$

так что $S_a \leq c(n, \sigma) b^{n-1-\sigma}$. Если же $a \geq \frac{2}{5}b$, то

$$S_a \leq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \max\{l_I, |\Xi|_\infty, a\}^{-\sigma} d\xi = c'(n, \sigma) \max\{l_I, a\}^{n-1-\sigma} \leq c' a^{n-1-\sigma}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{J \in \mathcal{D}: [I, J] \geq b} \frac{l_J^\beta}{[I, J]^\sigma} &= \sum_a a^{\beta-(n-1)} S_a \\ &\leq c b^{n-1-\sigma} \sum_{a < \frac{2}{5}b} a^{\beta-(n-1)} + c' \sum_{a \geq \frac{2}{5}b} a^{\beta-\sigma} \leq c_1 b^{\beta-\sigma}. \end{aligned}$$

(ii) Для степени двойки a положим

$$S_a = \sum_{J \in \mathcal{D}: l_J = a \text{ \& } [I, J] \leq b} \frac{l_J^{n-1}}{[I, J]^\sigma}.$$

Аналогично предыдущему,

$$S_a \leq \max\{1, (2/5)^\sigma\} \int_{\max\{l_I, |\Xi|_\infty, a\} \leq b} \max\{l_I, |\Xi|_\infty, a\}^{-\sigma} d\xi,$$

откуда $S_a = 0$ при $a > b$. Если же $a \leq b$, то $A \equiv \max\{l_I, a\} \leq b$ и

$$\begin{aligned} S_a &\leq \max\{1, (2/5)^\sigma\} \int_{|\Xi|_\infty \leq b} \max\{A, |\Xi|_\infty\}^{-\sigma} d\xi \\ &= \max\{1, (2/5)^\sigma\} A^{n-1-\sigma} \int_{|\eta|_\infty \leq b/A} \max\{1, |\eta|_\infty\}^{-\sigma} d\eta \\ &\leq c''(n, \sigma) A^{n-1-\sigma} \begin{cases} 1, & n-1 < \sigma < \beta, \\ \ln(be/A), & \sigma = n-1, \\ (b/A)^{n-1-\sigma}, & \sigma < n-1 \end{cases} \\ &= c'' \begin{cases} A^{n-1-\sigma}, & n-1 < \sigma < \beta, \\ \ln(be/A), & \sigma = n-1, \\ b^{n-1-\sigma}, & \sigma < n-1. \end{cases} \end{aligned}$$

В каждом из трёх случаев требуемое в утверждении (ii) неравенство легко получается из разложения

$$\sum_{J \in \mathcal{D}: [I, J] \leq b} \frac{l_J^\beta}{[I, J]^\sigma} = \sum_{a < l_I} a^{\beta-(n-1)} S_a + \sum_{l_I \leq a \leq b} a^{\beta-(n-1)} S_a. \quad \square$$

Теорема 2. Пусть $\alpha, \beta, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Тогда

(a) если $\alpha > 0$ и $\beta > n - 1$, то существует такое $c = c(n, \alpha, \beta) > 0$, что

$$\sum_{J \in \mathcal{D}} \Gamma_{IJ}^{(\alpha, \beta)} \leq c, \quad I \in \mathcal{D};$$

(b) если $\alpha + \mu > 0$, $\beta + \lambda > n - 1$ и $(\alpha - \lambda)(\beta - \mu) > 0$, то

$$\sum_{J \in \mathcal{D}} \Gamma_{IJ}^{(\alpha, \beta)} \Gamma_{JK}^{(\lambda, \mu)} \leq c' \Gamma_{IK}^{(\min\{\alpha, \lambda\}, \min\{\beta, \mu\})}$$

для некоторого $c' = c'(n, \alpha, \beta, \lambda, \mu) > 0$ и любых $I, K \in \mathcal{D}$.

Доказательство. Утверждение (a) следует из леммы 10(i) с $\sigma = \alpha + \beta$ и $b = l_I$.

Докажем утверждение (b). Разобьём семейство $\mathcal{D}$ на три подсемейства

$$E_1 = \left\{ J \in \mathcal{D} : \frac{1}{2}[I, J] < [I, K] < 2[J, K] \right\},$$

$$E_2 = \left\{ J \in \mathcal{D} : [I, K] \leq \frac{1}{2}[I, J] \right\},$$

$$E_3 = \left\{ J \in \mathcal{D} : [J, K] \leq \frac{1}{2}[I, K] \right\}.$$

На основании неравенства треугольника $[I, J] \leq [I, K] + [J, K]$ имеем

$$\frac{1}{2}[I, J] \leq [J, K], \quad J \in E_2.$$

Из неравенств треугольника $[I, K] \leq [I, J] + [J, K]$ и $[I, J] \leq [I, K] + [J, K]$ получаем

$$\frac{1}{2}[I, K] \leq [I, J] \leq \frac{3}{2}[I, K], \quad J \in E_3.$$

В силу соотношения

$$\sum_{J \in \mathcal{D}} \Gamma_{IJ}^{(\alpha, \beta)} \Gamma_{JK}^{(\lambda, \mu)} = \sum_{J \in \mathcal{D}} \Gamma_{KJ}^{(\mu, \lambda)} \Gamma_{JI}^{(\beta, \alpha)}$$

без умаления общности считаем, что $\alpha < \lambda$ и $\beta < \mu$. В этом случае

$$\Gamma_{IJ}^{(\alpha, \beta)} \Gamma_{JK}^{(\lambda, \mu)} = l_I^\alpha l_K^\mu \frac{l_J^{\beta+\lambda}}{[I, J]^{\alpha+\beta} [J, K]^{\lambda+\mu}} \leq \begin{cases} \frac{2^{\lambda+\mu} l_I^\alpha l_K^\mu}{[I, K]^{\lambda+\mu}} \frac{l_J^{\beta+\lambda}}{[I, J]^{\alpha+\beta}}, & J \in E_1, \\ 2^{\lambda+\mu} l_I^\alpha l_K^\mu \frac{l_J^{\beta+\lambda}}{[I, J]^{\alpha+\beta+\lambda+\mu}}, & J \in E_2, \\ \frac{2^{|\alpha+\beta|} l_I^\alpha l_K^\mu}{[I, K]^{\alpha+\beta}} \frac{l_J^{\beta+\lambda}}{[J, K]^{\lambda+\mu}}, & J \in E_3, \end{cases}$$

где при $J \in E_1 \cup E_2$ применено условие $\lambda + \mu > \alpha + \mu > 0$.

Оценим суммы $S_i = \sum_{J \in E_i} \Gamma_{IJ}^{(\alpha, \beta)} \Gamma_{JK}^{(\lambda, \mu)}$. По лемме 10(ii) с $b = 2[I, K]$

$$S_1 \leq \frac{2^{\lambda+\mu} l_I^\alpha l_K^\mu}{[I, K]^{\lambda+\mu}} c_2(n, \beta + \lambda, \alpha + \beta) (2[I, K])^{\lambda-\alpha} = C_1(n, \alpha, \beta, \lambda, \mu) \Gamma_{IK}^{(\alpha, \mu)} \leq C_1 \Gamma_{IK}^{(\alpha, \beta)}.$$

Аналогично, по лемме 10(i) с $b = 2[I, K]$

$$S_2 \leq C_2(n, \alpha, \beta, \lambda, \mu) \Gamma_{IK}^{(\alpha, \mu)} \leq C_2 \Gamma_{IK}^{(\alpha, \beta)}.$$

По лемме 10(i) с K вместо I и $b = l_K$

$$S_3 \leq C_3(n, \alpha, \beta, \lambda, \mu) \frac{l_I^\alpha l_K^{\mu+\beta-\mu}}{[I, K]^{\alpha+\beta}} = C_3 \Gamma_{IK}^{(\alpha, \beta)}.$$

Отсюда $\sum_{J \in \mathcal{D}} \Gamma_{IJ}^{(\alpha, \beta)} \Gamma_{JK}^{(\lambda, \mu)} \leq (C_1 + C_2 + C_3) \Gamma_{IK}^{(\alpha, \beta)}$. □

Можно показать, что условия на параметры α , β , λ и μ в теореме 2 нельзя ослабить. Изучим важный пограничный случай.

Лемма 11. *Существует постоянная $b_0 = b_0(n) > 0$ такая, что*

$$\sum_{J \in \mathcal{D}} \Gamma_{IJ}^{(0,n)} \Gamma_{JK}^{(1,n)} \leq b_0 \left[1 + \log_2 \frac{[I, K]}{l_K} \right] \Gamma_{IK}^{(0,n)}, \quad I, K \in \mathcal{D}.$$

Доказательство. В доказательстве теоремы 2(b) положим $\alpha = 0$, $\beta = n$, $\lambda = 1$ и $\mu = n$. Оценки сумм S_1 и S_2 основаны на условиях

$$\lambda + \mu > 0, \quad \beta + \lambda > n - 1, \quad \alpha < \lambda, \quad \alpha + \mu > 0, \quad \beta \leq \mu$$

и потому сохраняют силу. Из неравенства $[I, K] \leq 2[I, J]$ ($J \in E_3$) получаем

$$S_3 = \sum_{J \in E_3} \frac{l_J^{n+1} l_K^n}{[I, J]^n [J, K]^{n+1}} \leq \left(\frac{2l_K}{[I, K]} \right)^n \sum_{J \in E_3} \left(\frac{l_J}{[J, K]} \right)^{n+1}.$$

Пусть $E_3 \neq \emptyset$, так что $2l_K \leq [I, K]$ и, следовательно, $2^k l_K \leq [I, K] < 2^{k+1} l_K$ и $E_3 \subset \bigcup_{j=1}^k F_j$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$ и $F_j = \{J \in \mathcal{D} : 2^{j-1} l_K \leq [J, K] < 2^j l_K\}$. В силу соотношений

$$\sum_{J \in F_j} \left(\frac{l_J}{[J, K]} \right)^{n+1} \leq (2^{j-1} l_K)^{-n-1} \sum_{J \in \mathcal{D} : [J, K] < 2^j l_K} l_J^{n+1} \leq C(n)$$

имеем

$$S_3 \leq 2^n \Gamma_{IK}^{(0,n)} C k \leq 2^n \Gamma_{IK}^{(0,n)} C \log_2 \frac{[I, K]}{l_K}.$$

Это доказывает лемму с постоянной $b_0 = \max\{C_1 + C_2, 2^n C\}$. $\square$

2.2. Дополнительные двоичные обозначения. Введём во множестве $\mathcal{D}$ симметричное отношение

$$I \odot J \Leftrightarrow l_I = l_J \geq \frac{1}{2}[I, J] \Leftrightarrow (l_I = l_J \text{ \& } \bar{I} \cap \bar{J} \neq \emptyset).$$

Образ $\odot(I) = \{J \in \mathcal{D} : I \odot J\}$ куба I при этом отношении обозначим через $I_\odot$. Через $I^{(k)}$ обозначим операцию k -кратного ($k \in \mathbb{N}_0$) штрихования куба $I \in \mathcal{D}$, так что $I^{(0)} = I$ и $I^{(k)} = (I^{(k-1)})'$ при $k \geq 1$. Положим также $I_\odot^{(k)} = (I^{(k)})_\odot$,

$$\mathfrak{L}_I = \bigcup_{k=0}^{\infty} I_\odot^{(k)},$$

$$\mathfrak{O}_J = \{I \in \mathcal{D} : J \in \mathfrak{L}_I\} = \{I \in \mathcal{D} : I \subset H \text{ для некоторого } H \in J_\odot\}.$$

2.3. О взаимосвязи сумм S_I для соседних кубов I . Пусть

$$(17) \quad \text{для } J \in \mathcal{D} \text{ даны числа } c_J \geq 0 \text{ такие, что } c_J \leq M < \infty.$$

Положим

$$\begin{aligned} \Phi_{IJ} &= \left(\frac{l_J}{l_I + [I, J]} \right)^n, \\ S_I &= \sum_{J \in \mathcal{D}} \Phi_{IJ} c_J, \\ T_I &= \sum_{J \in \mathcal{D}} \Gamma_{IJ}^{(1,n)} c_J. \end{aligned}$$

Из теоремы 2(а) следует, что для некоторого $b_1 = b_1(n) > 0$

$$(18a) \quad T_I \leq b_1 M.$$

Вместе с тем ряды S_I могут расходиться.

Лемма 12. *Существуют зависящие только от n постоянные $b_2, b_3, b_4 > 0$ такие, что для любых кубов $I \in \mathcal{D}$ и $H \in I_\odot$ выполнены неравенства*

$$(18b) \quad S_H - b_2 M \leq S_I \leq S_H + b_2 M,$$

$$(18c) \quad S_{I'} + b_3 T_I \leq S_I \leq S_{I'} + b_4 T_I.$$

Замечание. В дальнейшем нам понадобится также постоянная

$$(18d) \quad b_5(n) = (4b_1 b_4)^{-1}.$$

Доказательство. Пусть $J \in \mathcal{D}$. Из неравенства $[H, J] \leq [I, J] + l_I$ следует, что

$$\begin{aligned} (l_I + [I, J])^{-n} &\leq [H, J]^{-n} = (l_H + [H, J])^{-n} \left(1 - \frac{l_H}{l_H + [H, J]}\right)^{-n} \\ &\leq (l_H + [H, J])^{-n} \left(1 + \frac{2^{n+1} l_H}{l_H + [H, J]}\right), \\ \Phi_{IJ} &\leq \Phi_{HJ} + \frac{2^{n+1} l_H l_J^n}{(l_H + [H, J])^{n+1}} \leq \Phi_{HJ} + 2^{n+1} \Gamma_{HJ}^{(1,n)}. \end{aligned}$$

После домножения последнего неравенства на c_J и суммирования по $J \in \mathcal{D}$ оценка (18a) дает правое неравенство в (18b) с $b_2 = 2^{n+1} b_1$. Левое же неравенство получается из правого переменной ролей кубов I и H .

Из неравенств

$$[I, J] \leq [I', J] \leq [I, J] + l_I$$

выводим, что

$$\begin{aligned} (l_{I'} + [I', J])^{-n} &\leq (2l_I + [I, J])^{-n} = (l_I + [I, J])^{-n} \left(1 + \frac{l_I}{l_I + [I, J]}\right)^{-n} \\ &\leq (l_I + [I, J])^{-n} \left(1 - \frac{\frac{10}{9} l_I}{l_I + [I, J]}\right) \\ &< (l_I + [I, J])^{-n} - \frac{l_I}{(2[I, J])^{n+1}}, \\ (l_{I'} + [I', J])^{-n} &\geq (3l_I + [I, J])^{-n} = (l_I + [I, J])^{-n} \left(1 + \frac{2l_I}{l_I + [I, J]}\right)^{-n} \\ &> (l_I + [I, J])^{-n} \left(1 - \frac{2nl_I}{l_I + [I, J]}\right) \\ &> (l_I + [I, J])^{-n} - \frac{2nl_I}{[I, J]^{n+1}}, \\ \Phi_{I'J} + 2^{-n-1} \Gamma_{IJ}^{(1,n)} &\leq \Phi_{IJ} \leq \Phi_{I'J} + 2n \Gamma_{IJ}^{(1,n)}. \end{aligned}$$

Умножая на c_J и суммируя по J , получаем (18c) с $b_3 = 2^{-n-1}$ и $b_4 = 2n$. $\square$

Замечание. Следствием оценок (18a), (18b) и (18c) является то, что либо все ряды S_I сходятся, либо все они расходятся.

2.4. Оценка суммы $\sum_{J \in \mathcal{D}} e^{\vartheta S_J} \Gamma_{IJ}^{(1,n)} c_J$. Дополним (17) до предположения:

(17') даны $\vartheta \geq 0$, $M \geq 0$ и $c_J \geq 0$ такие, что $\vartheta M \leq b_5$ и $c_J \leq M$ при $J \in \mathcal{D}$.

Здесь b_5 — постоянная из (18d).

Лемма 13. Пусть $0 \leq \tau \leq 1/2$, $a \geq 1$ и справедливо (17'), причем ряды S_I сходятся. Тогда для любых $I, K \in \mathcal{D}$

$$\sum_{J \in \mathcal{D}: J \subset K, [I, J] \geq [I, K]/a} e^{\vartheta S_J} \Gamma_{IJ}^{(1-\tau, n-\tau)} \leq C(n) a^{n+1} e^{\vartheta S_K} \Gamma_{IK}^{(1-\tau, n-\tau)}.$$

Доказательство. В силу (18с), (18а) и (17')

$$\vartheta(S_J - S_{J'}) \leq \vartheta b_4 T_J \leq \vartheta b_4 b_1 M \leq 1/4.$$

Математическая индукция показывает, что

$$(19) \quad e^{\vartheta S_J} \leq e^{\vartheta S_K} \left(\frac{l_J}{l_K} \right)^{-\frac{1}{4 \ln 2}}$$

при $J \subset K$. Если к тому же $[I, J] \geq [I, K]/a$, то

$$(20) \quad \Gamma_{IJ}^{(1-\tau, n-\tau)} = l_I^{1-\tau} l_J^{n-\tau} [I, J]^{2\tau-1-n} \leq a^{n+1} \left(\frac{l_J}{l_K} \right)^{n-\tau} \Gamma_{IK}^{(1-\tau, n-\tau)} \\ \leq a^{n+1} \left(\frac{l_J}{l_K} \right)^{n-\frac{1}{2}} \Gamma_{IK}^{(1-\tau, n-\tau)}.$$

Лемма 13 следует из того, что $n - \frac{1}{2} - \frac{1}{4 \ln 2} > n - 1$, а значит,

$$\sum_{J: J \subset K} \left(\frac{l_J}{l_K} \right)^{n-\frac{1}{2}-\frac{1}{4 \ln 2}} = C(n) < \infty. \quad \square$$

Лемма 14. Пусть верно (17') и ряды S_I сходятся. Тогда для любых $I \in \mathcal{D}$ и $K \notin \mathfrak{L}_I$ имеем

$$\sum_{J \in \mathcal{D}: J \subset K} e^{\vartheta S_J} \Gamma_{IJ}^{(1,n)} c_J \leq e^{\vartheta S_{K'}} \left[\sum_{J \subset K} \Gamma_{IJ}^{(1,n)} c_J + \frac{2^{n+2} b_4 \vartheta l_I}{[I, K]^{n+1}} \sum_{J, H: J \subset H \subset K} T_H l_J^n T_J \right].$$

Доказательство. Очевидно, что если $[K, I] < 2l_K$, то $l_I \leq l_K$ и $I \in \mathfrak{D}_K$, то есть $K \in \mathfrak{L}_I$ — в противоречие с предположением. Поэтому $[I, K] \geq 2l_K$ и

$$(21) \quad [I, J] \geq [I, K] - l_K \geq [I, K]/2, \quad J \subset K.$$

Неравенства (20) (с $\tau = 0$ и $a = 2$) и $c_J \leq T_J$ показывают, что

$$(22) \quad \sum_{J \in \mathcal{D}: J \subset K} e^{\vartheta S_J} \Gamma_{IJ}^{(1,n)} c_J = e^{\vartheta S_{K'}} \sum_{J \subset K} \Gamma_{IJ}^{(1,n)} c_J + \sum_{J \subset K} [e^{\vartheta S_J} - e^{\vartheta S_{K'}}] \Gamma_{IJ}^{(1,n)} c_J \\ \leq e^{\vartheta S_{K'}} \sum_{J \subset K} \Gamma_{IJ}^{(1,n)} c_J + 2^{n+1} l_K^{-n} \Gamma_{IK}^{(1,n)} \Sigma_1,$$

где

$$\Sigma_1 = \sum_{J: J \subset K} [e^{\vartheta S_J} - e^{\vartheta S_{K'}}] l_J^n T_J.$$

Заметим, что $\Sigma_1 < \infty$, так как в силу (18а) и (19)

$$[e^{\vartheta S_J} - e^{\vartheta S_{K'}}] l_J^n T_J \leq b_1 M e^{\vartheta S_K} l_K^n \left(\frac{l_J}{l_K} \right)^{n-\frac{1}{4 \ln 2}}.$$

По неравенствам $1 - e^{-t} \leq t$, (18с), (18а) и равенству

$$\sum_{J: J \subset H} l_J^n = 2l_H^n$$

получаем

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \sum_{J, H: J \subset H \subset K} [e^{\vartheta S_H} - e^{\vartheta S_{H'}}] l_J^n T_J = \sum_{J \subset H \subset K} e^{\vartheta S_H} [1 - e^{\vartheta(S_{H'} - S_H)}] l_J^n T_J \\ &\leq \vartheta \sum_{J \subset H \subset K} e^{\vartheta S_H} (S_H - S_{H'}) l_J^n T_J \leq b_4 \vartheta \sum_{J \subset H \subset K} e^{\vartheta S_H} T_H l_J^n T_J \\ &\leq b_4 \vartheta e^{\vartheta S_{K'}} \sum_{J \subset H \subset K} T_H l_J^n T_J + \underbrace{2b_1 b_4 \vartheta M}_{\leq 1/2} \underbrace{\sum_{H \subset K} [e^{\vartheta S_H} - e^{\vartheta S_{K'}}] T_H l_H^n}_{\Sigma_1}. \end{aligned}$$

Отсюда следует оценка

$$\Sigma_1 \leq 2b_4 \vartheta e^{\vartheta S_{K'}} \sum_{J \subset H \subset K} T_H l_J^n T_J,$$

доказывающая совместно с (22) лемму 14. $\square$

Лемма 15. Если выполнено (17), то для любого $I \in \mathcal{D}$

$$\sum_{J \in \mathcal{D}} \Gamma_{IJ}^{(1,n)} T_J^2 \leq C(n) M T_I.$$

Доказательство. По теореме 2(а), неравенству Коши и теореме 2(б) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{D}} \Gamma_{JK}^{(1/2, n-1/2)} c_K &\leq M \sum_{K \in \mathcal{D}} \Gamma_{JK}^{(1/2, n-1/2)} \leq a_1(n) M, \\ T_J^2 &= \left(\sum_{K \in \mathcal{D}} \Gamma_{JK}^{(1/4, n/2-1/4)} c_K^{1/2} \cdot \Gamma_{JK}^{(3/4, n/2+1/4)} c_K^{1/2} \right)^2 \leq a_1 M \sum_{K \in \mathcal{D}} \Gamma_{JK}^{(3/2, n+1/2)} c_K, \\ \sum_{J \in \mathcal{D}} \Gamma_{IJ}^{(1,n)} T_J^2 &\leq a_1 M \sum_{K \in \mathcal{D}} c_K \sum_{J \in \mathcal{D}} \Gamma_{IJ}^{(1,n)} \Gamma_{JK}^{(3/2, n+1/2)} \\ &\leq a_1 a_2(n) M \sum_{K \in \mathcal{D}} c_K \Gamma_{IK}^{(1,n)} = C(n) M T_I. \end{aligned}$$

Лемма доказана. $\square$

Теорема 3. Пусть верно (17'), причем ряды S_I сходятся. Тогда

$$\sum_{J \in \mathcal{D}} e^{\vartheta S_J} \Gamma_{IJ}^{(1,n)} c_J \leq C(n) e^{\vartheta S_I} T_I, \quad I \in \mathcal{D}.$$

Доказательство. Занумеруем в виде $K_1, K_2, \dots$ максимальные относительно отношения включения $\subset$ элементы множества $\mathcal{D} \setminus \mathfrak{L}$, где $\mathfrak{L} \equiv \mathfrak{L}_I$. Таким образом, $K_i \notin \mathfrak{L}$, но $K_i' \in \mathfrak{L}$. Любой куб $J \in \mathcal{D}$ либо принадлежит $\mathfrak{L}$, либо содержится ровно в одном из кубов K_i . Для $H \in \mathfrak{L}$ из (18b), (18с) и (17') следует, что

$$\begin{aligned} S_H &\leq S_{I^{(k)}} + b_2 M \leq S_I + b_2 M, \quad 2^k = l_H / l_I, \\ (23) \quad e^{\vartheta S_H} &\leq D e^{\vartheta S_I}, \quad D = e^{b_2 b_5}. \end{aligned}$$

Отсюда и из леммы 14 с $K = K_i$ получаем

$$\begin{aligned}
\sum_{J \in \mathcal{D}} e^{\vartheta S_J} \Gamma_{IJ}^{(1,n)} c_J &= \sum_{J \in \mathcal{L}} e^{\vartheta S_J} \Gamma_{IJ}^{(1,n)} c_J + \sum_i \sum_{J \subset K_i} e^{\vartheta S_J} \Gamma_{IJ}^{(1,n)} c_J \\
&\leq D e^{\vartheta S_I} \left[\sum_{J \in \mathcal{L}} \Gamma_{IJ}^{(1,n)} c_J + \sum_i \left\{ \sum_{J \subset K_i} \Gamma_{IJ}^{(1,n)} c_J + \frac{2^{n+2} b_4 \vartheta l_I}{[I, K_i]^{n+1}} \sum_{J \subset H \subset K_i} T_H l_J^n T_J \right\} \right] \\
&\leq D e^{\vartheta S_I} \left[T_I + 2^{n+2} b_4 \vartheta l_I \sum_{J, H: J \subset H \notin \mathcal{L}} \frac{l_J^n T_J T_H}{[I, H]^{n+1}} \right].
\end{aligned}$$

В последнем переходе использовано то, что любому кубу $H \notin \mathcal{L}$ соответствует единственный куб $K_i \supset H$, причем $[I, K_i] \geq [I, H]$.

Обозначим сумму по J и H через Σ . По неравенству Коши

$$\begin{aligned}
\Sigma &\leq \sum_{J, H \in \mathcal{D}: J \subset H} \frac{l_J^{n/2+1/4} l_H^{-1/4}}{[I, H]^{n/2+1/2}} T_J \cdot \frac{l_J^{n/2-1/4} l_H^{1/4}}{[I, H]^{n/2+1/2}} T_H \\
&\leq \left(\sum_{J, H: J \subset H} \frac{l_J^{n+1/2} l_H^{-1/2}}{[I, H]^{n+1}} T_J^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{J, H: J \subset H} \frac{l_J^{n-1/2} l_H^{1/2}}{[I, H]^{n+1}} T_H^2 \right)^{1/2} \equiv \sqrt{\Sigma_1 \Sigma_2}.
\end{aligned}$$

Учитывая, что $[I, H] \geq [I, J]$ при $J \subset H$, получаем

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 &\leq \sum_{J \in \mathcal{D}} \frac{l_J^{n+1/2} T_J^2}{[I, J]^{n+1}} \sum_{H: J \subset H} l_H^{-1/2} = (2 + \sqrt{2}) \sum_{J \in \mathcal{D}} \frac{l_J^n T_J^2}{[I, J]^{n+1}} = \frac{2 + \sqrt{2}}{l_I} \sum_{J \in \mathcal{D}} \Gamma_{IJ}^{(1,n)} T_J^2, \\
\Sigma_2 &= \sum_{H \in \mathcal{D}} \frac{l_H^{1/2} T_H^2}{[I, H]^{n+1}} \sum_{J: J \subset H} l_J^{n-1/2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{l_I} \sum_{H \in \mathcal{D}} \Gamma_{IH}^{(1,n)} T_H^2.
\end{aligned}$$

Теорема 3 следует теперь из леммы 15 и условия $\vartheta M \leq b_5$. $\square$

2.5. Кубы $K(I, J)$ и $\mathcal{K}(I, J)$. Пусть имеет место предположение

$$(24) \quad \mathfrak{X} = \mathcal{D} \text{ или же } \mathfrak{X} = \mathfrak{D}_{\mathfrak{J}} \text{ для некоторого } \mathfrak{J} \in \mathcal{D}.$$

Для $I, J \in \mathfrak{X}$ пишем $I \odot_{\mathfrak{X}} J$, если либо $I \odot J$, либо $\mathfrak{X} = \mathfrak{D}_{\mathfrak{J}}$ и $I \odot \mathfrak{J} \odot J$. Пусть

$$\begin{aligned}
I \odot_{\mathfrak{X}} &= \{J \in \mathfrak{X}: I \odot_{\mathfrak{X}} J\}, \\
\mathfrak{L}_I^{\mathfrak{X}} &= \bigcup_{J \in \mathfrak{X}: I \subset J} J \odot_{\mathfrak{X}}.
\end{aligned}$$

Для любых $I, J \in \mathfrak{X}$ в ряду $J, J', J'', \dots$ есть кубы из $\mathfrak{L}_I^{\mathfrak{X}}$. Первый из них обозначим через $K(I, J)$. Из условия $K(I, J) \in \mathfrak{L}_I^{\mathfrak{X}}$ следует, что $l_{K(I, J)} \geq l_I$, поэтому существует единственный куб $\mathcal{K}(I, J)$ со свойствами

$$I \subset \mathcal{K}(I, J) \in \mathfrak{X}, \quad l_{\mathcal{K}(I, J)} = l_{K(I, J)}.$$

Ясно, что $\mathcal{K}(I, J) \odot_{\mathfrak{X}} \mathcal{K}(I, J)$, откуда, в частности, $\mathcal{K}(I, J) \in \mathfrak{L}_J^{\mathfrak{X}}$.

Лемма 16. Для любых $I, J \in \mathfrak{X}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ выполнены неравенства

$$(25a) \quad l_{\mathcal{K}(I, J)} = l_{K(I, J)} \leq 2\langle I, J \rangle, \quad \text{если } I \neq \mathcal{K}(I, J) \text{ и } J \neq K(I, J),$$

$$(25b) \quad l_{\mathcal{K}(I, J)} = l_{K(I, J)} \leq 2[I, J],$$

$$(25c) \quad [I, J] \leq 3l_{\mathcal{K}(I, J)},$$

$$(25d) \quad \Gamma_{IJ}^{(\alpha, \beta)} \leq \max\{2^{\alpha+\beta}, 3^{-\alpha-\beta}\} l_I^{\alpha} l_J^{\beta} l_{\mathcal{K}(I, J)}^{-\alpha-\beta},$$

$$(25e) \quad [I, K(I, J)] \leq 3[I, J].$$

Доказательство. Если выполнена предпосылка в (25а), то существуют такие кубы $I_1, J_1 \in \mathfrak{X}$, что

$$2l_{I_1} = l_{\mathcal{K}(I, J)} = l_{K(I, J)} = 2l_{J_1}, \quad I \subset I_1 \subsetneq \mathcal{K}(I, J), \quad J \subset J_1 \subsetneq K(I, J).$$

Если $\langle I_1, J_1 \rangle < l_{I_1}$, то $I_1 \odot J_1$, $J_1 \in \mathfrak{L}_I$ и $J_1 \in \mathfrak{L}_I^{\mathfrak{X}}$ в противоречие с определением куба $K(I, J)$, поэтому $\langle I_1, J_1 \rangle \geq l_{I_1}$. Из вложений $I \subset I_1$ и $J \subset J_1$ получаем $\langle I, J \rangle \geq \langle I_1, J_1 \rangle$, что доказывает (25а).

Если $I = \mathcal{K}(I, J)$ или $J = K(I, J)$, то оценка $\max\{l_I, l_J\} \leq [I, J]$ влечет (25b). В противном случае (25b) следует из (25а) и неравенства $\langle I, J \rangle \leq [I, J]$.

Неравенства $[I, J] \leq [\mathcal{K}(I, J), K(I, J)] \leq 3l_{\mathcal{K}(I, J)}$ доказывают (25с).

Неравенство (25d) следует из (25b) и (25с).

Если $I = \mathcal{K}(I, J)$, то (25е) следует из соотношений

$$[I, K(I, J)] = [\mathcal{K}(I, J), K(I, J)] \leq 3l_{\mathcal{K}(I, J)} = 3l_I \leq 3[I, J].$$

Если $J = K(I, J)$ или $I = K(I, J)$, то (25е) тривиально. Пусть $I \neq \mathcal{K}(I, J)$, $J \neq K(I, J)$ и $I \neq K(I, J)$. Тогда кубы I и J не пересекаются, поскольку при $I \subset J$ или $J \subset I$ имеем $K(I, J) = J$ или $K(I, J) = I$ соответственно. В силу вложения $J \subset K(I, J)$ и (25а)

$$[I, K(I, J)] \leq l_I + \langle I, K(I, J) \rangle + l_{K(I, J)} \leq l_I + 3\langle I, J \rangle < 3[l_I + \langle I, J \rangle + l_J].$$

Правая часть равна $3[I, J]$ ввиду $I \cap J = \emptyset$, что доказывает (25е). $\square$

2.6. Оценка суммы $\sum_{J \in \mathfrak{X}} e^{\vartheta S_J} \Gamma_{IJ}^{(1, n)} a_{IJ}$. Пусть имеет место предположение

$$(24') \quad \begin{cases} \text{для } J \in \mathfrak{X} \text{ заданы числа } c_J, 0 \leq c_J \leq M < \infty, \text{ где} \\ \mathfrak{X} = \mathcal{D} \text{ или же } \mathfrak{X} = \mathfrak{D}_{\mathfrak{J}} \text{ для некоторого } \mathfrak{J} \in \mathcal{D}. \end{cases}$$

Положим $c_J = 0$ при $J \in \mathcal{D} \setminus \mathfrak{X}$. Тогда верно (17), что дает возможность определить числа S_I и T_I , для которых верны утверждения разделов 2.3 и 2.4.

Для $I, J \in \mathfrak{X}$ положим

$$X(I, J) = \begin{cases} \{H \in \mathfrak{X}: I \subset H \subset \mathcal{K}(I, J)\} \cup \{\mathfrak{J}, K(I, J)\}, & \mathfrak{X} = \mathfrak{D}_{\mathfrak{J}} \text{ и } K(I, J) \odot \mathfrak{J}, \\ \{H \in \mathfrak{X}: I \subset H \subset \mathcal{K}(I, J)\} \cup \{K(I, J)\} & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$Y(I, J) = \{H \in \mathfrak{X}: J \subset H \subsetneq K(I, J)\},$$

$$a_{IJ} = \sum_{H \in X(I, J) \cup Y(I, J)} c_H.$$

Мощность множества $X(I, J) \cup Y(I, J)$ не превосходит $\log_2 \frac{l_{\mathcal{K}(I, J)}}{l_I} + 3 + \log_2 \frac{l_{K(I, J)}}{l_J}$. Поэтому для любого $\tau > 0$ с учетом (24') и (25b) выводим, что

$$\begin{aligned} a_{IJ} &\leq \left[\log_2 \frac{l_{\mathcal{K}(I, J)}}{l_I} + 3 + \log_2 \frac{l_{K(I, J)}}{l_J} \right] M \leq C_0(\tau) \left[\left(\frac{l_{\mathcal{K}(I, J)}}{l_I} \right)^{\tau} + \left(\frac{l_{K(I, J)}}{l_J} \right)^{\tau} \right] M \\ &\leq 2^{\tau} C_0 \left[\left(\frac{[I, J]}{l_I} \right)^{\tau} + \left(\frac{[I, J]}{l_J} \right)^{\tau} \right] M \leq 2^{\tau+1} C_0 \Gamma_{IJ}^{(-\tau, -\tau)} M, \end{aligned}$$

$$(26) \quad a_{IJ} \leq C(\tau) M \Gamma_{IJ}^{(-\tau, -\tau)}.$$

Усилим теорему 3. Обобщим (17') до предположения

$$(24'') \quad \text{выполнено (24')} \text{ и дано } \vartheta \geq 0 \text{ такое, что } \vartheta M \leq b_5.$$

Теорема 4. Пусть верно (24''), причем ряды S_I сходятся. Тогда

$$\sum_{J \in \mathfrak{X}} e^{\vartheta S_J} \Gamma_{IJ}^{(1,n)} a_{IJ} \leq C(n) e^{\vartheta S_I} T_I, \quad I \in \mathfrak{X}.$$

Доказательство. Меняя порядок суммирования, получаем

$$\sum_{J \in \mathfrak{X}} e^{\vartheta S_J} \Gamma_{IJ}^{(1,n)} a_{IJ} = \sum_{H \in \mathfrak{X}} c_H \left[\sum_{J \in \mathfrak{X}: H \in X(I, J) \cup Y(I, J)} e^{\vartheta S_J} \Gamma_{IJ}^{(1,n)} \right] \equiv \sum_{H \in \mathfrak{X}} c_H \Sigma_H.$$

Пусть $H \notin \mathfrak{L}_I^{\mathfrak{X}}$ и $H \in X(I, J) \cup Y(I, J)$. Из $X(I, J) \subset \mathfrak{L}_I^{\mathfrak{X}}$ имеем $H \in Y(I, J)$, так что $J \subset H \subsetneq K(I, J)$. По определению куба $K(I, J)$ получаем $H \notin \mathfrak{L}_I$. Соотношение (21) с $K = H$ и лемма 13 с $\tau = 0$ и $a = 2$ дают оценку

$$\Sigma_H \leq \sum_{J: J \subset H, [I, J] \geq [I, H]/2} e^{\vartheta S_J} \Gamma_{IJ}^{(1,n)} \leq C_1 e^{\vartheta S_H} \Gamma_{IH}^{(1,n)},$$

где через C_i будем обозначать постоянные, зависящие только от n .

Пусть $H \in \mathfrak{L}_I^{\mathfrak{X}}$ и $H \in X(I, J) \cup Y(I, J)$. Из $Y(I, J) \cap \mathfrak{L}_I^{\mathfrak{X}} = \emptyset$ следует, что $H \in X(I, J)$, откуда $l_H \leq l_{K(I, J)}$. Поэтому

$$\Sigma_H \leq \sum_{K \in \mathfrak{L}_I^{\mathfrak{X}}: l_K \geq l_H} \left[\sum_{J \in \mathfrak{X}: K(I, J) = K} e^{\vartheta S_J} \Gamma_{IJ}^{(1,n)} \right] \equiv \sum_{K \in \mathfrak{L}_I^{\mathfrak{X}}: l_K \geq l_H} \Sigma_{H, K}.$$

Из вложения $J \subset K(I, J)$, неравенства (25е) и леммы 13

$$\Sigma_{H, K} \leq \sum_{J \in \mathfrak{X}: J \subset K, [I, J] \geq [I, K]/3} e^{\vartheta S_J} \Gamma_{IJ}^{(1,n)} \leq C_2 e^{\vartheta S_K} \Gamma_{IK}^{(1,n)}.$$

Аналогично (23) получаем $e^{\vartheta S_K} \leq C_3 e^{\vartheta S_H}$ при $K, H \in \mathfrak{L}_I^{\mathfrak{X}}$ и $l_K \geq l_H$. Отсюда ввиду сравнимости $\Gamma_{IK}^{(1,n)}$ с $\frac{l_I}{l_K}$ при $K \in \mathfrak{L}_I^{\mathfrak{X}}$ заключаем, что

$$\Sigma_H \leq C_2 C_3 e^{\vartheta S_H} \sum_{K \in \mathfrak{L}_I^{\mathfrak{X}}: l_K \geq l_H} \Gamma_{IK}^{(1,n)} \leq C_4 e^{\vartheta S_H} \Gamma_{IH}^{(1,n)}.$$

Теорема 3 позволяет завершить доказательство:

$$\sum_{J \in \mathfrak{X}} e^{\vartheta S_J} \Gamma_{IJ}^{(1,n)} a_{IJ} \leq \max\{C_1, C_4\} \sum_{H \in \mathfrak{X}} c_H e^{\vartheta S_H} \Gamma_{IH}^{(1,n)} \leq C_5 e^{\vartheta S_I} T_I. \quad \square$$

2.7. Оценка сумм $\sum_{J \in \mathfrak{X}} \Gamma_{IJ}^{(1,n)} a_{IJ} F_J$ и $\sum_{J \in \mathfrak{X}} \Gamma_{IJ}^{(1,n)} a_{IJ} W_J$. Пусть для $K \in \mathcal{D}$ заданы числа $f_K \geq 0$. Для $0 < \sigma < 1$ и $J \in \mathfrak{X}$ положим

$$F_J = \sum_{K \in \mathcal{D}} \Gamma_{JK}^{(1-\sigma, n-\sigma)} f_K,$$

$$W_J = \sum_{K \in \mathfrak{X}: J \subset K} e^{\vartheta(S_J - S_K)} F_K.$$

Теорема 5. Пусть верно (24'') и ряды S_I сходятся. Тогда для любого $I \in \mathfrak{X}$

$$(27a) \quad \sum_{J \in \mathfrak{X}} \Gamma_{IJ}^{(1,n)} a_{IJ} F_J \leq C_1 M F_I,$$

$$(27b) \quad \sum_{J \in \mathfrak{X}} \Gamma_{IJ}^{(1,n)} a_{IJ} W_J \leq C_2 [M F_I + T_I W_I],$$

где C_i — положительные постоянные, зависящие только от n и σ .

Доказательство. Из (26) с $\tau = \sigma/2$ и теоремы 2(b) выводим оценку (27a):

$$\begin{aligned} \sum_{J \in \mathfrak{X}} \Gamma_{IJ}^{(1,n)} a_{IJ} F_J &\leq C_3 M \sum_{J \in \mathfrak{X}} \Gamma_{IJ}^{(1-\sigma/2, n-\sigma/2)} F_J \\ &= C_3 M \sum_{K \in \mathcal{D}} f_K \sum_{J \in \mathfrak{X}} \Gamma_{IJ}^{(1-\sigma/2, n-\sigma/2)} \Gamma_{JK}^{(1-\sigma, n-\sigma)} \\ &\leq C_3 M C_4 \sum_{K \in \mathcal{D}} f_K \Gamma_{IK}^{(1-\sigma, n-\sigma)} = C_1 M F_I. \end{aligned}$$

Поменяем еще раз порядок суммирования:

$$\sum_{J \in \mathfrak{X}} \Gamma_{IJ}^{(1,n)} a_{IJ} W_J = \sum_{K \in \mathfrak{X}} e^{-\vartheta S_K} F_K \underbrace{\sum_{J \in \mathfrak{X}: J \subset K} e^{\vartheta S_J} \Gamma_{IJ}^{(1,n)} a_{IJ}}_{\Sigma_K}.$$

Заметим, что $\Sigma_K \leq C_5 e^{\vartheta S_I} T_I$ по теореме 4. Если $k \geq 0$ и $K \odot H \equiv I^{(k)}$, то из (18b) и (14) легко выводим, что $e^{-\vartheta S_K} F_K \leq C_6 e^{-\vartheta S_H} F_H$, поэтому

$$\sum_{K \in \mathfrak{X} \cap \mathfrak{L}_I} e^{-\vartheta S_K} F_K \Sigma_K \leq 3^{n-1} C_5 C_6 e^{\vartheta S_I} T_I \sum_{H \in \mathfrak{X}: I \subset H} e^{-\vartheta S_H} F_H = C_7 T_I W_I.$$

Если $K \in \mathfrak{X} \setminus \mathfrak{L}_I$, то в силу (21), леммы 13 и вывода формулы (27a)

$$\begin{aligned} \Sigma_K &\leq C_3 M \sum_{J: J \subset K, [I, J] \geq [I, K]/2} e^{\vartheta S_J} \Gamma_{IJ}^{(1-\sigma/2, n-\sigma/2)} \leq C_8 M e^{\vartheta S_K} \Gamma_{IK}^{(1-\sigma/2, n-\sigma/2)}, \\ \sum_{K \in \mathfrak{X} \setminus \mathfrak{L}_I} e^{-\vartheta S_K} F_K \Sigma_K &\leq C_8 M \sum_{K \in \mathfrak{X}} \Gamma_{IK}^{(1-\sigma/2, n-\sigma/2)} F_K \leq C_8 M C_4 F_I. \end{aligned}$$

Отсюда следует оценка (27b) с постоянной $C_2 = \max\{C_7, C_8 C_4\}$. $\square$

3. ДИСКРЕТНАЯ $W_w^{2,p}$ -ОЦЕНКА В ОБРАЗЕ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

3.1. Параметризация и замена переменной. Для $\mathfrak{J} \in \mathcal{D}$ положим

$$\begin{aligned} Q &= \overline{3\mathfrak{J}} \times [0, 2l_{\mathfrak{J}}], \\ S &= \overline{3\mathfrak{J}} \times \{0\}, \\ \mathfrak{X} &= \mathfrak{D}_{\mathfrak{J}}. \end{aligned}$$

Ясно, что

$$(28) \quad Q \setminus S = \bigcup_{I \in \mathfrak{X}} I^{\square}.$$

Определение 5. При $\mathfrak{J} \in \mathcal{D}$ и $\kappa \geq 1$ через $\Xi(\mathfrak{J}, \kappa)$ обозначается множество всех евклидово билипшицевых гомеоморфизмов g с областью определения Q , постоянной билипшицевости не более κ и имеющих вид

$$g(x) = (x', g_n(x)), \quad x \in Q,$$

с возрастающей по x_n функцией g_n . Если $g_n \in C^k(Q \setminus S)$ для целого $k \geq 1$ или $k = \infty$, то пишем $g \in \Xi^k(\mathfrak{J}, \kappa)$.

В разделе 1.5 были намечены базовые результаты о билипшицевой замене переменных в пространствах L_w^p и $W_w^{1,p}$. Чтобы обсудить поведение при замене переменных вторых производных, введём сопутствующие определению 5 обозначения

$$\begin{aligned} Q_\star &= g(Q), \\ S_\star &= g(S), \\ \mathfrak{g} &= g^{-1} : Q_\star \rightarrow Q. \end{aligned}$$

Ясно, что существует такая липшицева функция $\mathfrak{G} : Q_\star \rightarrow \mathbb{R}$, что

$$\mathfrak{g}(y) = (y', \mathfrak{G}(y)), \quad y \in Q_\star,$$

причем $\mathfrak{G} \in C^k(Q_\star \setminus S_\star)$ для $g \in \Xi^k(\mathcal{I}, \kappa)$. Из тождеств

$$\begin{aligned} x_n &= \mathfrak{G}(x', g_n(x', x_n)), \\ y_n &= g_n(y', \mathfrak{G}(y', y_n)) \end{aligned}$$

легко выводится

Лемма 17. Для гомеоморфизма $g \in \Xi^2(\mathcal{I}, \kappa)$ и $I \in \mathfrak{X}$ пусть

$$\begin{aligned} \widehat{c}_I &= l_I \|\nabla^2 g_n\|_{L^\infty(I^\square)}, \\ c_I &= l_I \|\nabla^2 \mathfrak{G}\|_{L^\infty(g(I^\square))}. \end{aligned}$$

Тогда имеют место неравенства

$$\widehat{c}_I \leq c(\kappa) c_I, \quad c_I \leq c(\kappa) \widehat{c}_I.$$

Так же легко проверяется, для определённой во внутренней области $Q_\star^\circ$ компакта $Q_\star$ функции $u_\star$ с лапласианом

$$f_\star = \Delta u_\star,$$

следующая связь между функциями $f = f_\star(g)$ и $u = u_\star(g)$:

$$(29) \quad f = \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + 2 \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial y_i}(g) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_n} \right\} + |\nabla_y \mathfrak{G}(g)|^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} + (\Delta_y \mathfrak{G}(g)) \frac{\partial u}{\partial x_n}.$$

При $u_\star \in W_{\text{loc}}^{2,1}(Q_\star \setminus S_\star)$ формальные выкладки законны, если $g \in \Xi^2(\mathcal{I}, \kappa)$.

3.2. Дополнительные сведения о весах Макенхаупта в Q . Вес $v(x) = x_n^\gamma$ для любого $\gamma \in \mathbb{R}$ принадлежит к $A_p(Q, S)_1$. При $\gamma \leq -1$ метод продолжения из леммы 3 приводит к функции с неинтегрируемыми особенностями, поэтому для получения весов из $A_p^{\text{comp}}(\mathbb{R}_+^n)$ этот метод надо изменить.

Лемма 18. Для любого веса $v \in A_p(Q, S)_1$ существует вес $w \in A_p^{\text{comp}}(\mathbb{R}_+^n)$ такой, что $w|_{Q^\circ} = v$ и $A_p[w] \leq c(n, p, \theta)$ при $\theta \geq A_p[v]$.

Доказательство. Можно считать, что $l_\mathcal{I} = 1$. Параллелепипед Q порождает решетку в $\mathbb{R}^n$. Используя её $(n-1)$ -мерные грани, параллельные оси x_n , продолжим v , как в лемме 3, до функции $w \succ 0$ в полосе $0 < x_n < 2$ с периодом 6 по переменным $x_1, \dots, x_{n-1}$. Положим функцию w равной нулю на плоскостях $x_n = 2, 3, \dots$ и, отправляясь от её значений только в полосе $1 < x_n < 2$, отразим её четным образом относительно этих плоскостей. Получаем функцию $w \succ 0$ на $\mathbb{R}_+^n$ с периодом 6 по $x_1, \dots, x_{n-1}$ в $\mathbb{R}_+^n$ и периодом 2 по x_n в области $x_n > 1$.

Возьмём произвольный куб $Q \subset \mathbb{R}_+^n$ с ребром $\ell(Q) \leq \text{dist}(Q, \partial\mathbb{R}_+^n)$. Тогда выполнено хотя бы одно из условий $Q \subset \{0 < x_n \leq 2\}$ и $Q \subset \{x_n > 1\}$. Случай $\ell(Q) \leq 1$ разбирается аналогично лемме 3. Пусть $\ell(Q) > 1$ и, следовательно, $Q \subset \{x_n > 1\}$. Из леммы 2(iii) легко выводится, что величины

$$|I \times [1, 2]|_v, \quad I \in \mathfrak{I}_\odot,$$

сравнимы между собой с постоянными, зависящими только от n , p и θ ; этот же факт справедлив по отношению к величинам $|I \times [1, 2]|_{v'}$, где $v' = v^{-\frac{1}{p-1}}$. Неравенство

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w \, dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{-\frac{1}{p-1}} \, dx \right)^{p-1} \leq c(n, p, \theta)$$

получается теперь (как в лемме 1.1 из [76]) через покрытие куба Q сдвигами куба $[0, 1]^n$ на целочисленные вектора. $\square$

Пусть $w \in A_p(Q, S)_1$. В силу (28) для $f \in L_{w, \text{loc}}^p(Q \setminus S)$ можно говорить о средних $\|f\|_I$ при $I \in \mathfrak{X}$.

Лемма 19. *Если функция $u \in W_{w, \text{loc}}^{2,p}(Q \setminus S)$ для некоторого $0 < t < 2l_\mathfrak{I}$ равна нулю в полоске $\mathfrak{I} \times [t, 2l_\mathfrak{I}]$, то для любого $I \in \mathfrak{X}$ выполнено неравенство*

$$\|\nabla u\|_I \leq \|\nabla u\|_{I'} + cl_I \left[\|\nabla^2 u\|_I + \|\nabla^2 u\|_{I'} \right],$$

где величины $\|\nabla u\|_{I'}$ и $\|\nabla^2 u\|_{I'}$ при $I \odot \mathfrak{I}$ считаются равными нулю, а $c > 0$ зависит только от n , p и верхней границы θ для $A_p[w]$.

Доказательство. Пусть сначала $I \notin \mathfrak{I}_\odot$. Рассмотрим открытые кубы

$$Q_0 = I^\circ \times (l_I, 2l_I), \quad Q_1 = I^\circ \times (3l_I/2, 5l_I/2), \quad Q_2 = (I')^\circ \times (2l_I, 4l_I)$$

и, для множеств $E \Subset Q \setminus S$ положительной меры, средние

$$\|f\|_E = \left(\frac{1}{|E|_w} \int_E |f|^p w \, dx \right)^{1/p}.$$

Для $i = 0, 1, 2$ в силу неравенства $\ell(Q_i) \leq \text{dist}(Q_i, S)$ имеем $w \in A_p(Q_i)$ с постоянными Макенхаупта $A_p[w] \leq \theta$. Пусть $C > 0$ и многочлены π_i степени не выше первой найдены по лемме 4 с $m = 2$ и $B = Q_i$. Тогда

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_I &= \|\nabla u\|_{Q_0} \leq \|\nabla(u - \pi_0)\|_{Q_0} + \|\nabla \pi_0\|_{Q_0}, \\ \|\nabla \pi_0\|_{Q_0} &= \|\nabla \pi_0\|_{Q_0 \cap Q_1} \\ &\leq \|\nabla(u - \pi_0)\|_{Q_0 \cap Q_1} + \|\nabla(u - \pi_1)\|_{Q_0 \cap Q_1} + \|\nabla \pi_1\|_{Q_0 \cap Q_1}, \\ \|\nabla \pi_1\|_{Q_0 \cap Q_1} &= \|\nabla \pi_1\|_{Q_1 \cap Q_2} \\ &\leq \|\nabla(u - \pi_1)\|_{Q_1 \cap Q_2} + \|\nabla(u - \pi_2)\|_{Q_1 \cap Q_2} + \|\nabla \pi_2\|_{Q_1 \cap Q_2}, \\ \|\nabla \pi_2\|_{Q_1 \cap Q_2} &= \|\nabla \pi_2\|_{Q_2} \\ &\leq \|\nabla(u - \pi_2)\|_{Q_2} + \|\nabla u\|_{Q_2} = \|\nabla(u - \pi_2)\|_{Q_2} + \|\nabla u\|_{I'}. \end{aligned}$$

По лемме 2(iii) имеем $w \in D(Q, S)_1$, поэтому для некоторого $b = b(n, p, \theta) > 0$

$$|Q_0|_w \leq b|Q_0 \cap Q_1|_w, \quad |Q_2|_w \leq b|Q_1 \cap Q_2|_w.$$

Отсюда, из леммы 4 и из вложения $Q_1 \subset \overline{Q_0 \cup Q_2}$

$$\|\nabla u\|_I - \|\nabla u\|_{I'} \leq (1 + b^{1/p})|Q_0|_w^{-1/p} \|\nabla(u - \pi_0)\|_{L_w^p(Q_0)}$$

$$\begin{aligned}
& + b^{1/p} \{ |Q_0|_w^{-1/p} + |Q_2|_w^{-1/p} \} \| \nabla(u - \pi_1) \|_{L_w^p(Q_1)} \\
& + (b^{1/p} + 1) |Q_2|_w^{-1/p} \| \nabla(u - \pi_2) \|_{L_w^p(Q_2)} \\
& \leq c_1(n, p, \theta) l_I \{ |Q_0|_w^{-1/p} + |Q_2|_w^{-1/p} \} \{ \| \nabla^2 u \|_{L_w^p(Q_0)} + \| \nabla^2 u \|_{L_w^p(Q_2)} \}.
\end{aligned}$$

Используя сравнимость величин $|Q_0|_w$ и $|Q_2|_w$, вытекающую из утверждения $w \in D(Q, S)_1$, получаем требуемое в лемме 19 неравенство.

Случай $I \odot \mathfrak{J}$ разбирается аналогично, если w продолжить до веса

$$w \in A_p^{\text{comp}}(\mathbb{R}_+^n)$$

по лемме 18, а функцию u продолжить нулём на $\overline{3\mathfrak{J}} \times (2l_{\mathfrak{J}}, \infty)$. $\square$

3.3. Дискретная $W_w^{2,p}$ -оценка в Q_* . В следующей теореме фигурирует γ_0^* — оператор следа $W^{1,1}(Q^\circ) \rightarrow L^1(\overline{3\mathfrak{J}})$ такой, что для $u \in C(Q)$

$$\gamma_0^* u(\xi) = u(\xi, 0), \quad \xi \in \overline{3\mathfrak{J}}.$$

Он строится аналогично оператору $\gamma_0 : W^{1,1}(\mathbb{R}_+^n) \rightarrow L^1(\mathbb{R}^{n-1})$, см. [2, 18.14].

Теорема 6. Для любых вещественных чисел

$$1 < p < \infty, \quad \theta \geq 1, \quad \kappa \geq 1, \quad 0 < \sigma < 1$$

найдутся (зависящие еще и от n) положительные числа M , ϑ , μ_0 , μ_1 и μ_2 , для которых имеет место следующее утверждение.

Пусть даны

- $\mathfrak{J} \in \mathcal{D}$
- $w \in A_p(Q, S)_1$
- $g \in \Xi^2(\mathfrak{J}, \kappa)$
- $u \in W^{1,1}(Q^\circ)$
- $f \in L_{w, \text{loc}}^p(Q \setminus S)$

такие, что выполнены соотношения

$$\begin{aligned}
(30) \quad & A_p[w] \leq \theta, \\
& c_I \equiv l_I \| \nabla^2 \mathfrak{G} \|_{L^\infty(g(I^\square))} \leq M, \quad I \in \mathfrak{X}, \\
& \gamma_0^* u = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(31) \quad & \int_Q x_n^{-\sigma} |\nabla u| dx + \sum_{I \in \mathfrak{X}} l_I^{n+1-\sigma} \|f\|_I < \infty, \\
& \Delta u_* = f_* \quad \text{в } \mathcal{D}'(Q_*^\circ),
\end{aligned}$$

где $u_* \equiv u(\mathfrak{g})$ и $f_* \equiv f(\mathfrak{g})$. Тогда

$$\mathcal{A} \equiv l_{\mathfrak{J}}^{2\sigma-n-2} \int_Q x_n^{-\sigma} |u| dx < \infty,$$

при $I \in \mathfrak{X}$ определены числа

$$\begin{aligned}
S_I &= \sum_{J \in \mathfrak{X}} \left(\frac{l_J}{l_I + [I, J]} \right)^n c_J, \\
T_I &= \sum_{J \in \mathfrak{X}} \Gamma_{IJ}^{(1,n)} c_J, \\
F_I &= \mu_0 l_I^{1-\sigma} \mathcal{A} + \sum_{J \in \mathfrak{X}} \Gamma_{IJ}^{(1-\sigma, n-\sigma)} l_J \|f\|_J,
\end{aligned}$$

$$W_I = \sum_{J \in \mathfrak{X}: I \subset J} F_J e^{\vartheta(S_I - S_J)},$$

а функция u принадлежит $W_{w, \text{loc}}^{2,p}(Q^\circ)$ и удовлетворяет при $I \subsetneq \mathfrak{I}$ оценкам

$$(32a) \quad \|\nabla u\|_I \leq \mu_1 W_I,$$

$$(32b) \quad l_I \|\nabla^2 u\|_I \leq \mu_2 \left[F_I + M^{-1} T_I W_I \right].$$

Доказательство. Значения постоянных M , ϑ и μ_i будут определены в ходе доказательства. Приступим к проверке остальных утверждений теоремы.

Сходимость интеграла $\mathcal{A}$ следует из плотности $C^\infty(Q)$ в $W^{1,1}(Q^\circ)$, формулы Ньютона-Лейбница и условия $0 < \sigma < 1$. Числа S_I конечны ввиду оценки

$$S_I \leq (2l_I)^{-n} M \sum_{J \in \mathfrak{X}} l_J^n < \infty.$$

Конечность T_I известна из (18a). Конечность F_I следует из (31) и оценки

$$\sum_{J \in \mathfrak{X}} \Gamma_{IJ}^{(1-\sigma, n-\sigma)} l_J \|f\|_J \leq \sum_{J \in \mathfrak{X}} \Gamma_{IJ}^{(0, n-\sigma)} l_J \|f\|_J \leq l_I^{\sigma-n} \sum_{J \in \mathfrak{X}} l_J^{n+1-\sigma} \|f\|_J.$$

Числа W_I задаются конечными суммами.

Из леммы 9 с $E = Q_\star$, $F = S_\star$, $h = \mathfrak{g}$, $G = Q$, $H = S$, $\delta_0 = 1/2$ и $\delta_1 = 1$ следует, что

$$(33) \quad w_\star \equiv w(\mathfrak{g}) \in A_p(Q_\star, S_\star)_1.$$

Для произвольной точки $y \in Q_\star^\circ$ существует столь малый открытый куб B , что $y \in B$ и $w_\star \in A_p(2B)$. Билипшицевость g показывает, что $u_\star \in W^{1,1}(Q_\star^\circ)$ и $f_\star \in L_{w_\star, \text{loc}}^p(Q_\star \setminus S_\star)$. Отсюда $u_\star \in W_{w_\star}^{2,p}(B)$ по лемме 5 и $u \in W_{w_\star}^{2,p}(\mathfrak{g}(B))$ ввиду $g \in \Xi^2(\mathfrak{I}, \kappa)$. Множества $\mathfrak{g}(B)$ исчерпывают Q° , когда y пробегает $Q_\star^\circ$, поэтому

$$(34) \quad u_\star \in W_{w_\star, \text{loc}}^{2,p}(Q_\star^\circ) \subset W_{\text{loc}}^{2,1}(Q_\star^\circ), \quad u \in W_{w, \text{loc}}^{2,p}(Q^\circ) \subset W_{\text{loc}}^{2,1}(Q^\circ).$$

Будем через C_i обозначать положительные постоянные, зависящие только от n, p, θ, κ и σ . Возьмём функцию $\varphi \in C^2(Q)$, равную 1 в $(\frac{1}{3}l_{\mathfrak{I}})$ -окрестности $\mathcal{I}^*$ множества

$$\mathcal{I} = \bar{\mathfrak{I}} \times [0, l_{\mathfrak{I}}],$$

равную 0 в $(\frac{1}{3}l_{\mathfrak{I}})$ -окрестности множества $\partial Q \setminus S$ и обладающую свойствами

$$(35) \quad 0 \leq \varphi \leq 1, \quad l_{\mathfrak{I}} |\nabla \varphi| + l_{\mathfrak{I}}^2 |\nabla^2 \varphi| \leq C_1.$$

Функция $\varphi_\star \equiv \varphi(\mathfrak{g})$ липшицева и $\varphi_\star \in C^2(Q_\star \setminus S_\star)$ ввиду условия $g \in \Xi^2(\mathfrak{I}, \kappa)$. Соотношения (35), дифференцирование, неравенства $l_I \leq l_{\mathfrak{I}}$ и (30) дают

$$(36) \quad 0 \leq \varphi_\star \leq 1, \quad l_{\mathfrak{I}} \|\nabla \varphi_\star\|_{L^\infty(g(I^\square))} + l_{\mathfrak{I}} l_I \|\nabla^2 \varphi_\star\|_{L^\infty(g(I^\square))} \leq C_2 \quad (I \in \mathfrak{X}),$$

если выполнено предположение

$$(37) \quad M \leq 1.$$

Положим

$$\begin{aligned} \hat{u}_\star &= \varphi_\star u_\star, & \hat{u} &= \hat{u}_\star(g), \\ \hat{f}_\star &= \Delta \hat{u}_\star, & \hat{f} &= \hat{f}_\star(g). \end{aligned}$$

Отметим, что в силу (34)

$$\hat{u}_\star \in W_{w_\star, \text{loc}}^{2,p}(Q_\star \setminus S_\star) \subset W_{\text{loc}}^{2,1}(Q_\star \setminus S_\star), \quad \hat{u} \in W_{w, \text{loc}}^{2,p}(Q \setminus S) \subset W_{\text{loc}}^{2,1}(Q \setminus S).$$

Из условий $u \in W^{1,1}(Q^\circ)$ и $\gamma_0^* u = 0$ следует, что

$$\hat{u} = \varphi u \in W^{1,1}(Q^\circ), \quad \gamma_0^* \hat{u} = 0.$$

Продолжая $\hat{u}$ нулём на $\mathbb{R}_+^n \setminus Q^\circ$, получаем функцию

$$\hat{u} \in W^{1,1}(\mathbb{R}_+^n), \quad \gamma_0 \hat{u} = 0.$$

Установим соотношение

$$(38) \quad \sum_{I \in \mathfrak{X}} l_I^{n+1-\sigma} \|\nabla^2 \hat{u}\|_I < \infty.$$

Формула $\hat{u} = \hat{u}_*(g)$, лемма 17, (30) и (37) показывают, что п.в. в $I^\square$

$$|\nabla^2 \hat{u}| \leq C_3 \left[|\nabla^2 \hat{u}_*| + l_I^{-1} |\nabla \hat{u}_*| \right] (g).$$

Отсюда и из соотношений $\hat{u}_* = \varphi_* u_*$ и (36) получаем

$$(39) \quad |\nabla^2 \hat{u}| \leq C_4 \left[|\nabla^2 u_*| + l_I^{-1} |\nabla u_*| + l_I^{-1} l_I^{-1} |u_*| \right] (g).$$

Существует настолько малое $c = c(n, \kappa) > 0$, что для любой точки

$$y_0 \in I^* \equiv g(I^\square) \cap \text{supp } \varphi_*$$

открытый куб B с центром y_0 и ребром cl_I обладает свойствами

$$2B \subset Q_*, \quad \ell(2B) \leq \text{dist}(2B, S_*),$$

$$2B \subset \bigcup_{J \in \mathfrak{X}: I^\square \cap J^\square \neq \emptyset} g(J^\square).$$

Первая строка и свойство (33) позволяют применить лемму 6, откуда

$$\left(\int_B \left[|\nabla^2 u_*|^p + l_I^{-p} |\nabla u_*|^p \right] w_* dy \right)^{1/p} \leq C_5 \left[\|f_*\|_{L_{w_*}^p(2B)} + \frac{|B|_{w_*}^{1/p}}{l_I^{n+1}} \|\nabla u_*\|_{L^1(2B)} \right].$$

Покрывая множество I^* равномерно ограниченным числом кубов B и используя билипшицевость g и свойство $w_* \in D(Q_*, S_*)_1$, приходим к оценке

$$\left(\frac{1}{|I^\square|_w} \int_{I^*} \left[|\nabla^2 u_*|^p + l_I^{-p} |\nabla u_*|^p \right] w_* dy \right)^{1/p} \leq C_6 \varrho_I,$$

где

$$\varrho_I = \sum_{J \in \mathfrak{X}: I^\square \cap J^\square \neq \emptyset} \left[\|f\|_J + l_I^{-n-1} \|\nabla u\|_{L^1(J^\square)} \right].$$

Аналогичные оценки для пары $|\nabla u_*|, |u_*|$ получаются из леммы 5 и имеют вид

$$\left(\int_B \left[l_I^p |\nabla u_*|^p + |u_*|^p \right] w_* dy \right)^{1/p} \leq C'_5 \left[l_I^2 \|f_*\|_{L_{w_*}^p(2B)} + \frac{|B|_{w_*}^{1/p}}{l_I^n} \|u_*\|_{L^1(2B)} \right],$$

$$\left(\frac{1}{|I^\square|_w} \int_{I^*} \left[|\nabla u_*|^p + l_I^{-p} |u_*|^p \right] w_* dy \right)^{1/p} \leq C'_6 \varrho'_I,$$

где

$$\varrho'_I = \sum_{J \in \mathfrak{X}: I^\square \cap J^\square \neq \emptyset} \left[l_I \|f\|_J + l_I^{-n-1} \|u\|_{L^1(J^\square)} \right].$$

Отсюда и из соотношений (39), $\text{supp } \hat{u} \subset \text{supp } \varphi$ и $w_* = w(\mathfrak{g})$ выводим

$$\|\nabla^2 \hat{u}\|_I \leq C_7 \left[\varrho_I + l_I^{-1} \varrho'_I \right],$$

$$\sum_{I \in \mathfrak{X}} l_I^{n+1-\sigma} \|\nabla^2 \hat{u}\|_I \leq C_8 \sum_{J \in \mathfrak{X}} \left[l_J^{n+1-\sigma} \|f\|_J + l_J^{-\sigma} \|\nabla u\|_{L^1(J^\square)} + l_J^{-1} l_J^{-\sigma} \|u\|_{L^1(J^\square)} \right].$$

Ввиду (31) и свойства $\mathcal{A} < \infty$ это доказывает (38).

Оценим $\|\hat{f}\|_I$. Из формул $\hat{f}_\star = \Delta(\varphi_\star u_\star)$, $\Delta u_\star = f_\star$ и $\hat{f} = \hat{f}_\star(g)$, оценок (36) и билипшицевости g имеем

$$\begin{aligned} \hat{f}_\star &= \varphi_\star \Delta u_\star + 2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_\star}{\partial y_i} \frac{\partial u_\star}{\partial y_i} + (\Delta \varphi_\star) u_\star, \\ \hat{f} &= \varphi f + 2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi_\star}{\partial y_i} \frac{\partial u_\star}{\partial y_i} \right) (g) + (\Delta \varphi_\star)(g) u, \\ (40) \quad \|\hat{f}\|_I &\leq \|f\|_I + C_9 \left(\frac{1}{|I^\square|_w} \int_{I^\star} \left[l_J^{-p} |\nabla u_\star|^p + l_J^{-p} l_I^{-p} |u_\star|^p \right] w_\star dy \right)^{1/p} \\ &\leq \|f\|_I + C'_6 C_9 l_J^{-1} \varrho'_I, \end{aligned}$$

причем $\|\hat{f}\|_I = \|f\|_I$, если $I^\square \subset \overline{\mathcal{J}^\star}$.

Для $I \in \mathfrak{X}$ положим

$$\begin{aligned} \hat{F}_I &= \sum_{J \in \mathfrak{X}} \Gamma_{IJ}^{(1-\sigma, n-\sigma)} l_J \|\hat{f}\|_J, \\ \hat{W}_I &= \sum_{J \in \mathfrak{X}: I \subset J} \hat{F}_J e^{\vartheta(S_I - S_J)}. \end{aligned}$$

Конечность этих чисел следует из (40), (31) и использованной при выводе (38) сходимости ряда $\sum l_J^{n+1-\sigma} \varrho'_J$. В силу (40)

$$\begin{aligned} \hat{F}_I &\leq \sum_{J \in \mathfrak{X}} \Gamma_{IJ}^{(1-\sigma, n-\sigma)} l_J \|f\|_J + \\ &C'_6 C_9 l_J^{-1} \left[\sum_{J \in \mathfrak{X}} \|f\|_J \sum_{J_1} \Gamma_{IJ_1}^{(1-\sigma, n-\sigma)} l_{J_1}^2 + \sum_{J \in \mathfrak{X}} \|u\|_{L^1(J^\square)} \sum_{J_1} \Gamma_{IJ_1}^{(1-\sigma, n-\sigma)} l_{J_1}^{-n} \right] \\ &\leq C_{10} \sum_{J \in \mathfrak{X}} \Gamma_{IJ}^{(1-\sigma, n-\sigma)} l_J \|f\|_J + C'_6 C_9 l_J^{-1} \sum_{J \in \mathfrak{X}} \|u\|_{L^1(J^\square)} \sum_{J_1} \Gamma_{IJ_1}^{(1-\sigma, n-\sigma)} l_{J_1}^{-n}, \end{aligned}$$

где J_1 -суммы берутся по всем $J_1 \in \mathfrak{X}$ со свойствами $J^\square \cap J_1^\square \neq \emptyset$ и $J_1^\square \not\subset \overline{\mathcal{J}^\star}$, а $C_{10} > 1$. В переходе к третьей строке применены неравенства $l_{J_1} \leq l_J$ и (14). При $I \subset \mathfrak{J}$ условие $J_1^\square \not\subset \overline{\mathcal{J}^\star}$ тривиально влечет $[I, J_1] > \frac{1}{3\sqrt{n-1}} l_J$, откуда

$$\begin{aligned} \sum_{J_1} \Gamma_{IJ_1}^{(1-\sigma, n-\sigma)} l_{J_1}^{-n} &\leq C_{11} l_I^{1-\sigma} l_J^{2\sigma-n-1} l_J^{-\sigma}, \\ \hat{F}_I &\leq C_{10} \sum_{J \in \mathfrak{X}} \Gamma_{IJ}^{(1-\sigma, n-\sigma)} l_J \|f\|_J + C_{12} l_I^{1-\sigma} l_J^{2\sigma-n-2} \sum_{J \in \mathfrak{X}} l_J^{-\sigma} \|u\|_{L^1(J^\square)}. \end{aligned}$$

Взяв $\mu_0 = 2^\sigma C_{10}^{-1} C_{12}$, получаем $\hat{F}_I \leq C_{10} F_I$ и $\hat{W}_I \leq C_{10} W_I$ при $I \subset \mathfrak{J}$.

Из формул $\Delta \hat{u}_\star = \hat{f}_\star$, $\hat{u} = \hat{u}_\star(g)$, $\hat{f} = \hat{f}_\star(g)$ и формулы (29) получаем

$$(41) \quad \hat{f} = L\hat{u} + (\Delta_y \mathfrak{G}(g)) \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_n},$$

где

$$L\hat{u} = \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x_i^2} + 2 \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial y_i}(g) \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x_i \partial x_n} \right\} + |\nabla_y \mathfrak{G}(g)|^2 \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x_n^2}.$$

Для $I \in \mathfrak{X}$ через L_I обозначим оператор с постоянными коэффициентами

$$L_I \hat{u} = \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x_i^2} + 2 \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial y_i}(y_I) \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x_i \partial x_n} \right\} + |\nabla_y \mathfrak{G}(y_I)|^2 \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x_n^2},$$

где y_I — некоторая точка в $g(I^\square)$. Элементы множества $X(I, J) \cup Y(I, J)$ из раздела 2.6 можно расположить в цепочку $\{I_k\}$, соединяющую кубы I и J и обладающую свойством $I_k^\square \cap I_{k+1}^\square \neq \emptyset$, а значит, и свойством $g(I_k^\square) \cap g(I_{k+1}^\square) \neq \emptyset$. Колебание производной $\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial y_i}$ на множестве $g(I_k^\square)$ не превосходит $C_{13}c_{I_k}$, поэтому

$$(42) \quad \|L\hat{u} - L_I \hat{u}\|_J \leq C_{14}a_{IJ}\|\nabla^2 \hat{u}\|_J.$$

Кроме того, из неравенства $\partial \mathfrak{G}/\partial y_n \geq 1/\kappa$ и тождества

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \zeta_i^2 + 2 \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial y_i}(y_I) \zeta_i \zeta_n \right\} + |\nabla_y \mathfrak{G}(y_I)|^2 \zeta_n^2 \\ = \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \zeta_i + \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial y_i}(y_I) \zeta_n \right\}^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial y_n}(y_I) \right)^2 \zeta_n^2, \quad \zeta \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

следует, что для оператора L_I выполнено условие (15) с $\lambda = \lambda(n, \kappa)$. Продолжим вес w на $\mathbb{R}_+^n$ с помощью леммы 18. По теореме 1

$$\|\nabla^2 \hat{u}\|_I \leq C_{15} \sum_{J \in \mathfrak{X}} \Gamma_{IJ}^{(0, n+1)} \|L_I \hat{u}\|_J.$$

Считая, что $\|\nabla^2 \hat{u}\|_{I'} = 0$ в исключительном случае $I \odot \mathfrak{I}$, и еще раз применяя теорему 1, с учетом (14) получаем

$$\|\nabla^2 \hat{u}\|_{I'} \leq C_{15} \sum_{J \in \mathfrak{X}} \Gamma_{I'J}^{(0, n+1)} \|L_I \hat{u}\|_J \leq C'_{15} \sum_{J \in \mathfrak{X}} \Gamma_{IJ}^{(0, n+1)} \|L_I \hat{u}\|_J.$$

Соотношения (42), (41) и определение чисел c_I показывают, что

$$\begin{aligned} (43) \quad \|\nabla^2 \hat{u}\|_I + \|\nabla^2 \hat{u}\|_{I'} &\leq (C_{15} + C'_{15}) \sum_{J \in \mathfrak{X}} \Gamma_{IJ}^{(0, n+1)} \|L_I \hat{u}\|_J \\ &\leq (C_{15} + C'_{15}) \sum_{J \in \mathfrak{X}} \Gamma_{IJ}^{(0, n+1)} \left[C_{14}a_{IJ}\|\nabla^2 \hat{u}\|_J + \sqrt{n}c_J l_J^{-1} \|\nabla \hat{u}\|_J + \|\hat{f}\|_J \right]. \end{aligned}$$

Пусть α_I и β_I — наименьшие неотрицательные числа со свойствами

$$(44a) \quad \|\nabla \hat{u}\|_I \leq m_1 \widehat{W}_I + \alpha_I,$$

$$(44b) \quad l_I \left[\|\nabla^2 \hat{u}\|_I + \|\nabla^2 \hat{u}\|_{I'} \right] \leq m_2 \left[\widehat{F}_I + M^{-1} T_I \widehat{W}_I \right] + \beta_I,$$

где $I \in \mathfrak{X}$, $m_1 = \mu_1/C_{10}$ и $m_2 = \mu_2/C_{10}$. Предположим, что

$$(37') \quad \vartheta M \leq b_5.$$

Тогда по (44b), теореме 5 и неравенствам (18a) и (26)

$$\sum_{J \in \mathfrak{X}} \Gamma_{IJ}^{(0, n+1)} a_{IJ} \|\nabla^2 \hat{u}\|_J = l_I^{-1} \sum_{J \in \mathfrak{X}} \Gamma_{IJ}^{(1, n)} a_{IJ} l_J \|\nabla^2 \hat{u}\|_J$$

$$\begin{aligned}
&\leq m_2 l_I^{-1} \sum_{J \in \mathfrak{X}} \Gamma_{IJ}^{(1,n)} a_{IJ} \left[\widehat{F}_J + M^{-1} T_J \widehat{W}_J \right] + l_I^{-1} \sum_{J \in \mathfrak{X}} \Gamma_{IJ}^{(1,n)} a_{IJ} \beta_J \\
&\leq C_{16} m_2 l_I^{-1} \left[M \widehat{F}_I + T_I \widehat{W}_I \right] + C_{17} M l_I^{-1} \underbrace{\sum_{J \in \mathfrak{X}} \Gamma_{IJ}^{(1-\sigma/2, n-\sigma/2)} \beta_J}_{\Sigma_\beta(I)}.
\end{aligned}$$

По неравенствам (44a) и $c_J \leq \min\{a_{IJ}, M\}$ и теореме 5

$$\begin{aligned}
\sum_{J \in \mathfrak{X}} \Gamma_{IJ}^{(0, n+1)} c_J l_J^{-1} \|\nabla \widehat{u}\|_J &\leq l_I^{-1} \sum_{J \in \mathfrak{X}} \Gamma_{IJ}^{(1,n)} \left(a_{IJ} m_1 \widehat{W}_J + M \alpha_J \right) \\
&\leq C_{18} m_1 l_I^{-1} \left[M \widehat{F}_I + T_I \widehat{W}_I \right] + l_I^{-1} M \underbrace{\sum_{J \in \mathfrak{X}} \Gamma_{IJ}^{(1,n)} \alpha_J}_{\Sigma_\alpha(I)}.
\end{aligned}$$

По неравенству $\Gamma_{IJ}^{(1,n)} \leq \Gamma_{IJ}^{(1-\sigma, n-\sigma)}$

$$\sum_{J \in \mathfrak{X}} \Gamma_{IJ}^{(0, n+1)} \|\widehat{f}\|_J \leq l_I^{-1} \widehat{F}_I.$$

Подставляя последние три неравенства в (43), получаем

$$\begin{aligned}
&l_I \left[\|\nabla^2 \widehat{u}\|_I + \|\nabla^2 \widehat{u}\|_{I'} \right] \\
&\leq C_{19} \left[M(m_1 + m_2) \{ \widehat{F}_I + M^{-1} T_I \widehat{W}_I \} + M \{ \Sigma_\alpha(I) + \Sigma_\beta(I) \} + \widehat{F}_I \right].
\end{aligned}$$

Предположим, что

$$(37'') \quad C_{19} \left[M(m_1 + m_2) + 1 \right] \leq m_2.$$

Тогда из определения (44b) следует, что

$$(45) \quad \beta_I \leq C_{19} M \{ \Sigma_\alpha(I) + \Sigma_\beta(I) \}.$$

Получим двойственную оценку на α_I . В силу леммы 19 и оценок (44)

$$\begin{aligned}
\|\nabla \widehat{u}\|_I &\leq \|\nabla \widehat{u}\|_{I'} + C_{20} \left[m_2 \{ \widehat{F}_I + M^{-1} T_I \widehat{W}_I \} + \beta_I \right] \\
(46) \quad &\leq m_1 \widehat{W}_{I'} + \alpha_{I'} + C_{20} \left[m_2 \{ \widehat{F}_I + M^{-1} T_I \widehat{W}_I \} + \beta_I \right] \\
&\leq m_1 \widehat{W}_{I'} + \alpha_{I'} + \frac{m_1}{2} \widehat{F}_I + \frac{m_1}{2} b_3 \vartheta T_I \widehat{W}_I + C_{20} \beta_I,
\end{aligned}$$

если

$$(37''') \quad C_{20} m_2 \leq \frac{m_1}{2} \min\{1, b_3 \vartheta M\};$$

в особом случае $I \odot \mathfrak{I}$ считаем $\widehat{W}_{I'} = \alpha_{I'} = 0$. По определению чисел $\widehat{W}_I$

$$\widehat{W}_I = \widehat{F}_I + e^{\vartheta(S_I - S_{I'})} \widehat{W}_{I'},$$

где значение $S_{I'}$ при $I \odot \mathfrak{I}$ роли не играет. Неравенства $e^t \geq 1 + t$ и (18с) дают оценку

$$\widehat{W}_I \geq \widehat{F}_I + (1 + b_3 \vartheta T_I) \widehat{W}_{I'}.$$

Пусть для постоянной b_1 из (18a) выполнено условие

$$(37''') \quad \vartheta M \leq (b_1 b_3)^{-1}.$$

Тогда $t \equiv b_3 \vartheta T_I \in [0, 1]$, откуда $(1 - t/2)(1 + t) \geq 1$ и, значит,

$$\left(1 - \frac{1}{2}b_3 \vartheta T_I\right) \widehat{W}_I \geq (1 - t/2)\widehat{F}_I + \widehat{W}_{I'} \geq \frac{1}{2}\widehat{F}_I + \widehat{W}_{I'},$$

$$\|\nabla \widehat{u}\|_I \leq m_1 \widehat{W}_I + \alpha_{I'} + C_{20}\beta_I \quad (\text{в силу (46)}).$$

По определению (44а) получаем

$$(47) \quad \alpha_I \leq \alpha_{I'} + C_{20}\beta_I.$$

Воспользуемся оценками (45) и (47). Имеем

$$\begin{aligned} \alpha_J &\leq C_{20} \sum_{K \in \mathfrak{X}: J \subset K} \beta_K, \\ \Sigma_\alpha(I) &\leq C_{20} \sum_{J, K: J \subset K} \Gamma_{IJ}^{(1, n)} \beta_K, \\ A \equiv \sum_{I \in \mathfrak{X}} \Gamma_{JI}^{(1-\sigma, n-\sigma)} \beta_I &\leq C_{19} M \sum_{I \in \mathfrak{X}} \Gamma_{JI}^{(1-\sigma, n-\sigma)} \{\Sigma_\alpha(I) + \Sigma_\beta(I)\} \\ &\leq C_{19} M \left[C_{20} \sum_{I, J, K: J \subset K} \Gamma_{JI}^{(1-\sigma, n-\sigma)} \Gamma_{IJ}^{(1, n)} \beta_K + \sum_{I, J} \Gamma_{JI}^{(1-\sigma, n-\sigma)} \Gamma_{IJ}^{(1-\sigma/2, n-\sigma/2)} \beta_J \right]. \end{aligned}$$

По теореме 2(b)

$$\sum_{I \in \mathfrak{X}} \Gamma_{JI}^{(1-\sigma, n-\sigma)} \Gamma_{IJ}^{(1, n)} \leq \sum_{I \in \mathfrak{X}} \Gamma_{JI}^{(1-\sigma, n-\sigma)} \Gamma_{IJ}^{(1-\sigma/2, n-\sigma/2)} \leq C_{21} \Gamma_{JI}^{(1-\sigma, n-\sigma)}.$$

Из соотношений

$$(48) \quad \Gamma_{JJ}^{(1-\sigma, n-\sigma)} \approx \left(\frac{l_J}{l_J}\right)^{n-\sigma}$$

и $\sigma < 1$ следует, что $\sum_{J \in \mathfrak{X}: J \subset K} \Gamma_{JJ}^{(1-\sigma, n-\sigma)} \leq C_{22} \Gamma_{JK}^{(1-\sigma, n-\sigma)}$. Поэтому

$$\begin{aligned} A &\leq C_{19} M \left[C_{20} C_{21} \sum_{J, K: J \subset K} \Gamma_{JJ}^{(1-\sigma, n-\sigma)} \beta_K + C_{21} \sum_{J \in \mathfrak{X}} \Gamma_{JJ}^{(1-\sigma, n-\sigma)} \beta_J \right] \\ &\leq C_{19} C_{21} M [C_{20} C_{22} + 1] A. \end{aligned}$$

Заметим, что $A < \infty$ ввиду (48), неравенства

$$\beta_I \leq l_I [\|\nabla^2 \widehat{u}\|_I + \|\nabla^2 \widehat{u}\|_{I'}]$$

(следующего из определения (44b)) и соотношения (38). Пусть

$$(37''''') \quad C_{19} C_{21} M [C_{20} C_{22} + 1] < 1.$$

Тогда $A = 0$, все числа β_I равны нулю, а в силу (47) — и все числа α_I . Поэтому оценки (32) следуют из оценок (44) и того, что при $I \subsetneq \mathfrak{I}$

$$\|\nabla u\|_I = \|\nabla \widehat{u}\|_I, \quad \|\nabla^2 u\|_I = \|\nabla^2 \widehat{u}\|_I, \quad \widehat{F}_I \leq C_{10} F_I, \quad \widehat{W}_I \leq C_{10} W_I.$$

Осталось проверить существование постоянных M, ϑ, m_1 и m_2 с требуемыми свойствами. Будем искать их в виде

$$\vartheta = t/M, \quad m_2 = C_{23} m_1,$$

где $t = \min\{b_5, (b_1 b_3)^{-1}\}$ и $C_{23} = \min\{1, b_3 t\}/(2C_{20})$. Условия (37'), (37''') и (37''') выполнены автоматически. Условие (37'') принимает вид

$$C_{19} \leq [C_{23} - C_{19}(1 + C_{23})M]m_1.$$

Мы берём такое положительное $M \leq \frac{C_{23}}{2C_{19}(1+C_{23})}$, что выполнены условия (37) и (37'''), после чего можно взять $m_1 = \frac{2C_{19}}{C_{23}}$, удовлетворяя условию (37''). $\square$

Замечание 1. Из последнего абзаца видно, что теорема 6 сохраняет силу, если её первое предположение заменить на такое: “Для любых вещественных чисел

$$1 < p < \infty, \quad \theta \geq 1, \quad \kappa \geq 1, \quad 0 < \sigma < 1, \quad t_0 > 0$$

существуют (зависящие еще и от n) положительные числа M , $\vartheta \leq t_0/M$, μ_0 , μ_1 и μ_2 , для которых имеет место следующее утверждение.”

Замечание 2. Про оценки (32) можно утверждать, что

- а) при $w \equiv 1$ и большом p из них можно извлечь поточечную информацию о поведении u и ∇u ;
- б) их можно перенести на пространства Гёльдера;
- с) они идейно сходны с асимптотическими формулами из [63, 64].

Раскрытие этих тезисов в настоящей статье, не связанной с поточечными оценками, было бы неуместным.

4. КЛАССЫ ОБЛАСТЕЙ И ВЕСОВ

4.1. Ограниченные липшицевы области с “достаточно плоской” границей. Мы собираемся применить теорему 6 к получению априорной оценки в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Для этого мы построим такие наборы гомеоморфизмов $g_i \in \Xi^2(\mathcal{I}_i, \kappa)$ и движений h_i , что множества $h_i^{-1}(g_i(Q_i))$ содержатся в $\bar{\Omega}$ и образуют покрытие некоторой окрестности границы $\partial\Omega$, а множества $h_i^{-1}(g_i(S_i))$ образуют покрытие самой $\partial\Omega$. (Движением в $\mathbb{R}^n$ называется преобразование вида $x \mapsto b + Cx$, где $b \in \mathbb{R}^n$ и $C \in O(n)$.) Чтобы это было возможно, от $\partial\Omega$ надо потребовать липшицевости, т.к. g_i билипшицевы. Как будет видно дальше, условие (30) теоремы 6 можно обеспечить выбором g_i , только если $\partial\Omega$ задаётся функциями со свойством (49b) Зигмунда для достаточно малой постоянной δ .

Пусть $A \geq 0$ и $\delta \geq 0$. Объединим условия Липшица и Зигмунда в едином термине.

Определение 6. Функция f , определённая на выпуклом подмножестве U евклидова пространства, принадлежит множеству $LZ(A, \delta)(U)$, если

$$(49a) \quad |f(\xi) - f(\eta)| \leq A|\xi - \eta|,$$

$$(49b) \quad \left| f(\xi) - 2f\left(\frac{\xi + \eta}{2}\right) + f(\eta) \right| \leq \delta|\xi - \eta|$$

для любых $\xi, \eta \in U$.

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$.

Определение 7. Назовём (A, δ) -картой в точке $z \in \partial\Omega$ любую состоящую из числа $r > 0$ и движения h пару (r, h) , если для $y = h(z)$ и шаров

$$U = \{\xi \in \mathbb{R}^{n-1} : |\xi - y'| < r\},$$

$$V = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r\}$$

существует вещественная функция $\omega \in \text{LZ}(A, \delta)(U)$, для которой

$$V \cap h(\Omega) = \{x \in V : x_n > \omega(x')\}.$$

Говорим, что $\Omega \in \text{LZ}(A, \delta)$, если в любой точке $z \in \partial\Omega$ существует какая-нибудь (A, δ) -карта. Введём множества ограниченных областей

$$\begin{aligned} \text{Lz}(A) &= \bigcap_{\delta > 0} \text{LZ}(A, \delta), \\ \text{Lz} &= \bigcup_{A > 0} \text{Lz}(A), \\ C_A^{0,1} &= \text{Lz}(A, A), \\ C^{0,1} &= \bigcup_{A > 0} C_A^{0,1}. \end{aligned}$$

Замечание. Ясно, что $y_n = \omega(y')$. При $\delta \geq A$ условие (49b) следует из (49a), поэтому $C^{0,1}$ суть класс ограниченных (сильно) липшицевых областей. Функцию ω будем называть *соответствующей карте* (r, h) , хотя она и не обязательно единственна.

Условие Зигмунда хорошо известно (см., например, п. 2.7.1 в [21]) в теории функциональных пространств. Функции Зигмунда и задаваемые ими области послужили в работах [61] (с. 90, 92, 94 и 141) и [59] (с. 2635 и 2727) средством изучения функций близкого класса BMO_1 и соответствующих областей. (О двух различных определениях класса BMO_α см. [82].) В работах [61] и [59] показано, что области Зигмунда принадлежат классу НТА нетангенциально достижимых областей и являются, при малом δ , областями Райфенберга с малой постоянной. Области Райфенберга с малой постоянной характеризуются “достаточно плоской” границей, которая может и не допускать локальной параметризации в виде графика; так, граница может быть снежинкой Коха или объединением двух спиралей. Литературу по областям Райфенберга можно найти в работах [30] и [59, § 4.1]. Применяются различные определения; дадим определение из [30].

Определение 8. Для $\delta > 0$ и $R > 0$ ограниченная область Ω называется (δ, R) -областью Райфенберга, если для любых $z \in \partial\Omega$ и $0 < r \leq R$ существует $(n-1)$ -мерная плоскость $L = L(z, r)$ такая, что

$$D[\partial\Omega \cap B(z, r), L \cap B(z, r)] \leq \delta r,$$

где $B(z, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - z| < r\}$, а

$$D[E, F] = \sup\{\text{dist}(x, F) : x \in E\} + \sup\{\text{dist}(E, x) : x \in F\}$$

— хаусдорфово расстояние между подмножествами E и F в $\mathbb{R}^n$.

В определение области Райфенберга иногда также включают (см. [59], с. 2688) аксиому разделения, которая, грубо говоря, гласит, что область Ω лежит по одну сторону от гиперплоскости L .

Чтобы связать определения 7 и 8 друг с другом и с дальнейшим изложением, введём величины $b_I^{(\tau)}$, которые будут главным средством описания гладкости функций и областей. Пусть

$$(50) \quad \mathfrak{I} \in \mathcal{D} \text{ и } f : \overline{3\mathfrak{I}} \rightarrow \mathbb{R} \text{ — непрерывная функция.}$$

Для $0 < \tau \leq \infty$ и $I \in \mathfrak{X} = \mathfrak{D}_J$ положим

$$b_I^{(\tau)} = l_I^{-1} \inf_{\gamma} \left(\frac{1}{|\overline{3J} \cap \overline{3I}|} \int_{\overline{3J} \cap \overline{3I}} |f - \gamma|^\tau d\xi \right)^{1/\tau},$$

где $\inf_{\gamma}$ берётся по всем многочленам $\gamma(\xi) = a_0 + a_1\xi_1 + \dots + a_{n-1}\xi_{n-1}$ степени не выше первой, а случай $\tau = \infty$ понимается обычным образом. Докажем известный факт совпадения пространства Зигмунда в кубе с некоторым пространством Морри-Кампанато.

Предложение 1. Если для всех $\xi, \eta \in \overline{3J}$ верно (49b), то $\delta_1^{(\tau)} \leq c(n)\delta$, где $\delta_1^{(\tau)} \equiv \sup_{I \in \mathfrak{X}} b_I^{(\tau)}$. Обратно, если $\delta_1^{(\tau)} < \infty$, то для всех $\xi, \eta \in \overline{3J}$ имеет место неравенство (49b) с постоянной $\delta = c'(n, \tau)\delta_1^{(\tau)}$.

Доказательство. Неравенство $b_I^{(\infty)} \leq c(n)\delta$ вытекает из теоремы 1 в [3]. По неравенству Гёльдера $b_I^{(\tau)} \leq b_I^{(\infty)}$, откуда $\delta_1^{(\tau)} \leq c(n)\delta$.

Неравенство $b_I^{(\infty)} \leq c'_0(n, \tau)\delta_1^{(\tau)}$ получается небольшим изменением доказательства теоремы 4.1 в [62]; см. также § 5.2 там же. Взяв для точек $\xi, \eta \in \overline{3J}$ такой куб $I \in \mathfrak{X}$, что $\xi, \eta \in \overline{3I}$ и размер I минимален (при $\xi \neq \eta$), оценим левую часть неравенства (49b) числом $c'_1(n)|\xi - \eta|b_I^{(\infty)}$, что даёт (49b) с $\delta = c'\delta_1^{(\tau)}$ для постоянной $c' = c'_0c'_1$. $\square$

Замечание. В [62, 87, 90] можно найти аналогичные утверждения для разных классов подмножеств в $\mathbb{R}^n$.

В любой шар можно вписать куб и наоборот; для любых (A, δ) -карты (r, h) и $0 < r_1 < r$ пара (r_1, h) тоже является (A, δ) -картой. Отсюда, из предложения 1 с $\tau = \infty$ и из компактности $\partial\Omega$ легко выводится (см. также [59], с. 2727) следующая

Лемма 20. Существует постоянная $c = c(n)$ такая, что любая область $\Omega \in \text{LZ}(A, \delta)$ является $(c\delta, R)$ -областью Райфенберга для некоторого $R > 0$.

Лемма 20 позволяет применить работу [30] к получению следующей теоремы единственности гармонических функций. Для ограниченных областей класса C^∞ такая теорема единственности следует, например, из теоремы 6.1 в [52], а для областей $\Omega \in C_A^{0,1}$ с достаточно малым $A = A(n, q) > 0$ — из леммы 15.2.1 монографии [72].

Теорема 7. Для любого $1 < q < \infty$ существует такое $\delta = \delta(n, q) > 0$, что для любой области $\Omega \in \text{LZ}(A, \delta)$ любая гармоническая функция, принадлежащая замыканию $\dot{W}^{1,q}(\Omega)$ множества $C_0^\infty(\Omega)$ в пространстве $W^{1,q}(\Omega)$, равна нулю тождественно.

Доказательство. В обозначениях теоремы 1.5 из [30] положим $\delta_0 = \delta(1, q, n, 1)$. Пусть $\delta = \delta_0/c$ для постоянной c из леммы 20. Тогда любая область $\Omega \in \text{LZ}(A, \delta)$ является (δ_0, R) -областью Райфенберга для некоторого R . Применяя растяжение области, можно без умаления общности считать, что $R = 1$. Теорема 1.5 из [30] с правой частью $\mathbf{f} \equiv 0$ даёт требуемый результат. $\square$

4.2. Распрямляющие гомеоморфизмы. Рассмотрим (A, A) -карту (r, h) в точке z границы $\partial\Omega$ ограниченной области Ω . Пусть y, U, V и ω соответствуют

паре (r, h) по определению 7. Тогда при $x \in \mathbb{R}^n$ и $|x - y| < r/2$

$$(51) \quad D \equiv \text{dist}(x, h(\partial\Omega)) \leq E \equiv |x_n - \omega(x')| \leq \sqrt{1 + A^2}D.$$

Ввиду $|x' - y'| < r/2$ значение $\omega(x')$ определено. Из включения $y \in h(\partial\Omega)$ следует, что $D \leq |x - y| < r/2$, поэтому $D < E$ при $E \geq r/2$. Если же $E < r/2$, то для $x^* = (x', \omega(x'))$ по неравенству треугольника

$$|x^* - y| \leq E + |x - y| < r,$$

откуда $x^* \in V$, $x^* \in h(\partial\Omega)$ и $D \leq |x - x^*| = E$. Для проверки второго из неравенств (51) возьмём $x_* \in h(\partial\Omega)$ такое, что $|x - x_*| = D$. Из уже известного соотношения $D < r/2$ следует, что $x_* \in V$, поэтому $x_* = (\xi, \omega(\xi))$ для некоторого $\xi \in U$, откуда получаем

$$E \leq |x_n - \omega(\xi)| + |\omega(\xi) - \omega(x')| \leq \sqrt{D^2 - |x' - \xi|^2} + A|x' - \xi| \leq \sqrt{1 + A^2}D.$$

Определение 9. Для $\kappa \geq 1$, $A \geq 0$ и $\delta \geq 0$ назовём (κ, A, δ) -картой в точке $z \in \partial\Omega$ любой такой набор $(\mathfrak{J}, g, r, h)$ из куба $\mathfrak{J} \in \mathcal{D}$, гомеоморфизма $g \in \Xi^2(\mathfrak{J}, \kappa)$ и (A, δ) -карты (r, h) в точке z , что выполнены условия

$$(52a) \quad g(\mathfrak{c}_{\mathfrak{J}}, 0) = h(z) \equiv y,$$

$$(52b) \quad Q_* \equiv g(Q) \subset V_{1/2} \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r/2\},$$

$$(52c) \quad g_n(\xi, 0) = \omega(\xi), \quad \xi \in \overline{3\mathfrak{J}}.$$

Замечание. На основании (52b) имеем $\overline{3\mathfrak{J}} \subset U$, поэтому значения $\omega(\xi)$ в (52c) определены.

Покажем, как строить (κ, A, δ) -карты.

Определение 10. Два движения h и $\vec{h}$ в $\mathbb{R}^n$ называются параллельными, если $h(x) \equiv \vec{h}(x) + \zeta$ для некоторого $\zeta \in \mathbb{R}^n$. Тогда пишем $h \parallel \vec{h}$.

Пусть $A \geq 0$ и $0 < \tau \leq \infty$.

Лемма 21. Существуют такие числа $\kappa = \kappa(n, A, \tau) \geq 1$ и $C = C(n, A, \tau) > 0$, что имеют место следующие утверждения.

(i) Если функция f из (50) удовлетворяет условию Липшица (49a), то существует гомеоморфизм $g \in \Xi^2(\mathfrak{J}, \kappa)$ со свойствами $g_n(\xi, 0) \equiv f(\xi)$ и

$$(53) \quad \hat{c}_I \equiv l_I \|\nabla^2 g_n\|_{L^\infty(I^\square)} \leq C b_I^{(\tau)}, \quad I \in \mathfrak{X} \equiv \mathfrak{D}_{\mathfrak{J}}.$$

(ii) Если в точке $z \in \partial\Omega$ существует (A, δ) -карта $(r, \vec{h})$, то для любого куба $\mathfrak{J} \in \mathcal{D}$ с ребром $l_{\mathfrak{J}} \leq \frac{r}{4\kappa\sqrt{n}}$ можно построить такую (κ, A, δ) -карту $(\mathfrak{J}, g, r, h)$ в точке z , что гомеоморфизм g обладает свойством (53), где

$$(54) \quad \text{числа } b_I^{(\tau)} \text{ вычисляются по функции (52c),}$$

а для карт (r, h) и $(r, \vec{h})$ и соответствующих им функций ω и $\vec{\omega}$ имеем

$$(55) \quad h(x) \equiv \vec{h}(x) + \zeta, \quad \omega(\xi) \equiv \vec{\omega}(\xi - \zeta') + \zeta_n$$

для некоторого $\zeta \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Постоянные κ и C будут определены ниже.

(i) Пусть b_I^* — числа, определяемые как $b_I^{(\tau)}$, но с заменой $\overline{3I}$ на $\overline{5I}$. Небольшое изменение конструкции (58) из [17] даёт такую функцию $G_0: Q \setminus S \rightarrow \mathbb{R}$ класса $C^\infty(Q \setminus S)$, что имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \|\nabla G_0\|_{L^\infty(Q \setminus S)} &\leq C_1(n, A, \tau), \\ l_I \|\nabla^2 G_0\|_{L^\infty(I^\square)} &\leq C_2(n, A, \tau) b_I^*, \quad I \in \mathfrak{X}, \\ G_0(\xi, 0+) &= f(\xi), \quad \xi \in \overline{3I}. \end{aligned}$$

По первому из них существует липшицево продолжение G_0 на Q . Положим

$$\begin{aligned} G(x', x_n) &= G_0(x', x_n/2), \quad x \in Q, \\ g(x', x_n) &= (x', C_1 x_n + G(x', x_n)). \end{aligned}$$

Из соотношения $|\partial G / \partial x_n| \leq C_1/2$ очевидно, что $g \in \Xi^\infty(\mathfrak{J}, \kappa)$ для некоторого $\kappa = \kappa(n, A, \tau)$, причем $g_n(\xi, 0) \equiv f(\xi)$. Если $x = (x', x_n) \in I^\square$, то $(x', x_n/2) \in J^\square$ для некоторого куба $J \in \mathfrak{X}$ со свойством $J' = I$. Ввиду вложения $\overline{5J} \subset \overline{3I}$ получаем (53), так как

$$\widehat{c}_I = l_I \|\nabla^2 G\|_{L^\infty(I^\square)} \leq l_I \max_J \|\nabla^2 G_0\|_{L^\infty(J^\square)} \leq 2C_2 \max_J b_J^* \leq C(n, A, \tau) b_I^{(\tau)}.$$

(ii) Для данных z , $(r, \vec{h})$, $\vec{\omega}$ и $\mathfrak{J}$ положим

$$\zeta = (\mathfrak{c}_{\mathfrak{J}}, 0) - \vec{h}(z)$$

и воспользуемся (55) как определением. Получаем (A, δ) -карту (r, h) с соответствующей функцией ω , причем $y \equiv h(z) = (\mathfrak{c}_{\mathfrak{J}}, 0)$ и $y' = \mathfrak{c}_{\mathfrak{J}}$. Ввиду $l_{\mathfrak{J}} < \frac{2r}{3\sqrt{n-1}}$ определена функция

$$f = \omega|_{\overline{3\mathfrak{J}}}$$

со свойством (49a). Для гомеоморфизма $g \in \Xi^2(\mathfrak{J}, \kappa)$ из утверждения (i) верно неравенство (53) и, ввиду соотношения $g_n(\xi, 0) \equiv f(\xi)$, условия (52c) и (54). Из равенств $g(\mathfrak{c}_{\mathfrak{J}}, 0) = (\mathfrak{c}_{\mathfrak{J}}, g_n(\mathfrak{c}_{\mathfrak{J}}, 0)) = (y', \omega(y')) = (y', y_n) = y$ получаем (52a). Отсюда же $g(y) = y$, поэтому для любого $x \in Q$

$$|g(x) - y| = |g(x) - g(y)| \leq \kappa |x - y| < 2\kappa \sqrt{n} l_{\mathfrak{J}} \leq r/2,$$

то есть верно (52b). Значит, $(\mathfrak{J}, g, r, h)$ является (κ, A, δ) -картой. $\square$

Покажем, как использовать компактность $\partial\Omega$.

Лемма 22. Пусть в каждой точке $z \in \partial\Omega$ границы ограниченной области Ω дана $(\kappa_z, A_z, \delta_z)$ -карта $(\mathfrak{J}_z, g_z, r_z, h_z)$. Тогда существуют конечный поднабор $\{(\mathfrak{J}_i, g_i, r_i, h_i): 1 \leq i \leq N\}$ набора $\{(\mathfrak{J}_z, g_z, r_z, h_z): z \in \partial\Omega\}$ и $d > 0$ такие, что

$$(56a) \quad \partial\Omega = \bigcup_{i=1}^N s_i,$$

$$(56b) \quad h_i\left(\{x \in \overline{\Omega}: \text{dist}(x, s_i) \leq d\}\right) \subset g_i\left(\overline{\mathfrak{J}_i} \times [0, l_{\mathfrak{J}_i}]\right),$$

$$\text{где } h_i(s_i) = g_i\left(\{\xi \in \mathbb{R}^{n-1}: |\xi - \mathfrak{c}_{\mathfrak{J}_i}| < l_{\mathfrak{J}_i}/4\} \times \{0\}\right).$$

Доказательство. По определению 9 множества

$$s_z = [h_z^{-1} \circ g_z]\left(\{\xi \in \mathbb{R}^{n-1}: |\xi - \mathfrak{c}_{\mathfrak{J}_z}| < l_{\mathfrak{J}_z}/4\} \times \{0\}\right)$$

содержатся в $\partial\Omega$ и открыты в относительной топологии. При этом $\partial\Omega = \bigcup_z s_z$, так как $z \in s_z$. Выбирая конечное подпокрытие и нумеруя точки z индексом i , получаем (56a). Из (52b) и вложения $\overline{h_i(s_i)} \subset g_i(Q_i)$ вытекает существование такого $d_i > 0$, что из $\text{dist}(X, h_i(s_i)) \leq d_i$ следует оценка $|X - y_i| < r_i/2$, где $y_i = h_i(z_i)$. Положим

$$d = \min_{1 \leq i \leq N} \min \left\{ \frac{l_{\mathfrak{I}_i}}{4}, \frac{l_{\mathfrak{I}_i}}{\kappa_i \sqrt{1 + A_i^2}}, d_i \right\}.$$

Пусть $x \in \overline{\Omega}$, $\text{dist}(x, s_i) \leq d$ и $X = h_i(x)$. По определению 5 для установления (56b) достаточно показать, что $X' \in \overline{\mathfrak{I}_i}$ и $\omega_i(X') \leq X_n \leq \omega_i(X') + l_{\mathfrak{I}_i}/\kappa_i$. Ввиду оценок $\text{dist}(X, h_i(s_i)) \leq d \leq \min\{l_{\mathfrak{I}_i}/4, d_i\}$ получаем $X' \in \overline{\mathfrak{I}_i}$ и $|X - y_i| < r_i/2$. Из $X \in V_i \cap \overline{h_i(\Omega)}$ и определения 7 следует, что $X_n \geq \omega_i(X')$. В силу (51)

$$X_n - \omega_i(X') = |X_n - \omega_i(X')| \leq \sqrt{1 + A_i^2} \text{dist}(X, h_i(\Omega)) \leq \sqrt{1 + A_i^2} d \leq \frac{l_{\mathfrak{I}_i}}{\kappa_i}.$$

Мы доказали (56b). $\square$

Изучим, в терминах величин $b_I^{(1)}$ и $\widehat{c}_I$, какие ограничения гомеоморфизм $g \in \Xi^2(\mathfrak{I}, \kappa)$ накладывает на “граничную функцию” $g_n(\cdot, 0)$.

Лемма 23. Для любого $g \in \Xi^2(\mathfrak{I}, \kappa)$ и функции $f(\xi) = g_n(\xi, 0)$ ($\xi \in \overline{3\mathfrak{I}}$) имеем

$$b_J^{(1)} \leq C'(n) \sum_{K \in \mathfrak{X} \cap \mathfrak{D}_J} \left(\frac{l_K}{l_J} \right)^n \widehat{c}_K \leq C''(n) \sum_{K \in \mathfrak{X}} \Gamma_{JK}^{(1,n)} \widehat{c}_K, \quad J \in \mathfrak{X}.$$

Доказательство. При $\xi \in \overline{3\mathfrak{I}} \cap (3J)$ согласно формуле Тейлора

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \lim_{\mu \downarrow 0} g_n(\xi, \mu) = g_n(\xi, l_J) - l_J \frac{\partial g_n}{\partial x_n}(\xi, l_J) + \underbrace{\int_0^{l_J} t \frac{\partial^2 g_n}{\partial x_n^2}(\xi, t) dt}_{f_1(\xi)} \\ g_n(\xi, l_J) &= g_n(\mathbf{c}_J, l_J) + \langle \xi - \mathbf{c}_J, \nabla_{x'} g_n(\mathbf{c}_J, l_J) \rangle + \\ &\quad \underbrace{\int_0^1 (1-t) \frac{d^2}{dt^2} g_n(\mathbf{c}_J + t(\xi - \mathbf{c}_J), l_J) dt}_{f_2(\xi)}, \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_n}(\xi, l_J) &= \frac{\partial g_n}{\partial x_n}(\mathbf{c}_J, l_J) + \underbrace{\int_0^1 \frac{d}{dt} \frac{\partial g_n}{\partial x_n}(\mathbf{c}_J + t(\xi - \mathbf{c}_J), l_J) dt}_{f_3(\xi)}, \\ f &= \gamma + f_1 + f_2 - l_J f_3, \end{aligned}$$

где γ — многочлен степени не выше первой, а интеграл $f_1(\xi)$ понимается с помощью подходящего предельного перехода. Имеем

$$\begin{aligned} |f_1(\xi)| &\leq \frac{3}{2} \sum_{K \in \mathfrak{X}: \xi \in K \text{ \& } l_K \leq l_J/2} l_K \widehat{c}_K, \\ |f_2(\xi)| &\leq C_1(n) l_J \sum_{K \in \mathfrak{X} \cap J_\odot} \widehat{c}_K, \\ |f_3(\xi)| &\leq C_2(n) \sum_{K \in \mathfrak{X} \cap J_\odot} \widehat{c}_K, \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} b_J^{(1)} &\leq l_J^{-1} \frac{1}{|\mathfrak{J} \cap (3J)|} \int_{\mathfrak{J} \cap (3J)} |f - \gamma| d\xi \\ &\leq \frac{3}{2^n l_J^n} \sum_{K \in (\mathfrak{X} \cap \mathfrak{D}_J) \setminus J_\odot} l_K \widehat{c}_K \int_K d\xi + (C_1 + C_2) \sum_{K \in \mathfrak{X} \cap J_\odot} \widehat{c}_K. \end{aligned}$$

Отсюда следует первое из искомым неравенств с $C'(n) = \max\{3 \cdot 2^{-n}, C_1 + C_2\}$. Если $K \in \mathfrak{D}_J$, то $[J, K] \leq 2l_J$, откуда для $C''(n) = 2^{n+1}C'(n)$ получаем второе неравенство. $\square$

Замечание. Из предложения 1, лемм 17, 21(ii) и 23 и неравенства

$$\sum_{K \in \mathfrak{X} \cap \mathfrak{D}_J} \left(\frac{l_K}{l_J} \right)^n \leq 3^{n-1} 2$$

следует сравнимость инфимума чисел δ в условии $\Omega \in \text{LZ}(A, \delta)$ с инфимумами величин $\sup_{\mathfrak{X}} b_I^{(\tau)}$, $\sup_{\mathfrak{X}} c_I$ и $\sup_{\mathfrak{X}} \widehat{c}_I$, вычисляемых по (κ, A, A) -картам. Мы не приводим точную формулировку этого утверждения, так как в дальнейшем она не понадобится.

4.3. Области классов $C^{1,\varepsilon}$ и Ляпунова-Дини и функции и области класса LLD. Пусть функция $\varepsilon : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ не убывает и $\varepsilon(2t) \leq T\varepsilon(t)$ для некоторого $T \geq 1$ и всех $t \geq 0$.

Определение 11. Ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ принадлежит классу $C^{1,\varepsilon}$ в точке $z \in \partial\Omega$, если существуют $c_z > 0$ и такая (A, A) -карта (r, h) в точке z , что соответствующая функция ω непрерывно дифференцируема в U и

$$(57) \quad |\nabla\omega(\xi) - \nabla\omega(\eta)| \leq c_z \varepsilon(|\xi - \eta|), \quad \xi, \eta \in U.$$

Говорим, что $\Omega \in C^{1,\varepsilon}$, если Ω принадлежит классу $C^{1,\varepsilon}$ всюду в $\partial\Omega$. Если $\Omega \in C^{1,\varepsilon}$ для некоторой функции ε с условием Дини

$$\int_0^1 t^{-1} \varepsilon(t) dt < \infty,$$

то Ω называется областью Ляпунова-Дини. При $0 < \sigma \leq 1$ и $\varepsilon(t) = t^\sigma$ пишем в этих соглашениях $C^{1,\sigma}$ вместо $C^{1,\varepsilon}$.

Замечание. Принадлежность Ω классу $C^{1,\varepsilon}$ в точке z равносильна выполнению в окрестности z аналога условия (57) для единичной нормали к $\partial\Omega$ вместо $\nabla\omega$. Отсюда легко вывести, что если Ω принадлежит классу $C^{1,\varepsilon}$ в z , то для любого $\delta > 0$ существуют $c_z > 0$ и такая (δ, δ) -карта (r, h) в точке z , что $\nabla\omega(y') = 0$ (для $y = h(z)$) и верно (57).

Литература с участием класса $\bigcup_{0 < \sigma \leq 1} C^{1,\sigma}$ областей Ляпунова необозрима. В общем случае $n \geq 2$ области Ляпунова-Дини (называемые еще областями Дини) и их обобщения и аналоги применялись, в частности, в упомянутых в [32] статьях, а также в работах [11, теорема 7.6.2/3], [12], [13], [14], [24], [25], [26], [27], [28, раздел 4.3], [29], [31], [37], [39], [47], [48], [49], [51], [55], [58], [66], [69], [70], [71], [72, теоремы 14.6.3 и 15.6.1], [74], [75], [77], [80], [83], [84], [85], [91], [92], [94], [95]. Много работ с обобщениями областей Ляпунова-Дини есть у Л.И. Камынина и Б.Н. Химченко, см. [6, 7]. Специфика случая $n = 2$ состоит как в применении обобщений областей Ляпунова-Дини в связи с теоремой об

угловой производной (см. библиографию в [29, 31]), так и в терминологии (см., например, [45]), когда говорят о *гладких по Дини* кривых и областях.

Поясним, что может пониматься под обобщением областей Ляпунова-Дини. Пусть $\Omega \in C^{1,\varepsilon}$ и карта (r, h) построена по замечанию к определению 11. Тогда $|\nabla\omega(\xi)| \leq c_z \varepsilon (|\xi - y'|)$ при $\xi \in U$, откуда

$$|\omega(\xi) - \omega(y')| \leq E(\xi) \equiv c_z |\xi - y'| \varepsilon (|\xi - y'|)$$

для $\xi \in U$ по формуле Ньютона-Лейбница и монотонности ε . Следовательно,

$$(58a) \quad \mathcal{V}_E^+ \equiv \left\{ x \in V : x_n > y_n + E(x') \right\} \subset h(\Omega),$$

$$(58b) \quad \mathcal{V}_E^- \equiv \left\{ x \in V : x_n < y_n - E(x') \right\} \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{h(\Omega)}.$$

Если ε удовлетворяет условию Дини, то

$$(59) \quad \int_U \frac{E(\xi) d\xi}{|\xi - y'|^n} < \infty.$$

Во многих из вышеперечисленных работ рассматривались области со свойствами (58a) и/или (58b), в том числе для общих функций E со свойством (59). Отметим работу [26], в которой при некоторых ограничениях на ε дано описание областей класса $C^{1,\varepsilon}$ на языке условий, близких к (58).

Следующее определение обусловлено намерением равномерно ограничить величины S_I из теоремы 6. Если (κ, A, δ) -карта $(\mathfrak{I}, g, r, h)$ в точке z построена по лемме 21(ii) с $\tau = 1$, то в силу леммы 17 и неравенства (53) имеем

$$(60) \quad S_I \leq \sum_{J \in \mathfrak{X}} \Gamma_{IJ}^{(0,n)} c_J \leq c(\kappa) \sum_{J \in \mathfrak{X}} \Gamma_{IJ}^{(0,n)} \hat{c}_J \leq c(\kappa) C \sum_{J \in \mathfrak{X}} \Gamma_{IJ}^{(0,n)} b_J^{(1)}.$$

Определение 12. Функция f из (50) принадлежит $\text{LLD}(\overline{3\mathfrak{I}})$, если

$$\|f\|_{\text{LLD}(\overline{3\mathfrak{I}})} \equiv \sup_{I \in \mathfrak{X} \equiv \mathfrak{D}_3} \sum_{J \in \mathfrak{X}} \Gamma_{IJ}^{(0,n)} b_J^{(1)} < \infty.$$

Ограниченная область Ω принадлежит классу LLD , если для любого $z \in \partial\Omega$ существуют $\kappa^* \geq 1$, $A^* \geq 0$ и такая (κ^*, A^*, A^*) -карта $(\mathfrak{I}^*, g^*, r^*, h^*)$ в точке z , что $g_n^*(\cdot, 0) \in \text{LLD}(\overline{3\mathfrak{I}^*})$. При $\Omega \in \text{LLD}$ говорим также, что Ω — область локального типа Ляпунова-Дини.

Замечание. Таким образом, в силу (60) для функции (52с) получаем

$$(60') \quad S_I \leq \text{const} = c(\kappa) C \|f\|_{\text{LLD}(\overline{3\mathfrak{I}})}.$$

Для целей настоящей статьи подошла бы замена условия $f \in \text{LLD}(\overline{3\mathfrak{I}})$ на любое другое, которое гарантировало бы, что

$$(61) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{существуют } \kappa \geq 1 \text{ и гомеоморфизм } g \in \Xi^2(\mathfrak{I}, \kappa), \text{ для которого} \\ g_n(\xi, 0) \equiv f(\xi) \text{ и } \sup_{I \in \mathfrak{X}} \sum_{J \in \mathfrak{X}} \Gamma_{IJ}^{(0,n)} \hat{c}_J < \infty. \end{array} \right.$$

Мы видели, что из $f \in \text{LLD}(\overline{3\mathfrak{I}})$ следует (61). О степени близости этих двух условий можно судить по тому, что если $g \in \Xi^2(\mathfrak{I}, \kappa)$ и $g_n(\xi, 0) \equiv f(\xi)$, то в силу лемм 23 и 11

$$(61') \quad \|f\|_{\text{LLD}(\overline{3\mathfrak{I}})} \leq c(n) \sup_{I \in \mathfrak{X}} \sum_{K \in \mathfrak{X}} \left[1 + \log_2 \frac{[I, K]}{l_K} \right] \Gamma_{IK}^{(0,n)} \hat{c}_K.$$

Обсудим отношения LLD-классов с другими классами функций и областей. Несложно проверить, что пространство $\text{LLD}(\overline{3\mathfrak{J}})$ с нормой

$$\|f\|_{L^1(\overline{3\mathfrak{J}})} + \|f\|_{\text{LLD}(\overline{3\mathfrak{J}})}$$

— банахово, и что оно непрерывно вложено в пространство всех липшицевых функций с нормой

$$\|f\|_{L^\infty(\overline{3\mathfrak{J}})} + \sup_{\xi \neq \eta} \frac{|f(\xi) - f(\eta)|}{|\xi - \eta|}.$$

Поэтому $\text{LLD} \subset C^{0,1}$. В разделе 5.5 будет доказано, что $\text{LLD}(\overline{3\mathfrak{J}}) \setminus C^1(\overline{3\mathfrak{J}}) \neq \emptyset$. Покажем, что $\Omega \in \text{LLD}$, если Ω — область Ляпунова-Дини. По определению 11 для любого $z \in \partial\Omega$ существует (A, A) -карта $(r, \vec{h})$ со свойством (57). Построим (κ, A, A) -карту $(\mathfrak{J}, g, r, h)$ в точке z по лемме 21(ii). В силу второго из тождеств (55) для ω тоже верно (57). Значит, по формуле Ньютона-Лейбница

$$(62a) \quad b_J^{(1)} \leq b_J^{(\infty)} \leq C_1(n) c_z \varepsilon (l_J 3\sqrt{n-1}/2).$$

Отсюда по лемме 10(i) с $b = \max\{l_I, 2^k l_J\}$

$$(62b) \quad \begin{aligned} \sum_{J \in \mathfrak{X}} \Gamma_{IJ}^{(0,n)} b_J^{(1)} &\leq C_1 c_z \sum_{k=-\infty}^0 \varepsilon \left(2^k l_J \frac{3\sqrt{n-1}}{2} \right) \sum_{J \in \mathfrak{X}: l_J = 2^k l_J} \frac{(2^k l_J)^{\frac{1}{2}} l_J^{n-\frac{1}{2}}}{[I, J]^n} \\ &\leq C_2(n) c_z \sum_{k=-\infty}^0 \varepsilon \left(2^k l_J \frac{3\sqrt{n-1}}{2} \right) \\ &\leq C_3(n) c_z \int_0^{l_J 3\sqrt{n-1}} t^{-1} \varepsilon(t) dt < \infty. \end{aligned}$$

Поэтому $f \in \text{LLD}(\overline{3\mathfrak{J}})$ и $\Omega \in \text{LLD}$. Наконец, сделаем одно замечание насчет условий (58) и (59). Пусть $n = 2$, $\mathfrak{J} \in \mathcal{D}$ и

$$f(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi = \mathfrak{c}_{\mathfrak{J}}, \\ (\xi - \mathfrak{c}_{\mathfrak{J}}) \left(\ln \frac{2l_{\mathfrak{J}}}{|\xi - \mathfrak{c}_{\mathfrak{J}}|} \right)^{-1/2}, & \xi \in \overline{3\mathfrak{J}} \setminus \{\mathfrak{c}_{\mathfrak{J}}\}. \end{cases}$$

Эта функция непосредственно связана с примером из [29, с. 99]. Пусть граница области Ω задаётся в точке z функцией f и принадлежит классу C^∞ в остальных точках. Можно проверить, что $f \in \text{LLD}(\overline{3\mathfrak{J}})$ и, следовательно, $\Omega \in \text{LLD}$, однако не существует (A, A) -карты в точке z и функции $E \geq 0$ со свойством (59) таких, что выполнено (58a) либо (58b).

Сформулируем один технический результат.

Лемма 24. *Если $\Omega \in \text{LLD}$, то для любых $z \in \partial\Omega$ и $A > 0$ найдётся такое $l_* > 0$, что $g_n(\cdot, 0) \in \text{LLD}(\overline{3\mathfrak{J}})$ для любой (κ, A, A) -карты $(\mathfrak{J}, g, r, h)$ в точке z со свойством $l_{\mathfrak{J}} \leq l_*$.*

Доказательство леммы 24 несложно, но громоздко, поэтому только наметим его. По определению 12 существует (κ^*, A^*, A^*) -карта $(\mathfrak{J}^*, g^*, r^*, h^*)$ в точке z со свойством

$$g_n^*(\cdot, 0) \in \text{LLD}(\overline{3\mathfrak{J}^*}).$$

Для установления включения $g_n(\cdot, 0) \in \text{LLD}(\overline{3\mathfrak{J}})$ надо оба LLD-условия выразить в евклидовых терминах. Двоичные семейства $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}^*$ заменяются на такое семейство $\{B_i\}$ шаров с центрами на $\partial\Omega$ и радиусами 2^k ($k \leq k_0$), что

для любого k шары радиуса 2^k образуют покрытие некоторой фиксированной окрестности точки z в $\partial\Omega$, причем пересечение более чем C_0 “утроенных” шаров $3B_i$ пусто, где $C_0 \in \mathbb{N}$ не зависит от k . Рёбра l_I заменяются на радиусы шаров, а величина $[I, J]$ — на $\text{diam}(B_i \cup B_j)$. В выражении для величины $b_I^{(1)}$ область интегрирования $\overline{3\mathfrak{I}} \cap \overline{3I}$ заменяется на $\partial\Omega \cap 3B_i$, мера $d\xi$ — на поверхностную меру на $\partial\Omega$, а $|f - \gamma|$ — на расстояние от $\xi \in \partial\Omega$ до некоторой гиперплоскости. При перечисленных заменах возникают постоянные множители (которые могут зависеть от A и A^*), что не важно для условия $g_n(\cdot, 0) \in \text{LLD}(\overline{3\mathfrak{I}})$. $\square$

4.4. Один класс числовых семейств. Пусть $1 < p < \infty$, $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\mathfrak{I} \in \mathcal{D}$.

Определение 13. Говорим, что задано $(p, \lambda, \mathfrak{I})$ -семейство $\{a_I\}$, если числа $0 < a_I < \infty$ ($I \in \mathfrak{X} \equiv \mathfrak{D}_{\mathfrak{I}}$) удовлетворяют условиям

$$(63a) \quad (\exists \theta_1 > 0) (\forall K \in \mathfrak{X}) \quad \sum_{I \in \mathfrak{X}: K \in \mathfrak{L}_I^{\mathfrak{X}}} l_I^{\alpha p} a_I \leq \theta_1 l_K^{\alpha p} a_K,$$

$$(63b) \quad (\exists \theta_2 > 0) (\forall K \in \mathfrak{X}) \quad \sum_{J \in \mathfrak{X}: J \subset K} l_J^{\beta \frac{p}{p-1}} a_J^{-\frac{1}{p-1}} \leq \theta_2 l_K^{\beta \frac{p}{p-1}} a_K^{-\frac{1}{p-1}},$$

где $\alpha = -\lambda$ и $\beta = n + 1 - \lambda$.

Напомним, что куб $K(I, J)$ введён в разделе 2.5.

Лемма 25. Для любых $\beta' > 0$ и $\alpha' > 0$ выполнены неравенства

$$(63a') \quad \sum_{I \in \mathfrak{X}} \Gamma_{IJ}^{(\alpha p, \beta' p)} \frac{a_I}{a_{K(I, J)}} \leq \Theta_1 \equiv c(p, \alpha, \beta') \theta_1, \quad J \in \mathfrak{X},$$

$$(63b') \quad \sum_{J \in \mathfrak{X}} \Gamma_{IJ}^{(\alpha' \frac{p}{p-1}, \beta \frac{p}{p-1})} \left(\frac{a_{K(I, J)}}{a_J} \right)^{\frac{1}{p-1}} \leq \Theta_2 \equiv c'(n, p, \alpha', \beta) \theta_2, \quad I \in \mathfrak{X}.$$

Доказательство. Согласно (25d) и соотношениям $J \subset K(I, J)$ и $K(I, J) \in \mathfrak{L}_I^{\mathfrak{X}}$

$$\begin{aligned} \sum_{I \in \mathfrak{X}} \Gamma_{IJ}^{(\alpha p, \beta' p)} \frac{a_I}{a_{K(I, J)}} &\leq C_1(p, \alpha, \beta') l_J^{\beta' p} \sum_{I \in \mathfrak{X}} \frac{l_I^{\alpha p}}{l_{K(I, J)}^{(\alpha + \beta') p}} \frac{a_I}{a_{K(I, J)}}, \\ \sum_{I \in \mathfrak{X}} \frac{l_I^{\alpha p}}{l_{K(I, J)}^{(\alpha + \beta') p}} \frac{a_I}{a_{K(I, J)}} &= \sum_{K \in \mathfrak{X}: J \subset K} \frac{1}{l_K^{(\alpha + \beta') p} a_K} \sum_{I \in \mathfrak{X}: K(I, J) = K} l_I^{\alpha p} a_I \\ &\stackrel{(63a)}{\leq} \theta_1 \sum_{K \in \mathfrak{X}: J \subset K} l_K^{-\beta' p} \leq \theta_1 C_2(p, \beta') l_J^{-\beta' p}. \end{aligned}$$

Это значит, что выполнено (63a') с $c = C_1 C_2$. Согласно (25d)

$$\begin{aligned} \sum_{J \in \mathfrak{X}} \Gamma_{IJ}^{(\alpha' \frac{p}{p-1}, \beta \frac{p}{p-1})} \left(\frac{a_{K(I, J)}}{a_J} \right)^{\frac{1}{p-1}} \\ \leq C_3(p, \alpha', \beta) l_I^{\alpha' \frac{p}{p-1}} \sum_{J \in \mathfrak{X}} \frac{l_J^{\beta \frac{p}{p-1}}}{l_{K(I, J)}^{(\alpha' + \beta) \frac{p}{p-1}}} \left(\frac{a_{K(I, J)}}{a_J} \right)^{\frac{1}{p-1}}. \end{aligned}$$

Снова используя соотношения $K(I, J) \in \mathfrak{L}_I^{\mathfrak{X}}$ и $J \subset K(I, J)$, получаем

$$\sum_{J \in \mathfrak{X}} \frac{l_J^{\beta \frac{p}{p-1}}}{l_{K(I, J)}^{(\alpha' + \beta) \frac{p}{p-1}}} \left(\frac{a_{K(I, J)}}{a_J} \right)^{\frac{1}{p-1}} = \sum_{K \in \mathfrak{L}_I^{\mathfrak{X}}} \frac{a_K^{\frac{1}{p-1}}}{l_K^{(\alpha' + \beta) \frac{p}{p-1}}} \sum_{J \in \mathfrak{X}: K(I, J) = K} l_J^{\beta \frac{p}{p-1}} a_J^{-\frac{1}{p-1}}$$

$$\stackrel{(63b)}{\leq} \theta_2 \sum_{K \in \mathfrak{L}_I^{\mathfrak{X}}} l_K^{-\alpha' \frac{p}{p-1}} \leq \theta_2 C_4(n, p, \alpha') l_I^{-\alpha' \frac{p}{p-1}}.$$

Это значит, что выполнено (63b') с $c' = C_3 C_4$. $\square$

Интерес к определению 13 состоит в следующем варианте леммы Шура.

Теорема 8. Для любых $(p, \lambda, \mathfrak{I})$ -семейства $\{a_I\}$ и вещественного $\sigma < \lambda$ существует такое $C = C(n, p, \lambda, \theta_1, \theta_2, \sigma) > 0$, что для любых чисел $f_J \geq 0$

$$\sum_{I \in \mathfrak{X}} a_I \left(\sum_{J \in \mathfrak{X}} \Gamma_{IJ}^{(-\sigma, n+1-\sigma)} f_J \right)^p \leq C \sum_{J \in \mathfrak{X}} a_J f_J^p.$$

Доказательство. Применим лемму 25 к $\beta' = \alpha' = \lambda - \sigma$. По неравенству Гёльдера и оценке (63b')

$$\begin{aligned} \left(\sum_{J \in \mathfrak{X}} \Gamma_{IJ}^{(-\sigma, n+1-\sigma)} f_J \right)^p &= \left(\sum_{J \in \mathfrak{X}} \Gamma_{IJ}^{(\alpha, \beta')} \left(\frac{a_J}{a_{K(I, J)}} \right)^{1/p} f_J \cdot \Gamma_{IJ}^{(\alpha', \beta)} \left(\frac{a_{K(I, J)}}{a_J} \right)^{1/p} \right)^p \\ &\leq \left(\sum_{J \in \mathfrak{X}} \Gamma_{IJ}^{(\alpha p, \beta' p)} \frac{a_J f_J^p}{a_{K(I, J)}} \right) \left(\sum_{J \in \mathfrak{X}} \Gamma_{IJ}^{(\alpha' \frac{p}{p-1}, \beta \frac{p}{p-1})} \left(\frac{a_{K(I, J)}}{a_J} \right)^{\frac{1}{p-1}} \right)^{p-1} \\ &\leq \Theta_2^{p-1} \sum_{J \in \mathfrak{X}} \Gamma_{IJ}^{(\alpha p, \beta' p)} \frac{a_J f_J^p}{a_{K(I, J)}}. \end{aligned}$$

Отсюда ввиду (63a') получаем требуемое неравенство с $C = \Theta_1 \Theta_2^{p-1}$. $\square$

4.5. Класс $\mathfrak{A}_p(\Omega)_\lambda$. Пусть $1 < p < \infty$, $\lambda > 0$, $\Omega \in C^{0,1}$ и $\varrho(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega)$.

Определение 14. Функция $w \succ 0$ на Ω принадлежит классу $\mathfrak{A}_p(\Omega)_\lambda$, если $w \in L^1(\Omega)$, $\varrho^{\frac{p}{p-1}} w^* \in L^1(\Omega)$ для веса

$$w^*(x) = \left(\varrho(x)^{-n} \int_{|x-Y| < \varrho(x)/\sqrt{100n}} w(Y) dY \right)^{-\frac{1}{p-1}}, \quad x \in \Omega,$$

и существуют такие $C > 0$ и $r_0 > 0$, что для любых $z \in \partial\Omega$ и $0 < r \leq r_0$ для $B = \{x \in \Omega: |x - z| < r\}$ выполнены неравенства

$$(64a) \quad \int_B \varrho^{-\lambda p} w dx \leq C r^{-\lambda p} \int_B w dx,$$

$$(64b) \quad \int_B \varrho^{(1-\lambda)\frac{p}{p-1}} w^* dx \leq C r^{-\frac{\lambda p}{p-1}} \int_B \varrho^{\frac{p}{p-1}} w^* dx.$$

Положим также $\mathfrak{A}_p^{\text{comp}}(\Omega)_\lambda = \mathfrak{A}_p(\Omega)_\lambda \cap A_p^{\text{comp}}(\Omega)$ и

$$\mathfrak{A}_p(\Omega) = \bigcup_{\lambda > 0} \mathfrak{A}_p(\Omega)_\lambda, \quad \mathfrak{A}_p^{\text{comp}}(\Omega) = \bigcup_{\lambda > 0} \mathfrak{A}_p^{\text{comp}}(\Omega)_\lambda = \mathfrak{A}_p(\Omega) \cap A_p^{\text{comp}}(\Omega).$$

Замечание 1. Обозначим $C' = (2C)^{-\frac{1}{\lambda p}}$. Тогда в силу (64a)

$$\begin{aligned} \int_B \varrho^{-\lambda p} w dx &\leq C r^{-\lambda p} \int_{B \cap \{\varrho > C'r\}} w dx + \frac{1}{2} \int_{B \cap \{\varrho \leq C'r\}} \varrho^{-\lambda p} w dx, \\ (64a') \quad \int_B \varrho^{-\lambda p} w dx &\leq 2C r^{-\lambda p} \int_{B \cap \{\varrho > C'r\}} w dx. \end{aligned}$$

Аналогичным способом для $C'' = (2C)^{-\frac{p-1}{\lambda p}}$ получаем

$$(64b') \quad \int_B \varrho^{(1-\lambda)\frac{p}{p-1}} w^* dx \leq 2Cr^{-\frac{\lambda p}{p-1}} \int_{B \cap \{\varrho > C''r\}} \varrho^{\frac{p}{p-1}} w^* dx.$$

Замечание 2. При $w \in \mathfrak{A}_p^{\text{comp}}(\Omega)_\lambda$ или $w \in \mathfrak{A}_p^{\text{comp}}(\Omega)$ подразумевается, что постоянная Макенхаупта $A_p[w]$ вычисляется для класса $A_p^{\text{comp}}(\Omega) = A_p(\Omega, \partial\Omega)_1$.

Лемма 26. Для любых $A \geq 0$, $\theta^* \geq 1$, $c_0 > 0$ и $c_1 > 0$ существует

$$c = c(n, A, \theta^*, c_0, c_1) \geq 1$$

со следующим свойством. Пусть даны (A, A) -карта (r, h) в точке $z \in \partial\Omega$, точка $Z \in \partial\Omega$ со свойством $|z - Z| \leq 3r/16$, $0 < R \leq r/4\sqrt{1+A^2}$ и точка $x_0 \in \Omega$ такие, что

$$B_0 \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < c_0 R\} \subset B_1 \equiv \{x \in \Omega : |x - Z| < R \text{ и } \varrho(x) \geq c_1 R\}.$$

Тогда для любого $w \in D^{\text{comp}}(\Omega)$ с $D[w] \leq \theta^*$ имеем $|B_1|_w \leq c|B_0|_w$.

Доказательство. Для достаточно малого $c_2 = c_2(n, c_0, c_1) \in (0, 1/4\sqrt{n}]$ куб

$$Q_\zeta = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - \zeta|_\infty < c_2 R\}$$

при $\zeta = x_0$ содержится в B_0 , а при $\zeta \in B_1$ — принадлежит семейству кубов

$$F = \{Q_\zeta : \ell(Q_\zeta) = 2c_2 R \leq 2 \text{dist}(Q_\zeta, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)/(4 + \sqrt{n}) \text{ и } Q_\zeta \subset B_2\},$$

где

$$B_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - z| < r' \equiv 3r/16 + \sqrt{1+A^2}R + \sqrt{n}c_2 R\}.$$

Если $Q_{\zeta_1} \in F$, $Q_{\zeta_2} \in F$ и $|\zeta_1 - \zeta_2| \leq c_2 R$, то для куба $Q = 2Q_{\zeta_1}$ имеем

$$2\ell(Q_{\zeta_2}) = \ell(Q) = 4c_2 R \leq \text{dist}(Q_{\zeta_1}, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) - \sqrt{n}c_2 R \leq \text{dist}(Q, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$$

и $Q_{\zeta_1} \cup Q_{\zeta_2} \subset Q$, откуда $|Q_{\zeta_1}|_w \leq |Q|_w \leq \theta^* |Q_{\zeta_2}|_w$.

Положим $Y = h(Z)$ и $Y^* = Y + (0, \dots, 0, \sqrt{1+A^2}R)$. Рассмотрим для любого $\zeta \in B_1$ вектор $t = Y^* - h(\zeta)$ и кубы

$$\mathcal{Q}_s = Q_{h^{-1}(h(\zeta)+st)}, \quad 0 \leq s \leq 1.$$

Покажем, что не только куб $\mathcal{Q}_0 = Q_\zeta$ принадлежит F , но и остальные $\mathcal{Q}_s$. Из равенства $\mathcal{Q}_1 = Q_{h^{-1}(h(Z)+(0,\dots,0,\sqrt{1+A^2}R))}$ следует, что $\mathcal{Q}_1 \subset B_2$ и $\mathcal{Q}_s \subset B_2$ по выпуклости B_2 . В силу соотношений

$$|Y^* - Y| = \sqrt{1+A^2}R > \sqrt{1+A^2}|\zeta - Z| = \sqrt{1+A^2}|h(\zeta) - Y|$$

и геометрии треугольника $\{Y^*, Y, h(\zeta)\}$ получаем $t_n > A|t'|$. Расстояние

$$\text{dist}(\mathcal{Q}_s, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) = \text{dist}(h(\mathcal{Q}_s), h(\partial\Omega))$$

достигается, ввиду условий $h(\mathcal{Q}_s) \subset h(B_2)$ и $r' \leq r/2$ и вывода неравенств (51), на графике соответствующей карте (r, h) функции ω и потому, ввиду условия $t_n > A|t'|$, растёт с ростом s . Значит, из $\mathcal{Q}_0 \in F$ вытекает $\mathcal{Q}_s \in F$.

Возьмём наименьшее целое $N \geq \frac{1+\sqrt{1+A^2}}{c_2}$. Кубы $\mathcal{Q}_0 = Q_\zeta$ и $\mathcal{Q}_1 = Q_{h^{-1}Y^*}$ можно соединить такой цепочкой $\{Q_{\zeta_i}\}_{i=0}^N \subset F$, что $|\zeta_{i-1} - \zeta_i| \leq c_2 R$, откуда $|Q_\zeta|_w \leq (\theta^*)^N |Q_{h^{-1}Y^*}|_w$ и $|Q_{h^{-1}Y^*}|_w \leq (\theta^*)^N |Q_\zeta|_w$. Поэтому

$$|Q_{\zeta_1}|_w \leq (\theta^*)^{2N} |Q_{\zeta_2}|_w, \quad \zeta_1, \zeta_2 \in B_1.$$

Покрывая множество B_1 равномерно ограниченным числом кубов Q_ζ ($\zeta \in B_1$), с учетом вложения $Q_{x_0} \subset B_0$ приходим к неравенству $|B_1|_w \leq c|B_0|_w$. $\square$

Свяжем определения 13 и 14 (см. также лемму 2(iii)).

Лемма 27. Пусть $w \in \mathfrak{A}_p(\Omega)_\lambda \cap D^{\text{comp}}(\Omega)$ и дана (κ, A, A) -карта $(\mathfrak{I}, g, r, h)$ в точке $z \in \partial\Omega$ со свойством $l_{\mathfrak{I}} \leq \min \left\{ \frac{r_0}{2\kappa\sqrt{n}}, \frac{r}{8\kappa\sqrt{n}\sqrt{1+A^2}} \right\}$. Положим

$$(65) \quad a_I = \left| h^{-1}(g(I^\square)) \right|_w, \quad I \in \mathfrak{X} \equiv \mathfrak{D}_{\mathfrak{I}}.$$

Тогда $\{a_I\}$ является $(p, \lambda, \mathfrak{I})$ -семейством.

Замечание. Из определений 5 и 7 и соотношений (28), (52b), (52c) следует, что $h^{-1}(g(I^\square)) \in \Omega$. Поэтому формула (65) корректна.

Доказательство. Неравенства $0 < a_I < \infty$ вытекают из $w \succ 0$ и $w \in L^1(\Omega)$.

Докажем (63a). Если $x \in h^{-1}(g(I^\square))$, то $X \equiv h(x) \in g(I^\square)$, откуда

$$(66a) \quad \varrho(x) = \text{dist}(X, h(\partial\Omega)) \leq X_n - \omega(X') \leq \kappa \mathfrak{G}(X) \leq 2\kappa l_I$$

на основании (52b), левой оценки в (51), билипшицевости g и условия

$$\mathfrak{g}(X) = (X', \mathfrak{G}(X)) \in I^\square.$$

Аналогично, с учетом правого неравенства в (51) получаем

$$(66b) \quad \varrho(x) = \text{dist}(X, h(\partial\Omega)) \geq \frac{X_n - \omega(X')}{\sqrt{1+A^2}} \geq \frac{\mathfrak{G}(X)}{\kappa\sqrt{1+A^2}} \geq \frac{l_I}{\kappa\sqrt{1+A^2}}.$$

Пусть $K \in \{\mathfrak{I}\} \cup (\mathfrak{X} \setminus \mathfrak{I}_\odot)$. При $K \in \mathfrak{L}_I^\mathfrak{X}$ имеем

$$I^\square \subset Q_K \equiv Q \cap (\overline{3K} \times (0, 2l_K)),$$

поэтому в силу (66a)

$$\begin{aligned} \sum_{I \in \mathfrak{X}: K \in \mathfrak{L}_I^\mathfrak{X}} l_I^{\alpha p} a_I &\leq \sum_{I \in \mathfrak{X}: K \in \mathfrak{L}_I^\mathfrak{X}} (2\kappa)^{\lambda p} \int_{h^{-1}(g(I^\square))} \varrho^{-\lambda p} w \, dx \\ &\leq (2\kappa)^{\lambda p} \int_{h^{-1}(g(Q_K))} \varrho^{-\lambda p} w \, dx. \end{aligned}$$

Пусть $Z = h^{-1} \circ g|_{(c_K, 0)}$, $R = 2\kappa\sqrt{n}l_K$ и $B = \{x \in \Omega: |x - Z| < R\}$. Тогда $Z \in \partial\Omega$, $R \leq 2\kappa\sqrt{n}l_{\mathfrak{I}} \leq \min\{r_0, r/4\sqrt{1+A^2}\}$ и $g(Q_K) \subset h(B)$ на основании билипшицевости g . В силу (64a')

$$\sum_{I \in \mathfrak{X}: K \in \mathfrak{L}_I^\mathfrak{X}} l_I^{\alpha p} a_I \leq (2\kappa)^{\lambda p} 2CR^{-\lambda p} \int_{B \cap \{\varrho > C'R\}} w \, dx.$$

Для $c_1 = \min \left\{ C', \frac{1}{2\kappa^2\sqrt{n}\sqrt{1+A^2}} \right\}$ ввиду $g(K^\square) \subset g(Q_K) \subset h(B)$ и (66b) имеем

$$(B \cap \{\varrho > C'R\}) \cup h^{-1}(g(K^\square)) \subset B \cap \{\varrho \geq c_1 R\},$$

где правое множество суть B_1 в терминах леммы 26. Кроме того, для некоторого $c_0 = c_0(n, \kappa) > 0$ существует $x_0 \in \Omega$ такое, что $B_0 \subset h^{-1}(g(K^\square))$. Учитывая еще соотношения $|z - Z| = |h(z) - h(Z)| \leq \sqrt{1+A^2}(3l_{\mathfrak{I}}/2)\sqrt{n-1} < 3r/16$, можем применить лемму 26 и получить

$$(67) \quad \sum_{I \in \mathfrak{X}: K \in \mathfrak{L}_I^\mathfrak{X}} l_I^{\alpha p} a_I \leq C_1(n, p, \lambda, \kappa, A, C, \theta^*) l_K^{\alpha p} a_K, \quad \theta^* \geq D[w].$$

При $K \in \mathfrak{I}_\odot \setminus \{\mathfrak{I}\}$ эти же выкладки показывают, что $a_{\mathfrak{I}} \leq C_1 a_K$, откуда

$$\sum_{I \in \mathfrak{X}: K \in \mathfrak{L}_I^{\mathfrak{X}}} l_I^{\alpha p} a_I = \sum_{I \in \mathfrak{X}} l_I^{\alpha p} a_I \leq C_1 l_{\mathfrak{I}}^{\alpha p} a_{\mathfrak{I}} \leq C_1^2 l_K^{\alpha p} a_K,$$

где в первом неравенстве применено (67) с $K = \mathfrak{I}$. Мы доказали (63а) с

$$\theta_1 = \theta_1(n, p, \lambda, \kappa, A, C, \theta^*) = C_1^2.$$

Докажем (63b). Пусть $K \in \mathfrak{X}$. Если $x \in h^{-1}(g(K^\square))$, $Y \in \mathbb{R}^n$ и $|x - Y| < c\varrho(x)$, где $c = \frac{1}{10\sqrt{n}}$, то ввиду (66а), билипшицевости g и теоремы Пифагора

$$|Y - Z| \leq |x - Y| + |h(x) - h(Z)| < c2\kappa l_K + \kappa l_K \sqrt{\frac{n-1}{4}} + 4 < 2\kappa\sqrt{n}l_K = R,$$

так что $Y \in B$. Из неравенства (66b) следует, что $\varrho(Y) > (1-c)\varrho(x) \geq c_1 R$ для $c_1 = \frac{1-c}{2\kappa^2\sqrt{n}\sqrt{1+A^2}}$. Поэтому

$$\varrho(x)^n w^*(x)^{1-p} = \int_{|x-Y| < c\varrho(x)} w dY \leq \int_{B \cap \{\varrho(Y) > c_1 R\}} w dY.$$

Рассматривая $Y = x$, убеждаемся, что $h^{-1}(g(K^\square)) \subset B_1 = B \cap \{\varrho \geq c_1 R\}$. Как и выше, $B_0 \subset h^{-1}(g(K^\square))$ в терминах леммы 26, откуда

$$\begin{aligned} \varrho(x)^n w^*(x)^{1-p} &\leq C_2(n, \kappa, A, \theta^*) a_K, \\ a_K^{-\frac{1}{p-1}} &\leq C_3(n, p, \kappa, A, \theta^*) l_K^{-\frac{n}{p-1}} w^*(x), \\ a_K^{-\frac{1}{p-1}} &\leq C_4(n, p, \kappa, A, \theta^*) l_K^{-\frac{n}{p-1}-n} \int_{h^{-1}(g(K^\square))} w^*(x) dx. \end{aligned}$$

Заменяя K на J и пользуясь равенством $\beta = n + 1 - \lambda$, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{J \in \mathfrak{X}: J \subset K} l_J^{\beta \frac{p}{p-1}} a_J^{-\frac{1}{p-1}} &\leq C_4 \sum_{J \in \mathfrak{X}: J \subset K} l_J^{(1-\lambda) \frac{p}{p-1}} \int_{h^{-1}(g(J^\square))} w^*(x) dx \\ &\stackrel{(66)}{\leq} C_5(n, p, \lambda, \kappa, A, \theta^*) \int_B \varrho^{(1-\lambda) \frac{p}{p-1}} w^* dx \\ &\stackrel{(64b')}{\leq} C_5 2CR^{-\frac{\lambda p}{p-1}} \int_{B \cap \{\varrho > C''R\}} \varrho^{\frac{p}{p-1}} w^* dx \\ &\leq C_6(n, p, \lambda, \kappa, A, C, \theta^*) R^{(1-\lambda) \frac{p}{p-1} + n} \sup_{B \cap \{\varrho > C''R\}} w^*. \end{aligned}$$

Допустим, что установлена оценка

$$(68) \quad \sup_{B \cap \{\varrho > C''R\}} w^* \leq C_7(n, p, \kappa, A, C'', \theta^*) \inf_{h^{-1}(g(K^\square))} w^*.$$

Покрывая множество $h^{-1}(g(K^\square))$ не более чем $C_8(n, \kappa, A)$ шарами

$$(69) \quad B_x \equiv \{Y \in \mathbb{R}^n : |x - Y| < c\varrho(x)\},$$

где $x \in h^{-1}(g(K^\square))$, найдём такое x , что

$$a_K \leq C_8 |B_x|_w = C_8 \varrho(x)^n w^*(x)^{1-p} \stackrel{(66a)}{\leq} C_8 (2\kappa l_K)^n \left(\inf_{h^{-1}(g(K^\square))} w^* \right)^{1-p},$$

поэтому оценка (63b) выполнена с постоянной

$$\theta_2 = \theta_2(n, p, \lambda, \kappa, A, C, \theta^*) = C_6 C_7 C_8^{\frac{1}{p-1}} (2\kappa)^\beta \sqrt{n}^{(1-\lambda)\frac{p}{p-1}+n}.$$

Докажем (68). Ввиду (66b) и доказательства леммы 26 найдётся

$$N = N(n, \kappa, A, C'') \in \mathbb{N}$$

такое, что любые точки $x_0 \in B \cap \{\varrho > C''R\}$ и $x_N \in h^{-1}(g(K^\square))$ можно соединить цепочкой $\{x_i\}_0^N \subset \Omega$ со свойством $|x_{i-1} - x_i| \leq c\varrho(x_i)$. Очевидно, что

$$Q_- \equiv \left\{ Y \in \mathbb{R}^n : |x_{i-1} - Y|_\infty < \frac{1}{10n} \varrho(x_{i-1}) \right\} \subset B_{x_{i-1}},$$

$$w^*(x_{i-1}) = \varrho(x_{i-1})^{\frac{n}{p-1}} |B_{x_{i-1}}|_w^{-\frac{1}{p-1}} \leq (1+c)^{\frac{n}{p-1}} \varrho(x_i)^{\frac{n}{p-1}} |Q_-|_w^{-\frac{1}{p-1}}.$$

В силу неравенства $\frac{2}{5\sqrt{n}(1-c)}\varrho(x_{i-1}) < \varrho(x_{i-1}) - \frac{\sqrt{n}}{5\sqrt{n}(1-c)}\varrho(x_{i-1})$ куб

$$Q = \frac{2\sqrt{n}}{1-c} Q_-$$

содержится в Ω и обладает свойством $\ell(Q) \leq \text{dist}(Q, \partial\Omega)$. Поэтому

$$w^*(x_{i-1}) \leq C_9(n, p, \theta^*) \varrho(x_i)^{\frac{n}{p-1}} |Q|_w^{-\frac{1}{p-1}}.$$

Если $X \in B_{x_i}$, то $|x_{i-1} - X|_\infty \leq |x_{i-1} - x_i| + |x_i - X| < 2c\varrho(x_i) \leq \frac{2c}{1-c}\varrho(x_{i-1})$. Отсюда $B_{x_i} \subset Q$, $w^*(x_{i-1}) \leq C_9 w^*(x_i)$ и (68) выполнено с $C_7 = C_9^N$. $\square$

Некоторые свойства пространства $W_w^{m,p}(\Omega)$ с весом $w \in \mathfrak{A}_p^{\text{comp}}(\Omega)$ нетрудно получить из следующего результата.

Лемма 28. *Если $w \in \mathfrak{A}_p^{\text{comp}}(\Omega)_\lambda$, то имеет место непрерывное вложение*

$$L_w^p(\Omega) \subset L_{\varrho^{1-\lambda}}^1(\Omega).$$

Доказательство. На основании неравенства Гёльдера

$$\|u\|_{L_{\varrho^{1-\lambda}}^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L_w^p(\Omega)} \left(\int_\Omega \varrho^{(1-\lambda)\frac{p}{p-1}} w^{-\frac{1}{p-1}} dY \right)^{\frac{p-1}{p}} \equiv \|u\|_{L_w^p(\Omega)} \mathscr{J}^{\frac{p-1}{p}}.$$

По теореме VI.1 из [20] существует счетное семейство $\{Q_j\}$ замкнутых кубов с попарно непересекающимися внутренностями и свойствами

$$\Omega = \bigcup_j Q_j,$$

$$\sqrt{n}\ell(Q_j) \leq \text{dist}(Q_j, \partial\Omega) \leq 4\sqrt{n}\ell(Q_j).$$

С учетом оценки $|Q_j|_w |Q_j|_w^{\frac{p-1}{p-1/(p-1)}} \leq A_p[w] |Q_j|^p$ имеем

$$\begin{aligned} \mathscr{J} &= \sum_j \int_{Q_j} \varrho^{(1-\lambda)\frac{p}{p-1}} w^{-\frac{1}{p-1}} dY \\ &\leq C_1(n, p, \lambda) A_p[w]^{\frac{1}{p-1}} \sum_j \ell(Q_j)^{(1-\lambda)\frac{p}{p-1} + \frac{np}{p-1}} |Q_j|_w^{-\frac{1}{p-1}}. \end{aligned}$$

Если $x \in \frac{1}{11}Q_j$, то шар (69) содержится в Q_j , поскольку при $Y \in B_x$

$$|c_{Q_j} - Y|_\infty \leq \frac{\ell(Q_j)}{22} + c\varrho(x) \leq \frac{\ell(Q_j)}{22} + c \left[\text{dist}(Q_j, \partial\Omega) + \frac{6}{11}\sqrt{n}\ell(Q_j) \right]$$

$$\leq \frac{\ell(Q_j)}{22} + \frac{1}{10\sqrt{n}} \frac{50}{11} \sqrt{n} \ell(Q_j) = \frac{\ell(Q_j)}{2}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} w^*(x) &= \varrho(x)^{\frac{n}{p-1}} |B_x|_w^{-\frac{1}{p-1}} \geq (\sqrt{n} \ell(Q_j))^{\frac{n}{p-1}} |Q_j|_w^{-\frac{1}{p-1}}, \\ |Q_j|_w^{-\frac{1}{p-1}} &\leq 11^n n^{-\frac{n}{2(p-1)}} \ell(Q_j)^{-\frac{np}{p-1}} \int_{\frac{1}{11} Q_j} w^*(x) dx, \\ \mathcal{J} &\leq C_2(n, p, \lambda) A_p[w]^{\frac{1}{p-1}} \sum_j \ell(Q_j)^{(1-\lambda)\frac{p}{p-1}} \int_{\frac{1}{11} Q_j} w^*(x) dx \\ &\leq C_3(n, p, \lambda) A_p[w]^{\frac{1}{p-1}} \int_{\Omega} \varrho^{(1-\lambda)\frac{p}{p-1}} w^* dx. \end{aligned}$$

Используя условие $\varrho^{\frac{p}{p-1}} w^* \in L^1(\Omega)$ и (64b) для конечного числа множеств B , покрывающих в Ω некоторую окрестность границы $\partial\Omega$, получаем $\mathcal{J} < \infty$ и утверждение леммы. $\square$

Следующая лемма порождена намерением сравнить настоящую статью с работами [40] и [79], см. раздел 5.2.

Лемма 29. Если $W \in A_{p, \frac{n+1}{n}}$, то $w \equiv W|_{\Omega} \in \mathfrak{A}_p(\Omega)$.

Доказательство. Пусть $\Omega \in C_A^{0,1}$. Построим (κ, A, A) -карты во всех точках $\partial\Omega$ по определению 7 и лемме 21(ii), после чего применим лемму 22. Для $\sigma > -1$, $z \in \partial\Omega$, $0 < r \leq d$ и $B = \{x \in \Omega: |x - z| < r\}$ имеем

$$\int_B \varrho^{\sigma} dx \leq C_1(n, A, \sigma) r^{n+\sigma}.$$

Это проверяется при помощи неравенств (51) и такой карты $(\mathcal{I}_i, g_i, r_i, h_i)$, что $z \in s_i$ (см. соотношения (56)).

Очевидно, что $w \succ 0$ на Ω и $w \in L^1(\Omega)$. Найдём по теореме IV из [36] такие $t > 0$ и $T > 0$, что для любого куба $Q \subset \mathbb{R}^n$

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q W^{1+t} dx \right)^{\frac{1}{1+t}} \leq \frac{T}{|Q|} \int_Q W dx.$$

Имеем $B \subset Q \equiv \{x \in \mathbb{R}^n: |x - z|_{\infty} < r\}$, откуда по неравенству Гёльдера

$$\begin{aligned} (70) \quad \int_B \varrho^{-\lambda p} w dx &\leq \left(\int_B \varrho^{-\lambda p \frac{1+t}{t}} dx \right)^{\frac{t}{t+1}} \left(\int_Q W^{1+t} dx \right)^{\frac{1}{1+t}} \\ &\leq C_2(n, p, \lambda, A, t) T r^{-\lambda p} \int_Q W dx, \quad \lambda p \frac{1+t}{t} < 1. \end{aligned}$$

Отсюда после применения оценки $|B| \geq C_3(n, A)|Q|$ и оценки (6) для набора $(p, w, Q, Q_0) = (p, \frac{n+1}{n}, W, Q, B)$ вытекает неравенство (64a).

Пусть семейство $\{Q_j\}$ такое же, как в лемме 28, так что

$$\int_B \varrho^{(1-\lambda)\frac{p}{p-1}} w^* dx \leq C_4(n, p, \lambda) \sum_{B \cap Q_j \neq \emptyset} \ell(Q_j)^{(1-\lambda)\frac{p}{p-1} + n} \max_{Q_j} w^*.$$

При $x \in Q_j$ имеем $\varrho(x) \leq \text{dist}(Q_j, \partial\Omega) + \sqrt{n} \ell(Q_j) \leq 5\sqrt{n} \ell(Q_j)$, поэтому шар (69) содержится в $2Q_j$. Оценка (6) для набора $(p, w, Q, Q_0) = (p, \frac{n+1}{n}, W, 2Q_j, B_x)$ и

неравенство $q \equiv p^{\frac{n+1}{n}} > p$ показывают, что при $\theta \geq A_q[W]$

$$\begin{aligned} |Q_j|_w &\leq |2Q_j|_W \leq C_5(n, p)\theta|B_x|_w, \\ w^*(x) &= \varrho(x)^{\frac{n}{p-1}}|B_x|_w^{-\frac{1}{p-1}} \leq C_6(n, p, \theta)\ell(Q_j)^{\frac{n}{p-1}}|Q_j|_w^{-\frac{1}{p-1}}, \\ \int_B \varrho^{(1-\lambda)\frac{p}{p-1}} w^* dx &\leq C_4 C_6 \sum_{B \cap Q_j \neq \emptyset} \ell(Q_j)^{(n+1-\lambda)\frac{p}{p-1}} |Q_j|_w^{-\frac{1}{p-1}} \\ &\leq C_4 C_6 \left(\sum_{B \cap Q_j \neq \emptyset} \ell(Q_j)^{(n+1-\lambda)\frac{p}{q-1}} |Q_j|_w^{-\frac{1}{q-1}} \right)^{\frac{q-1}{p-1}}. \end{aligned}$$

По неравенству Гёльдера $|Q_j|_w^{-\frac{1}{q-1}} \leq \ell(Q_j)^{-\frac{nq}{q-1}}|Q_j|_{w'}$ для веса $w' \equiv w^{-\frac{1}{q-1}}$. При $B \cap Q_j \neq \emptyset$ имеем $\sqrt{n}\ell(Q_j) \leq \text{dist}(Q_j, \partial\Omega) < r$. Поэтому

$$\begin{aligned} \int_B \varrho^{(1-\lambda)\frac{p}{p-1}} w^* dx &\leq C_4 C_6 \left(\sum_{B \cap Q_j \neq \emptyset} \ell(Q_j)^{-\frac{\lambda p}{q-1}} |Q_j|_{w'} \right)^{\frac{q-1}{p-1}} \\ &\leq C_4 C_6 [5\sqrt{n}]^{\frac{\lambda p}{p-1}} \left(\int_{\{x \in \Omega: |x-z| < 2r\}} \varrho^{-\frac{\lambda p}{q-1}} w' dx \right)^{\frac{q-1}{p-1}}. \end{aligned}$$

Для $q' = \frac{q}{q-1}$ имеем $W' \equiv W^{-\frac{1}{q-1}} \in A_{q'}$, поэтому аналогично (70)

$$\int_{\{x \in \Omega: |x-z| < 2r\}} \varrho^{-\frac{\lambda p}{q-1}} w' dx \leq C_7(n, p, \lambda, A, W) r^{-\frac{\lambda p}{q-1}} |2Q|_{W'}$$

при достаточно малом $\lambda > 0$ и $r \leq r_0 \equiv d/2$. Ввиду $W \in A_q$ получаем

$$\int_B \varrho^{(1-\lambda)\frac{p}{p-1}} w^* dx \leq C_8(n, p, \lambda, A, W) r^{(n+1-\lambda)\frac{p}{p-1}} |2Q|_W^{-\frac{1}{p-1}}.$$

При $x \in B$ шар (69) содержится в $2Q$. Для $c_1 = 1/2\sqrt{1+A^2}$ мера множества $B_1 \equiv \{x \in B: \varrho(x) \geq c_1 r\}$ больше $C_9(n, A)r^n$ ввиду (51). Значит,

$$\begin{aligned} |2Q|_W^{-\frac{1}{p-1}} &\leq |B_x|_w^{-\frac{1}{p-1}} = \varrho(x)^{-\frac{n}{p-1}} w^*(x) \leq c_1^{-\frac{n+p}{p-1}} r^{-\frac{n+p}{p-1}} \varrho(x)^{\frac{p}{p-1}} w^*(x), \quad x \in B_1, \\ \int_B \varrho^{(1-\lambda)\frac{p}{p-1}} w^* dx &\leq C_8 c_1^{-\frac{n+p}{p-1}} C_9^{-1} r^{-\frac{\lambda p}{p-1}} \int_{B_1} \varrho^{\frac{p}{p-1}} w^* dx. \end{aligned}$$

Покрывая некоторую окрестность границы $\partial\Omega$ конечным числом множеств B , получаем $\varrho^{(1-\lambda)\frac{p}{p-1}} w^* \in L^1(\Omega)$ и, тем более, $\varrho^{\frac{p}{p-1}} w^* \in L^1(\Omega)$. Ввиду вложения $B_1 \subset B$ выполнено неравенство (64b), поэтому $w \in \mathfrak{A}_p(\Omega)_\lambda \subset \mathfrak{A}_p(\Omega)$. $\square$

4.6. Области, $W_w^{2,p}$ -распрямляемые в точке. Пусть $1 < p < \infty$, $w \succ 0$ на $\Omega \in C^{0,1}$ и $w \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Термин “распрямляемость” из следующего определения соответствует предыдущим исследованиям автора [15, 16, 17, 18].

Определение 15. Пусть $\kappa \geq 1$, $A \geq 0$ и $\delta \geq 0$. Область Ω и граница $\partial\Omega$ называются $W_w^{2,p}$ -распрямляемыми в точке $z \in \partial\Omega$ с параметрами (κ, A, δ) , если существуют $C_z > 0$ и (κ, A, δ) -карта $(\mathfrak{I}, g, r, h)$ в точке z такие, что

$$(71) \quad (\forall \beta_I \in \mathbb{R}) \quad \sum_{I \in \mathfrak{X}} a_I l_I^{-p} [b_I^{(1)}]^p |\beta_I|^p \leq C_z \sum_{I \in \mathfrak{X}} a_I l_I^{-p} |\beta_I - \beta_{I'}|^p.$$

Здесь числа a_I и $b_I^{(1)}$ такие, как в (65) и (54) соответственно, а число β_I считается равным нулю при $I \odot \mathfrak{I}$.

Назовём область Ω и границу $\partial\Omega$ $W_w^{2,p}$ -распрямляемыми в точке $z \in \partial\Omega$ с параметрами (A, δ) , если для некоторого $\kappa \geq 1$ они $W_w^{2,p}$ -распрямляемы в точке z с параметрами (κ, A, δ) .

В определении 15 параметры нужны отчасти во избежание обсуждения инвариантности ДВН (71) относительно поворотов системы координат, что было бы довольно утомительной задачей (см. сходный вопрос в лемме 24). Докажем результат об инвариантности (71) относительно выбора g .

Лемма 30. Пусть $w \in D^{\text{comp}}(\Omega)$, для (κ, A, A) -карты $(\mathfrak{I}, g, r, h)$ в точке z выполнено неравенство (71) и даны куб $\mathfrak{I}^* \in \mathcal{D}$ и число $\kappa^* \geq 1$ такие, что

$$l_{\mathfrak{I}^*} \leq \min \left\{ l_{\mathfrak{I}}, \frac{r}{8 \max\{2\kappa, \kappa^*\} \sqrt{n+3} \sqrt{1+A^2}} \right\}.$$

Тогда для любой (κ^*, A, A) -карты $(\mathfrak{I}^*, g^*, r, h^*)$ в точке z со свойством $h \parallel h^*$ тоже выполнено неравенство (71), но с постоянной

$$C_z^* = c^*(n, p, \kappa, A, \kappa^*, \theta^*) C_z, \quad \theta^* \geq D[w].$$

Доказательство. Пусть $\zeta \in \mathbb{R}^n$ таково, что $h(x) \equiv h^*(x) + \zeta$. Тогда

$$\mathbf{c}_{\mathfrak{I}} = h(z)' = h^*(z)' + \zeta' = \mathbf{c}_{\mathfrak{I}^*} + \zeta'.$$

Положим $\mathfrak{X} = \mathfrak{D}_{\mathfrak{I}}$, $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{D}_{\mathfrak{I}^*}$, $\mathfrak{X}_0^* = \mathfrak{X}^* \setminus \mathfrak{I}_\odot^*$ и

$$\mathfrak{F} = \begin{cases} \mathfrak{I}, & l_{\mathfrak{I}^*} = l_{\mathfrak{I}}, \\ \text{единственный } \mathfrak{F} \in \mathcal{D} \text{ со свойствами } l_{\mathfrak{F}} = 2l_{\mathfrak{I}^*} \text{ и } \mathbf{c}_{\mathfrak{I}} \in \mathfrak{F}, & l_{\mathfrak{I}^*} \leq l_{\mathfrak{I}}/2. \end{cases}$$

Имеют место утверждения:

- (i) $3\mathfrak{I}^* + \zeta' = 3(\mathfrak{I}^* + \zeta') \subset (3\mathfrak{I}) \cap (3\mathfrak{F})$;
- (ii) если $I \in \mathfrak{X}_0^*$, то $J = I + \zeta' \in \mathfrak{X} \cap (\mathfrak{D}_{\mathfrak{F}} \setminus \mathfrak{I}_\odot)$;
- (iii) если $I \in \mathfrak{I}_\odot^*$, то $3I + \zeta' = 3(I + \zeta') \subset 3J$ для некоторого $J \in \mathfrak{X} \cap \mathfrak{F}_\odot$.

Если $l_{\mathfrak{I}^*} = l_{\mathfrak{I}}$, то (i) следует из равенства $\mathfrak{I}^* + \zeta' = \mathfrak{I}$, (ii) — из (i) и принадлежности вектора ζ' решетке $l_{\mathfrak{I}^*} \mathbb{Z}^{n-1}$ (откуда $J \in \mathcal{D}$), а утверждение (iii) получается, если взять $J = I + \zeta'$. Пусть $l_{\mathfrak{I}^*} \leq l_{\mathfrak{I}}/2$, так что $l_{\mathfrak{F}} = 2l_{\mathfrak{I}^*}$ и $\mathbf{c}_{\mathfrak{I}} \in \mathfrak{F}$. Тогда $\frac{3}{2}l_{\mathfrak{I}^*} < \min\{\frac{3}{2}l_{\mathfrak{I}}, l_{\mathfrak{F}}\}$, откуда

$$\overline{3(\mathfrak{I}^* + \zeta')} = \{\xi \in \mathbb{R}^{n-1} : |\xi - \mathbf{c}_{\mathfrak{I}}|_\infty \leq 1.5l_{\mathfrak{I}^*}\} \subset \begin{cases} \{\xi : |\xi - \mathbf{c}_{\mathfrak{I}}|_\infty < 1.5l_{\mathfrak{I}}\} \subset 3\mathfrak{I} \\ \{\xi : \text{dist}_\infty(\xi, \mathfrak{F}) < l_{\mathfrak{F}}\} \subset 3\mathfrak{F}, \end{cases}$$

что доказывает (i). Куб J из (ii) принадлежит $\mathcal{D}$, так как $\zeta' \in \frac{l_{\mathfrak{I}^*}}{2} \mathbb{Z}^{n-1} \subset l_I \mathbb{Z}^{n-1}$. В силу (i) и соотношений $l_J = l_I \leq \frac{1}{2}l_{\mathfrak{I}^*} = \frac{1}{4}l_{\mathfrak{F}} \leq \frac{1}{4}l_{\mathfrak{I}}$ получаем (ii). Пусть $I \in \mathfrak{I}_\odot^*$. Возьмём куб $J \in \mathcal{D}$ со свойствами $l_J = l_{\mathfrak{F}} (\leq l_{\mathfrak{I}})$ и $\mathbf{c}_I + \zeta' \in J$. Ввиду (i) имеем $\mathbf{c}_I + \zeta' \in (3\mathfrak{I}) \cap (3\mathfrak{F})$, поэтому $J \in \mathfrak{X} \cap \mathfrak{F}_\odot$. Утверждение (iii) следует из равенств $l_I = l_{\mathfrak{I}^*} = \frac{1}{2}l_{\mathfrak{F}} = \frac{1}{2}l_J$ и соотношений

$$\overline{3(I + \zeta')} = \{\xi \in \mathbb{R}^{n-1} : |\xi - (\mathbf{c}_I + \zeta')|_\infty \leq 1.5l_I\} \subset \{\xi : \text{dist}_\infty(\xi, J) \leq 0.75l_J\} \subset 3J.$$

Пусть a_I^* — величины a_I для карты $(\mathfrak{I}^*, g^*, r, h^*)$, так что

$$a_I^* = \left| h^{*-1}(g^*(I^\square)) \right|_w, \quad a_J = \left| h^{-1}(g(J^\square)) \right|_w.$$

Предположим, что $I \in \mathfrak{X}^*$ и $J \in \mathfrak{X} \cap \mathfrak{D}_{\mathfrak{F}}$ связаны между собой утверждениями (ii) или (iii). Можно считать, что $\mathfrak{c}_I + \zeta' \in J \subset 3J$, согласно выводу этих утверждений. В силу (55) с $\vec{h} = h^*$ и $\vec{\omega} = \omega^*$ получаем

$$\begin{aligned} Z &\equiv h^{*-1} \circ g^*|_{(\mathfrak{c}_I, 0)} = h^{*-1}(\mathfrak{c}_I, \omega^*(\mathfrak{c}_I)) = h^{*-1}(\mathfrak{c}_I, \omega(\mathfrak{c}_I + \zeta') - \zeta_n) \\ &= h^{-1}(\mathfrak{c}_I + \zeta', \omega(\mathfrak{c}_I + \zeta')) = h^{-1} \circ g|_{(\mathfrak{c}_I + \zeta', 0)}. \end{aligned}$$

Аналогично доказательству леммы 27 проверяется, что $|z - Z| < 3r/16$,

$$h^{*-1}(g^*(I^\square)) \cup h^{-1}(g(J^\square)) \subset B_1 \equiv \{x \in \Omega: |x - Z| < R \text{ и } \varrho(x) \geq c_1 R\}$$

и $R \leq r/4\sqrt{1 + A^2}$, где

$$\begin{aligned} R &= \max\{\kappa^*, \kappa\} \sqrt{n + 3} l_J, \\ c_1 &= \frac{\min\{\frac{1}{2\kappa^*}, \frac{1}{\kappa}\}}{\max\{\kappa^*, \kappa\} \sqrt{n + 3} \sqrt{1 + A^2}}. \end{aligned}$$

При проверке используются соотношения $l_J \leq l_{\mathfrak{F}} \leq 2l_{\mathfrak{J}^*}$ и

$$(72) \quad l_I \in \{l_J, l_J/2\}.$$

Существует $c_0 = c_0(n, \kappa, \kappa^*) > 0$ такое, что для некоторого x_0 шар B_0 леммы 26 лежит внутри множества $h^{-1}(g(J^\square))$, откуда $B_0 \subset B_1$ и

$$(73) \quad a_I^* \leq |B_1|_w \leq C_1(n, \kappa, A, \kappa^*, \theta^*) |B_0|_w \leq C_1 a_J.$$

Более простым является неравенство

$$b_I^* \leq C_2(n) b_J^{(1)},$$

в котором b_I^* — это величина $b_I^{(1)}$ для карты $(\mathfrak{J}^*, g^*, r, h^*)$. Оно следует из (55), вложений $3\mathfrak{J}^* + \zeta' \subset 3J$ (см. (i)) и $3I + \zeta' \subset 3J$ и свойства (72).

Пусть даны числа $\beta_I^* \in \mathbb{R}$ ($I \in \mathfrak{X}^*$). При $J \in \mathfrak{X}$ положим

$$\beta_J = \begin{cases} 0, & J \notin \mathfrak{D}_{\mathfrak{F}}, \\ \beta_{J-\zeta'}, & J - \zeta' \in \mathfrak{X}_0^*, \\ \beta_\odot \equiv \max_{I \in \mathfrak{J}_\odot^*} |\beta_I^*|, & J \in \mathfrak{D}_{\mathfrak{F}} \text{ и } J - \zeta' \notin \mathfrak{X}_0^*. \end{cases}$$

Это определение корректно, ибо $J \in \mathfrak{D}_{\mathfrak{F}}$ при $J - \zeta' \in \mathfrak{X}_0^*$ в силу (ii). Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{I \in \mathfrak{X}^*} a_I^* l_I^{-p} [b_I^*]^p |\beta_I^*|^p &\leq C_1 C_2^p \left\{ \sum_{I \in \mathfrak{X}_0^*} a_{I+\zeta'} l_I^{-p} [b_{I+\zeta'}^{(1)}]^p |\beta_{I+\zeta'}|^p \right. \\ &\quad \left. + 3^{n-1} l_{\mathfrak{J}^*}^{-p} \beta_\odot^p \max_{J \in \mathfrak{X} \cap \mathfrak{F}_\odot} a_J [b_J^{(1)}]^p \right\} \\ &\leq 3^{n-1} 2^p C_1 C_2^p \sum_{J \in \mathfrak{X}} a_J l_J^{-p} [b_J^{(1)}]^p |\beta_J|^p \\ &\stackrel{(71)}{\leq} 3^{n-1} 2^p C_1 C_2^p C_z \sum_{J \in \mathfrak{X}} a_J l_J^{-p} |\beta_J - \beta_{J'}|^p. \end{aligned}$$

Для любого $J \in \mathfrak{X}$ имеет место одна из следующих альтернатив:

1. $J' \notin \mathfrak{D}_{\mathfrak{F}}$;
2. $J' - \zeta' \in \mathfrak{X}_0^*$;
3. $J' \in \mathfrak{D}_{\mathfrak{F}}$, $J' - \zeta' \notin \mathfrak{X}_0^*$ и $J \notin \mathfrak{D}_{\mathfrak{F}}$;

4. $J' \in \mathfrak{D}_{\mathfrak{F}}$, $J' - \zeta' \notin \mathfrak{X}_0^*$ и $J - \zeta' \in \mathfrak{X}_0^*$;
 5. $J' \in \mathfrak{D}_{\mathfrak{F}}$, $J' - \zeta' \notin \mathfrak{X}_0^*$, $J \in \mathfrak{D}_{\mathfrak{F}}$ и $J - \zeta' \notin \mathfrak{X}_0^*$.

Если $\beta_J \neq 0$ в случае 1, то $J \in \mathfrak{D}_{\mathfrak{F}}$ и, следовательно, $J \in \mathfrak{F}_{\odot}$ и (ввиду (ii)) $J - \zeta' \notin \mathfrak{X}_0^*$, поскольку $J' \in \mathfrak{D}_{\mathfrak{F}}$ при $J \in \mathfrak{D}_{\mathfrak{F}} \setminus \mathfrak{F}_{\odot}$. В случае 2 имеем $J - \zeta' \in \mathcal{D}$ и $J - \zeta' \subset J' - \zeta' \subset 3\mathfrak{I}^*$, откуда $J - \zeta' \in \mathfrak{X}_0^*$. Случай 3 невозможен, так как $J \notin \mathfrak{D}_{\mathfrak{F}} \Leftrightarrow (J = \mathfrak{F}') \vee ([J, \mathfrak{F}] > 2l_{\mathfrak{F}})$ и, значит, $J' \notin \mathfrak{D}_{\mathfrak{F}}$ при $J \notin \mathfrak{D}_{\mathfrak{F}}$. В случае 4 для $I = J - \zeta'$ имеем $I \in \mathfrak{X}_0^*$ и потому $l_I \leq \frac{1}{2}l_{\mathfrak{I}^*}$. Если $l_I \leq \frac{1}{4}l_{\mathfrak{I}^*}$, то из соотношений $I \in \mathfrak{X}_0^*$, $\zeta' \in \frac{l_{\mathfrak{I}^*}}{2}\mathbb{Z}^{n-1}$ и $l_{J'} = 2l_I \leq \frac{l_{\mathfrak{I}^*}}{2}$ следует, что $I \in \mathcal{D}$ и $J' - \zeta' \in \mathcal{D}$, откуда $I' = J' - \zeta'$ ($\notin \mathfrak{X}_0^*$) в силу вложения $I \subset J' - \zeta'$. Условия $I \in \mathfrak{X}_0^*$, $l_I \leq \frac{1}{4}l_{\mathfrak{I}^*}$ и $I' \notin \mathfrak{X}_0^*$ несовместны, поэтому $l_I = \frac{1}{2}l_{\mathfrak{I}^*}$. Наконец, $\beta_J - \beta_{J'} = \beta_{\odot} - \beta_{\odot} = 0$ в случае 5. Отсюда

$$\begin{aligned} \Sigma &\equiv \sum_{J \in \mathfrak{X}} a_J l_J^{-p} |\beta_J - \beta_{J'}|^p \leq \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_4, \\ \Sigma_1 &\equiv \left(\sum_{J \in \mathfrak{X} \cap \mathfrak{F}_{\odot}} a_J \right) l_{\mathfrak{F}}^{-p} \beta_{\odot}^p \leq \left(\sum_{J \in \mathfrak{X} \cap \mathfrak{F}_{\odot}} a_J \right) l_{\mathfrak{I}^*}^{-p} \beta_{\odot}^p, \\ \Sigma_2 &\equiv \sum_{I \in \mathfrak{X}_0^*: l_I \leq l_{\mathfrak{I}^*}/4} a_{I+\zeta'} l_I^{-p} |\beta_I^* - \beta_{I'}^*|^p, \\ \Sigma_4 &\equiv \sum_{I \in \mathfrak{X}_0^*: l_I = l_{\mathfrak{I}^*}/2} a_{I+\zeta'} l_I^{-p} |\beta_I^* - \beta_{\odot}|^p \\ &\leq 2^{p-1} \sum_{I \in \mathfrak{X}_0^*: l_I = l_{\mathfrak{I}^*}/2} a_{I+\zeta'} l_I^{-p} |\beta_I^* - \beta_{I'}^*|^p + 2^{3p-1} \left(\sum_{I \in \mathfrak{X}_0^*: l_I = l_{\mathfrak{I}^*}/2} a_{I+\zeta'} \right) l_{\mathfrak{I}^*}^{-p} \beta_{\odot}^p, \\ \beta_{\odot}^p &= \max_{I \in \mathfrak{I}_{\odot}^*} |\beta_I^* - \beta_{I'}^*|^p \leq \sum_{I \in \mathfrak{I}_{\odot}^*} |\beta_I^* - \beta_{I'}^*|^p, \\ \Sigma &\leq 2^{p-1} \sum_{I \in \mathfrak{X}_0^*} a_{I+\zeta'} l_I^{-p} |\beta_I^* - \beta_{I'}^*|^p + 2^{3p-1} \left(\sum_{\substack{J \in \mathfrak{X} \cap \mathfrak{D}_{\mathfrak{F}}: \\ l_J \geq \frac{1}{2}l_{\mathfrak{I}^*}}} a_J \right) \sum_{I \in \mathfrak{I}_{\odot}^*} l_I^{-p} |\beta_I^* - \beta_{I'}^*|^p. \end{aligned}$$

При $I \in \mathfrak{X}_0^*$ и $J = I + \zeta'$ неравенство

$$a_J \leq C'_1(n, \kappa, A, \kappa^*, \theta^*) a_I^*$$

получается переменной в (73) ролей множеств $h^{*-1}(g^*(I^{\square}))$ и $h^{-1}(g(J^{\square}))$. В силу свойств $\mathfrak{c}_{\mathfrak{I}} \in \mathfrak{F}$, $l_{\mathfrak{F}} \leq 2l_{\mathfrak{I}^*}$ и (66b) для

$$\begin{aligned} Z &= h^{*-1} \circ g^*|_{(\mathfrak{c}_{\mathfrak{I}^*}, 0)} = h^{-1} \circ g|_{(\mathfrak{c}_{\mathfrak{I}}, 0)} = z, \\ R &= 2 \max\{\kappa^*, 2\kappa\} \sqrt{n} l_{\mathfrak{I}^*} < r/4 \sqrt{1 + A^2}, \\ c_1 &= \frac{\min\{\frac{1}{\kappa^*}, \frac{1}{2\kappa}\}}{2 \max\{\kappa^*, 2\kappa\} \sqrt{n} \sqrt{1 + A^2}} \end{aligned}$$

и для любых кубов $I \in \mathfrak{I}_{\odot}^*$ и $J \in \mathfrak{X} \cap \mathfrak{D}_{\mathfrak{F}}$ ($l_J \geq l_{\mathfrak{I}^*}/2$) имеем

$$h^{*-1}(g^*(I^{\square})) \cup h^{-1}(g(J^{\square})) \subset B_1 \equiv \{x \in \Omega: |x - Z| < R \text{ и } \varrho(x) \geq c_1 R\}.$$

Стандартное рассуждение показывает, что

$$\sum_{J \in \mathfrak{X} \cap \mathfrak{D}_{\mathfrak{F}} : l_J \geq \frac{1}{2} l_{\mathfrak{J}^*}} a_J \leq C_1''(n, \kappa, A, \kappa^*, \theta^*) a_I^*,$$

$$\Sigma \leq \max\{2^{p-1} C_1', 2^{3p-1} C_1''\} \sum_{I \in \mathfrak{X}^*} a_I^* l_I^{-p} |\beta_I^* - \beta_{I'}^*|^p.$$

Отсюда и из предыдущего абзаца следует утверждение леммы 30. $\square$

Свяжем ДВН вида (71) с числами T_I теоремы 6, с леммой 23 и с оценкой (102) из раздела 5.5.

Лемма 31. Пусть $1 < p < \infty$, $\lambda > 0$, $\mathfrak{J} \in \mathcal{D}$ и дано $(p, \lambda, \mathfrak{J})$ -семейство $\{a_I\}_{I \in \mathfrak{X}}$. Пусть числа $c_I \geq 0$ таковы, что для некоторого $C_1 > 0$ имеем

$$(74a) \quad (\forall \beta_I \in \mathbb{R}) \quad \sum_{I \in \mathfrak{X}} a_I l_I^{-p} c_I^p |\beta_I|^p \leq C_1 \sum_{I \in \mathfrak{X}} a_I l_I^{-p} |\beta_I - \beta_{I'}|^p,$$

где $\beta_{I'}$ считается равным нулю при $I \odot \mathfrak{J}$. Тогда $c_I \leq C_1^{1/p}$, а числа

$$T_I = \sum_{J \in \mathfrak{X}} \Gamma_{IJ}^{(1,n)} c_J$$

удовлетворяют, с постоянной $C_2 = C_0(n, p, \lambda, \theta_1, \theta_2) C_1$, оценке

$$(74b) \quad (\forall \beta_I \in \mathbb{R}) \quad \sum_{I \in \mathfrak{X}} a_I l_I^{-p} T_I^p |\beta_I|^p \leq C_2 \sum_{I \in \mathfrak{X}} a_I l_I^{-p} |\beta_I - \beta_{I'}|^p.$$

Доказательство. Для произвольного $H \in \mathfrak{X}$ подставим в (74a) числа

$$(75) \quad \beta_I = \begin{cases} 1, & I \subset H, \\ 0, & I \not\subset H, \end{cases}$$

и получим $a_H l_H^{-p} c_H^p \leq C_1 a_H l_H^{-p}$. Но $0 < a_H < \infty$, откуда $c_H \leq C_1^{1/p}$.

Если $K \in \mathfrak{L}_I^{\mathfrak{X}}$, то $l_I \leq l_K$, а значит, λ из определения 13 можно уменьшать. Поэтому предположение $0 < \lambda < 1$ не умаляет общности. Выберем

$$\rho = \rho(p, \lambda) \in (0, (\alpha + 1)p), \quad \alpha = -\lambda.$$

В силу соотношений (25d) и $J \subset K(I, J) \in \mathfrak{L}_I^{\mathfrak{X}}$ имеем

$$l_I^{-1} T_I \leq 2^{n+1} \sum_{J \in \mathfrak{X}} \frac{l_J^n c_J}{l_{K(I,J)}^{n+1}} = 2^{n+1} \sum_{K \in \mathfrak{L}_I^{\mathfrak{X}}} l_K^{-n-1} \sum_{J: K(I,J)=K} l_J^n c_J$$

$$\leq 2^{n+1} \sum_{K \in \mathfrak{L}_I^{\mathfrak{X}}} l_K^{-n-1} T^K,$$

где

$$T^K = \sum_{J \subset K} l_J^n c_J.$$

По условию $\alpha < 0$, откуда

$$l_I^{-p} T_I^p \leq c_1(n, p, \lambda) \sum_{K \in \mathfrak{L}_I^{\mathfrak{X}}} \left(\frac{l_I}{l_K} \right)^{\alpha p} [l_K^{-n-1} T^K]^p.$$

Ввиду вложения $I \subset K(I, K)$ для любых β_I имеет место представление

$$\beta_I = \beta_{K(I,K)} + \sum_{H \in \mathfrak{X}: I \subset H \subsetneq K(I,K)} [\beta_H - \beta_{H'}].$$

Поэтому на основании условия $\rho > 0$ можно оценить

$$|\beta_I|^p \leq c_2(p, \rho) \left[|\beta_{\mathcal{K}(I, K)}|^p + \sum_{H \in \mathfrak{X}: I \subset H \subsetneq \mathcal{K}(I, K)} \left(\frac{l_{\mathcal{K}(I, K)}}{l_H} \right)^\rho |\beta_H - \beta_{H'}|^p \right],$$

$$\sum_{I \in \mathfrak{X}} a_I l_I^{-p} T_I^p |\beta_I|^p \leq c_1 \sum_{I, K: K \in \mathfrak{L}_I^{\mathfrak{X}}} a_I \left(\frac{l_I}{l_K} \right)^{\alpha p} [l_K^{-n-1} T^K]^p |\beta_I|^p \leq c_1 c_2 [\Sigma_1 + \Sigma_2],$$

где

$$\Sigma_1 = \sum_{K \in \mathfrak{X}} l_K^{-\alpha p} [l_K^{-n-1} T^K]^p \sum_{I \in \mathfrak{X}: K \in \mathfrak{L}_I^{\mathfrak{X}}} a_I l_I^{\alpha p} |\beta_{\mathcal{K}(I, K)}|^p,$$

$$\Sigma_2 = \sum_{\substack{I, K, H \in \mathfrak{X}: K \in \mathfrak{L}_I^{\mathfrak{X}} \\ \& I \subset H \subsetneq \mathcal{K}(I, K)}} a_I \left(\frac{l_I}{l_K} \right)^{\alpha p} [l_K^{-n-1} T^K]^p \left(\frac{l_K}{l_H} \right)^\rho |\beta_H - \beta_{H'}|^p.$$

В формуле для Σ_2 учтено, что $K(I, K) = K$ при $K \in \mathfrak{L}_I^{\mathfrak{X}}$, откуда $l_{\mathcal{K}(I, K)} = l_K$.

Оценим Σ_1 . Положим

$$\widehat{\beta}_K = \max_{K_1 \in \mathfrak{L}_K^{\mathfrak{X}}} |\beta_{K_1}|.$$

Если $K \in \mathfrak{L}_I^{\mathfrak{X}}$, то $\mathcal{K}(I, K) \odot_{\mathfrak{X}} K$ по причине соотношений $\mathcal{K}(I, K) \odot_{\mathfrak{X}} K(I, K)$ и $K(I, K) = K$. Поэтому $\mathcal{K}(I, K) \in \mathfrak{L}_K^{\mathfrak{X}}$ и $|\beta_{\mathcal{K}(I, K)}| \leq \widehat{\beta}_K$, откуда

$$\Sigma_1 \leq \sum_{K \in \mathfrak{X}} l_K^{-\alpha p} [l_K^{-n-1} T^K]^p \widehat{\beta}_K^p \sum_{I \in \mathfrak{X}: K \in \mathfrak{L}_I^{\mathfrak{X}}} a_I l_I^{\alpha p} \stackrel{(63a)}{\leq} \theta_1 \sum_{K \in \mathfrak{X}} a_K [l_K^{-n-1} T^K]^p \widehat{\beta}_K^p.$$

Из условия $\beta = n + 1 - \lambda$ и неравенства Гёльдера

$$\begin{aligned} [T^K]^p &= \left(\sum_{J: J \subset K} l_J^\lambda a_J^{1/p} l_J^{-1} c_J \cdot l_J^\beta a_J^{-1/p} \right)^p \\ &\leq \left(\sum_{J: J \subset K} l_J^{\lambda p} a_J l_J^{-p} c_J^p \right) \left(\sum_{J: J \subset K} l_J^{\beta \frac{p}{p-1}} a_J^{-\frac{1}{p-1}} \right)^{p-1} \\ &\stackrel{(63b)}{\leq} \theta_2^{p-1} l_K^{\beta p} a_K^{-1} \sum_{J: J \subset K} l_J^{\lambda p} a_J l_J^{-p} c_J^p, \\ a_K [l_K^{-n-1} T^K]^p &\leq \theta_2^{p-1} l_K^{-\lambda p} \sum_{J: J \subset K} l_J^{\lambda p} a_J l_J^{-p} c_J^p. \end{aligned}$$

При $J \subset K$ имеем $\mathfrak{L}_K^{\mathfrak{X}} \subset \mathfrak{L}_J^{\mathfrak{X}}$ и $\widehat{\beta}_K \leq \widehat{\beta}_J$. Учитывая условие $\lambda > 0$, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathfrak{X}} a_K [l_K^{-n-1} T^K]^p \widehat{\beta}_K^p &\leq \theta_2^{p-1} \sum_{J \in \mathfrak{X}} l_J^{\lambda p} a_J l_J^{-p} c_J^p \widehat{\beta}_J^p \sum_{K: J \subset K} l_K^{-\lambda p} \\ &\leq \theta_2^{p-1} c_3(\lambda p) \sum_{J \in \mathfrak{X}} a_J l_J^{-p} c_J^p \widehat{\beta}_J^p \\ &\stackrel{(74a)}{\leq} \theta_2^{p-1} c_3 C_1 \sum_{I \in \mathfrak{X}} a_I l_I^{-p} |\widehat{\beta}_I - \widehat{\beta}_{I'}|^p. \end{aligned}$$

Имеют место соотношения $\mathfrak{L}_{I'}^{\mathfrak{X}} \subset \mathfrak{L}_I^{\mathfrak{X}}$ и $\mathfrak{L}_I^{\mathfrak{X}} \setminus \mathfrak{L}_{I'}^{\mathfrak{X}} = I_{\odot \mathfrak{X}} \subset \mathfrak{L}_I^{\mathfrak{X}}$, где считается, что $\mathfrak{L}_{I'}^{\mathfrak{X}} = \emptyset$ при $I \odot \mathfrak{I}$. Поэтому

$$\begin{aligned} 0 \leq \widehat{\beta}_I - \widehat{\beta}_{I'} &= \max_{K \in I_{\odot \mathfrak{X}}} \max\{|\beta_K| - \widehat{\beta}_{I'}, 0\} \leq \max_{K \in I_{\odot \mathfrak{X}}} |\beta_K - \beta_{K'}|, \\ |\widehat{\beta}_I - \widehat{\beta}_{I'}|^p &\leq \sum_{K \in I_{\odot \mathfrak{X}}} |\beta_K - \beta_{K'}|^p, \\ \sum_{I \in \mathfrak{X}} a_I l_I^{-p} |\widehat{\beta}_I - \widehat{\beta}_{I'}|^p &\leq \sum_{K \in \mathfrak{X}} l_K^{-p} |\beta_K - \beta_{K'}|^p \sum_{I \in \mathfrak{X}: K \in I_{\odot \mathfrak{X}}} a_I \\ &\stackrel{(63a)}{\leq} \theta_1 \sum_{K \in \mathfrak{X}} a_K l_K^{-p} |\beta_K - \beta_{K'}|^p, \\ \Sigma_1 &\leq \theta_1^2 \theta_2^{p-1} c_3 C_1 \sum_{K \in \mathfrak{X}} a_K l_K^{-p} |\beta_K - \beta_{K'}|^p. \end{aligned}$$

Оценим Σ_2 . Уже отмечалось, что $\mathcal{K}(I, K) \odot_{\mathfrak{X}} K$ при $K \in \mathfrak{L}_I^{\mathfrak{X}}$, поэтому если дополнительно $I \subset H \subsetneq \mathcal{K}(I, K)$, то $K \in \mathfrak{L}_H^{\mathfrak{X}}$. Следовательно,

$$\Sigma_2 \leq \sum_{H \in \mathfrak{X}} l_H^{-\rho} |\beta_H - \beta_{H'}|^p \left(\sum_{I \in \mathfrak{X}: I \subset H} a_I l_I^{\alpha p} \right) \left(\sum_{K \in \mathfrak{L}_H^{\mathfrak{X}}} l_K^{\rho - \alpha p} [l_K^{-n-1} T^K]^p \right).$$

Сумма в первых скобках не превосходит $\theta_1 a_H l_H^{\alpha p}$ на основании (63a). Из оценки $c_J \leq C_1^{1/p}$ и условия $\rho < (\alpha + 1)p$ выводим

$$\begin{aligned} T^K &\leq C_1^{1/p} \sum_{J \subset K} l_J^n = 2C_1^{1/p} l_K^n, \\ \sum_{K \in \mathfrak{L}_H^{\mathfrak{X}}} l_K^{\rho - \alpha p} [l_K^{-n-1} T^K]^p &\leq 2^p C_1 \sum_{K \in \mathfrak{L}_H^{\mathfrak{X}}} l_K^{\rho - \alpha p - p} \leq c_4(n, p, \lambda, \rho) C_1 l_H^{\rho - \alpha p - p}, \\ \Sigma_2 &\leq \theta_1 c_4 C_1 \sum_{H \in \mathfrak{X}} a_H l_H^{-p} |\beta_H - \beta_{H'}|^p. \end{aligned}$$

Соединяя оценки для Σ_1 и Σ_2 , получаем (74b). $\square$

Главным в настоящем параграфе является следующий результат, который связывает $W_w^{2,p}$ -распрямляемость с ДВН (74b) для чисел T_I теоремы 6.

Теорема 9. Пусть $1 < p < \infty$, $\lambda > 0$, $\Omega \in C^{0,1}$, $w \in \mathfrak{A}_p(\Omega)_\lambda \cap D^{\text{comp}}(\Omega)$ и $z \in \partial\Omega$. Тогда имеют место следующие утверждения.

(i) Если (κ, A, δ) -карта $(\mathfrak{I}, g, r, h)$ в точке z удовлетворяет для некоторого $C_Z > 0$ дискретному весовому неравенству

$$(76) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\forall \beta_I \in \mathbb{R}) \quad \sum_{I \in \mathfrak{X}} a_I l_I^{-p} T_I^p |\beta_I|^p \leq C_Z \sum_{I \in \mathfrak{X}} a_I l_I^{-p} |\beta_I - \beta_{I'}|^p, \\ \text{где } a_I = \left| h^{-1}(g(I^\square)) \right|_w \quad \text{и} \quad T_I = \sum_{J \in \mathfrak{X}} \underbrace{\Gamma_{IJ}^{(1,n)} l_J \|\nabla^2 \mathfrak{G}\|_{L^\infty(g(J^\square))}}_{c_J}, \end{array} \right.$$

то Ω является $W_w^{2,p}$ -распрямляемой в точке z с параметрами (κ, A, δ) .

(ii) Если область Ω является $W_w^{2,p}$ -распрямляемой в точке z с параметрами (κ, A, δ) , то для постоянной $\kappa^* \equiv \kappa(n, A, 1)$ из леммы 21 и некоторого $l^* > 0$ выполнено следующее: для любого куба $\mathfrak{I} \in \mathcal{D}$ с ребром $l_{\mathfrak{I}} \leq l^*$ найдётся (κ^*, A, δ) -карта $(\mathfrak{I}, g, r, h)$ в точке z такая, что

- а) числа a_I из (76) образуют $(p, \lambda, \mathfrak{I})$ -семейство;
- б) условие (76) выполняется при $C_Z = C'_0(n, p, \lambda, \kappa, A, C, \theta^*)C_z$, где постоянная C взята из (64), $\theta^* \geq D[w]$, а C_z — постоянная из (71);
- с) числа c_J из (76) не превосходят $C^*(n, A)\delta$.

Доказательство. (i) При соглашении (54) по леммам 23 и 17 получаем

$$b_I^{(1)} \leq C''(n) \sum_{J \in \mathfrak{X}} \Gamma_{IJ}^{(1,n)} \hat{c}_J \leq C''(n)c(\kappa) \sum_{J \in \mathfrak{X}} \Gamma_{IJ}^{(1,n)} c_J = C''(n)c(\kappa)T_I,$$

$$\sum_{I \in \mathfrak{X}} a_I l_I^{-p} [b_I^{(1)}]^p |\beta_I|^p \leq [C''(n)c(\kappa)]^p \sum_{I \in \mathfrak{X}} a_I l_I^{-p} T_I^p |\beta_I|^p \leq C_z \sum_{I \in \mathfrak{X}} a_I l_I^{-p} |\beta_I - \beta_{I'}|^p,$$

где $C_z = [C''(n)c(\kappa)]^p C_Z$. Осталось сослаться на определение 15.

(ii) Пусть C_z и $(\mathfrak{I}, g, r, h)$ такие, как в определении 15. Для постоянной r_0 из определения 14 положим

$$l^* = \min \left\{ l_{\mathfrak{I}}, \frac{r}{8 \max\{2\kappa, \kappa^*\} \sqrt{n+3} \sqrt{1+A^2}}, \frac{r_0}{2\kappa^* \sqrt{n}} \right\}.$$

Рассмотрим произвольный куб $\mathfrak{I}^* \in \mathcal{D}$ с ребром $l_{\mathfrak{I}^*} \leq l^*$. Исходя из (A, δ) -карты (r, h) , построим по лемме 21(ii) такую (κ^*, A, δ) -карту $(\mathfrak{I}^*, g^*, r, h^*)$ в точке z , что $h \parallel h^*$ и $\hat{c}_I \leq C(n, A, 1)b_I^{(1)}$, где

$$\text{числа } a_I, b_I^{(1)}, c_I, \hat{c}_I, T_I \text{ вычисляются по карте } (\mathfrak{I}^*, g^*, r, h^*).$$

По лемме 30 для этой карты выполнено условие (71) с постоянной $C_z^* = c^* C_z$.

Согласно лемме 27 числа a_I образуют $(p, \lambda, \mathfrak{I}^*)$ -семейство, причем

$$\theta_i = \theta_i(n, p, \lambda, \kappa^*, A, C, \theta^*), \quad i = 1, 2.$$

В силу леммы 17 и неравенств $\hat{c}_I \leq C(n, A, 1)b_I^{(1)}$ и (71) выполнено условие (74a) с постоянной $C_1 = [c(\kappa^*)C(n, A, 1)]^p C_z^*$. Лемма 31 доказывает оценку (74b) с постоянной

$$C_2 = C_0(n, p, \lambda, \theta_1, \theta_2) [c(\kappa^*)C(n, A, 1)]^p c^* C_z = C'_0(n, p, \lambda, \kappa, A, C, \theta^*) C_z.$$

Переобозначая C_2 как C_Z и $(\mathfrak{I}^*, g^*, r, h^*)$ как $(\mathfrak{I}, g, r, h)$, приходим к утверждениям а) и б). Лемма 17, оценка $\hat{c}_I \leq C(n, A, 1)b_I^{(1)}$ и предложение 1 доказывают утверждение с) с постоянной $C^*(n, A) = c(\kappa^*)C(n, A, 1)c(n)$. $\square$

5. ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В $W_w^{2,p}(\Omega)$.

ПРИМЕРЫ И СРАВНЕНИЕ С ПРЕДШЕСТВУЮЩИМИ РАБОТАМИ

5.1. Главные теоремы об однозначной разрешимости задачи Дирихле в $W_w^{2,p}(\Omega)$. Пусть $1 < p < \infty$, $\Omega \in C^{0,1}$ и $w \in \mathfrak{A}_p^{\text{comp}}(\Omega)$, то есть $w \in \mathfrak{A}_p^{\text{comp}}(\Omega)_\lambda$ для некоторого $\lambda > 0$. Очевидно, что по определению 14 можно считать λ настолько малым, насколько нужно. Придадим смысл граничным значениям функций $u \in W_w^{2,p}(\Omega)$.

Лемма 32. Если $0 < \lambda < 1$, то пространство $W_w^{1,p}(\Omega)$ компактно вложено в $L^q(\Omega)$ для любого $1 \leq q < \frac{n}{n-\lambda}$.

Доказательство. В силу леммы 28 имеем $W_w^{1,p}(\Omega) \subset W_{\varrho^{1-\lambda}}^{1,1}(\Omega)$. Заметим, что

$$\int_{\Omega} \{ \varrho^{-\lambda} |u| + \varrho^{1-\lambda} |\nabla u| \} dx \leq c(\lambda, \Omega) \int_{\Omega} \varrho^{1-\lambda} \{ |u| + |\nabla u| \} dx$$

при $u \in W_{\rho^{1-\lambda}}^{1,1}(\Omega)$. Это проверяется при помощи регуляризации и формулы Ньютона-Лейбница. Теперь утверждение леммы 32 вытекает из соотношений (5.5) и (5.6) в [54]. $\square$

В условиях леммы 32 имеем $W_w^{2,p}(\Omega) \subset W^{1,q}(\Omega)$, а функции из $W^{1,q}(\Omega)$, как известно, обладают граничными значениями. Для наших целей достаточно рассмотрения только нулевых граничных значений.

Определение 16. При $u \in W_w^{2,p}(\Omega)$ скажем, что $u = 0$ на $\partial\Omega$, если для некоторого $1 < q < \infty$ функция u принадлежит замыканию $\dot{W}^{1,q}(\Omega)$ множества $C_0^\infty(\Omega)$ в пространстве $W^{1,q}(\Omega)$.

Приведём и докажем две теоремы, которые наряду с идеей L_w^p -дискретизации, выделением классов LLD и $\mathfrak{A}_p^{\text{comp}}(\Omega)$ и понятием $W_w^{2,p}$ -распрямляемости принадлежат к главным результатам статьи.

Теорема 10. Пусть $1 < p < \infty$, $\lambda > 0$, $A > 0$ и $\theta \geq 1$. Существует

$$\delta = \delta(n, p, \lambda, A, \theta) > 0$$

такое, что для любых области $\Omega \in \text{LZ}(A, \delta) \cap \text{LLD}$ и веса $w \in \mathfrak{A}_p^{\text{comp}}(\Omega)_\lambda$ со свойствами

- (i) Ω является $W_w^{2,p}$ -распрямляемой с параметрами (A, δ) в каждой граничной точке $z \in \partial\Omega$;
- (ii) $A_p[w] \leq \theta$

имеет место следующее утверждение (OP): “Для произвольного $f \in L_w^p(\Omega)$ существует единственное решение $u \in W_w^{2,p}(\Omega)$ задачи

$$(77) \quad \begin{cases} \Delta u = f & \text{в } \Omega, \\ u = 0 & \text{на } \partial\Omega, \end{cases}$$

причем с не зависящей от f постоянной $D > 0$ справедлива оценка

$$(77') \quad \|u\|_{W_w^{2,p}(\Omega)} \leq D \|f\|_{L_w^p(\Omega)}.$$

Теорема 11. Для любых $1 < p < \infty$, $\lambda > 0$, $\kappa \geq 1$, $A > 0$ и $\theta \geq 1$ найдутся такие постоянные

$$\delta = \delta(n, p, \lambda, A, \theta) > 0, \quad \varepsilon = \varepsilon(n, p, \lambda, \kappa, A, \theta) > 0,$$

что если область $\Omega \in \text{LZ}(A, \delta)$ и вес $w \in \mathfrak{A}_p^{\text{comp}}(\Omega)_\lambda$ обладают свойствами

- (i) Ω является $W_w^{2,p}$ -распрямляемой с параметрами (κ, A, δ) в каждой граничной точке $z \in \partial\Omega$, причем $C_z \leq \varepsilon$ для постоянной C_z из неравенства (71);
- (ii) $A_p[w] \leq \theta$;
- (iii) $C \leq \theta$ для постоянной C из неравенств (64a) и (64b),

то имеет место утверждение (OP) теоремы 10.

Из теоремы 10 непосредственно вытекает

Следствие 1. Если $1 < p < \infty$, $\Omega \in \text{Lz} \cap \text{LLD}$, $w \in \mathfrak{A}_p^{\text{comp}}(\Omega)$ и существует такое $A > 0$, что область Ω является $W_w^{2,p}$ -распрямляемой в точке $z \in \partial\Omega$ с параметрами (A, δ) для любых z и $\delta > 0$, то справедливо утверждение (OP) теоремы 10.

Доказательство теоремы 10. Без умаления общности можно предполагать, что $0 < \lambda \leq 1/2$. В терминах лемм 21 и 9 соответственно положим

$$\kappa^* = \kappa(n, A, 1), \quad \theta_Q = c \left(n, p, \frac{1}{2\sqrt{n}\sqrt{1+A^2}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \kappa^*, \theta \right).$$

Возьмём $\sigma = \sigma(\lambda)$ и $q = q(n, \lambda)$ такие, что

$$0 < \sigma < \lambda, \quad 1 < q < \frac{n}{n-\lambda},$$

и найдём по теореме 6 с параметрами $(p, \theta, \kappa, \sigma) = (p, \theta_Q, \kappa^*, \sigma)$ числа $M, \vartheta, \mu_0, \mu_1$ и μ_2 . Для постоянных $\delta(n, q)$ из теоремы 7 и $C^*(n, A)$ из теоремы 9(ii) положим

$$\delta = \min\{\delta(n, q), M/C^*(n, A)\}.$$

Пусть Ω и w удовлетворяют всем условиям теоремы 10. Для любого $z \in \partial\Omega$ найдём $l_* > 0$ по лемме 24 и $l^* > 0$ по теореме 9(ii). Возьмём какой-нибудь куб $\mathfrak{I}_z \in \mathcal{D}$ с ребром $l_{\mathfrak{I}_z} \leq \min\{l_*, l^*\}$ и построим по теореме 9(ii) (κ^*, A, δ) -карту $(\mathfrak{I}_z, g_z, r_z, h_z)$ в точке z со свойствами а), б) и с). По лемме 22 найдём $d > 0$ и конечный поднабор $\{(\mathfrak{I}_i, g_i, r_i, h_i)\}_{i=1}^N$ набора $\{(\mathfrak{I}_z, g_z, r_z, h_z) : z \in \partial\Omega\}$, обладающий свойствами (56).

Зафиксировав i , подставим в лемму 9 отображение $h = h_i^{-1} \circ g_i$, а также

$$E = Q, \quad F = S, \quad \kappa = \kappa^*, \quad G = \Omega, \quad H = \mathbb{R}^n \setminus \Omega, \quad \delta_0 = \frac{1}{2\sqrt{n}\sqrt{1+A^2}}, \quad \delta_1 = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

где Q и S соответствуют гомеоморфизму $g_i \in \Xi^2(\mathfrak{I}_i, \kappa^*)$, см. раздел 3.1. Для непустого множества $K_0 \subset h(E^\circ)$ со свойством

$$0 < \text{diam}(K_0) \leq \delta_0 \text{dist}(K_0, h(F))$$

из вложения (52b) и правого неравенства в (51) следует, что

$$\text{diam}(K_0) \leq \delta_0 \text{dist}(K_0, h(F)) \leq \delta_0 \sqrt{1+A^2} \text{dist}(K_0, \partial\Omega) = \frac{1}{2\sqrt{n}} \text{dist}(K_0, H).$$

Возьмём какой-нибудь минимальный куб $K \supset K_0$. Тогда $\ell(K) \leq \text{diam}(K_0)$ и

$$\begin{aligned} \text{dist}(K_0, H) &\leq \text{dist}(K, H) + \sqrt{n}\ell(K) \leq \text{dist}(K, H) + \frac{1}{2} \text{dist}(K_0, H), \\ \ell(K) &\leq \text{diam}(K_0) \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \text{dist}(K_0, H) \leq \delta_1 \text{dist}(K, H). \end{aligned}$$

В частности, $K \subset \mathbb{R}^n \setminus H = G^\circ$. Следовательно, лемма 9 законна, что даёт

$$(78) \quad w_Q \equiv w \circ h_i^{-1} \circ g_i \in A_p(Q, S)_1, \quad \text{причем } A_p[w_Q] \leq \theta_Q.$$

Возьмём любое $f^* \in C_0^\infty(\Omega)$. Задача (77) с $f = f^*$ имеет единственное обобщенное решение $u^* \in \dot{W}^{1,2}(\Omega)$. Для фиксированного i пусть

$$\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_i, \quad g = g_i, \quad u_* = u^* \circ h_i^{-1}, \quad u = u_* \circ g_i, \quad f_* = f^* \circ h_i^{-1}, \quad f = f_* \circ g_i.$$

Проверим отличные от (78) условия теоремы 6 (с w_Q в качестве веса w). Би-липпшицевость гомеоморфизма g и включение $u^* \in \dot{W}^{1,2}(\Omega)$ гарантируют, что

$$u \in W^{1,2}(Q^\circ) \subset W^{1,1}(Q^\circ), \quad \gamma_0^* u = 0.$$

Неравенство (30) следует из утверждения с) теоремы 9(ii). Условие $\text{supp } f^* \Subset \Omega$ показывает, что $f \in L^p_{w_Q, \text{loc}}(Q \setminus S)$ и $\sum_{I \in \mathfrak{X}} l_I^{n+1-\sigma} \|f\|_I < \infty$. По неравенству Коши и условию $\sigma < \lambda \leq 1/2$

$$\int_Q x_n^{-\sigma} |\nabla u| dx \leq \|x_n^{-\sigma}\|_{L^2(Q)} \|\nabla u\|_{L^2(Q)} < \infty,$$

так что выполнено (31). Уравнение $\Delta u_* = f_*$ следует из уравнения $\Delta u^* = f^*$. Поэтому по теореме 6 имеют место неравенства (32).

Оценим $\|\nabla^2 u^*\|_{L^p_w(\Omega_i)}$, где

$$\Omega_i = h_i^{-1} \left(g_i(\overline{\mathfrak{I}_i} \times (0, l_{\mathfrak{I}_i}]) \right).$$

Из формулы $u^* = u \circ g_i^{-1} \circ h_i$, билипшицевости g_i и определения (30) получаем

$$|\nabla^2 u^*| \leq C_1(n, \kappa^*) \left[|\nabla^2 u| + l_I^{-1} c_I |\nabla u| \right] \circ g_i^{-1} \circ h_i \quad \text{на } h_i^{-1} \left(g_i(I^\square) \right), \quad I \subsetneq \mathfrak{I}_i.$$

Кроме того, $|I^\square|_{w_Q} = \int_{I^\square} w_Q dx \leq \kappa^{*n} \int_{h_i^{-1}(g_i(I^\square))} w dx = \kappa^{*n} a_I$. Отсюда, из билипшицевости g_i и неравенств $c_I \leq T_I$ и (32)

$$\begin{aligned} \|\nabla^2 u^*\|_{L^p_w(\Omega_i)}^p &= \sum_{I \in \mathfrak{X} \equiv \mathfrak{D}_{\mathfrak{I}_i} : I \subsetneq \mathfrak{I}_i} \int_{h_i^{-1}(g_i(I^\square))} |\nabla^2 u^*|^p w dx \\ &\leq C_1^{p-1} 2^{p-1} \kappa^{*n} \sum_{I : I \subsetneq \mathfrak{I}_i} \int_{I^\square} \left[|\nabla^2 u|^p + l_I^{-p} c_I^p |\nabla u|^p \right] w_Q dx \\ &\leq C_1^{p-1} 2^{p-1} \kappa^{*2n} \sum_{I : I \subsetneq \mathfrak{I}_i} a_I \left[\|\nabla^2 u\|_I^p + l_I^{-p} c_I^p \|\nabla u\|_I^p \right] \\ &\leq C_2(n, p, \theta_Q, \kappa^*, \sigma) \sum_{I \in \mathfrak{X}} a_I l_I^{-p} \left[F_I^p + T_I^p W_I^p \right]. \end{aligned}$$

Через c будем обозначать разные не зависящие от f^* и I положительные постоянные. В силу определения чисел F_I

$$\sum_{I \in \mathfrak{X}} a_I l_I^{-p} F_I^p \leq 2^{p-1} \mu_0^p \mathcal{A}^p \sum_{I \in \mathfrak{X}} a_I l_I^{-\sigma p} + 2^{p-1} \sum_{I \in \mathfrak{X}} a_I \left(\sum_{J \in \mathfrak{X}} \Gamma_{IJ}^{(-\sigma, n+1-\sigma)} \|f\|_J \right)^p.$$

Применяя утверждение а) теоремы 9(ii), оценку (63а) с $K = \mathfrak{I}_i$, неравенство $\sigma < \lambda$ и теорему 8, а также выражение для величины $\mathcal{A}$, оценки (51) и замену переменной, получаем неравенство

$$(79) \quad \sum_{I \in \mathfrak{X}} a_I l_I^{-p} F_I^p \leq c \left[\left(\int_\Omega \varrho^{-\sigma} |u^*| dx \right)^p + \int_\Omega |f^*|^p w dx \right] \equiv c \mathfrak{R}.$$

По лемме 24 имеем $(g_i)_n(\cdot, 0) \in \text{LLD}(\overline{3\mathfrak{I}_i})$, откуда $S_I \leq c$ (см. (60')) и

$$(80a) \quad W_I \leq c \beta_I \equiv c \sum_{J \in \mathfrak{X} : I \subset J} F_J.$$

В силу утверждения б) теоремы 9(ii) имеет место ДВН (76), поэтому

$$(80b) \quad \sum_{I \in \mathfrak{X}} a_I l_I^{-p} T_I^p W_I^p \stackrel{(80a)}{\leq} c \sum_{I \in \mathfrak{X}} a_I l_I^{-p} T_I^p |\beta_I|^p \stackrel{(76)}{\leq} c \sum_{I \in \mathfrak{X}} a_I l_I^{-p} F_I^p \stackrel{(79)}{\leq} c \mathfrak{R}.$$

Поэтому с учетом предыдущего абзаца

$$\|\nabla^2 u^*\|_{L_w^p(\Omega_i)}^p \leq c\mathfrak{R}.$$

Для любого открытого множества $\Omega_0 \Subset \Omega$ имеет место оценка

$$\|u^*\|_{W_w^{2,p}(\Omega_0)}^p \leq c\mathfrak{R},$$

которая следует из леммы 5 после покрытия Ω_0 малыми кубами B с $2B \Subset \Omega$. В силу (56) можно взять Ω_0 таким образом, что $\Omega = \bigcup_{i=0}^N \Omega_i$, откуда

$$\|\nabla^2 u^*\|_{L_w^p(\Omega)}^p \leq c\mathfrak{R}.$$

Оценим $\|\nabla u^*\|_{L_w^p(\Omega)}$ и $\|u^*\|_{L_w^p(\Omega)}$. Аналогично предыдущему,

$$\|\nabla u^*\|_{L_w^p(\Omega_i)}^p \leq C_3(n, p, \kappa^*) \sum_{I \in \mathfrak{X}: I \subsetneq \mathfrak{I}_i} a_I \|\nabla u\|_I^p \leq C_3 \mu_1^p \sum_{I \in \mathfrak{X}} a_I W_I^p \quad (i \neq 0),$$

$$(80c) \quad W_I \stackrel{(80a)}{\leq} c\beta_I = c \sum_{J \in \mathfrak{X}: I \subset J} F_J \leq c \sum_{J \in \mathfrak{X}} \Gamma_{IJ}^{(0,n+1)} F_J,$$

$$(80d) \quad \sum_{I \in \mathfrak{X}} a_I W_I^p \stackrel{(80c)}{\leq} c \sum_{I \in \mathfrak{X}} a_I \left(\sum_{J \in \mathfrak{X}} \Gamma_{IJ}^{(0,n+1)} F_J \right)^p$$

$$\leq c \sum_{I \in \mathfrak{X}} a_I F_I^p \leq c l_{\mathfrak{I}_i}^p \sum_{I \in \mathfrak{X}} a_I l_I^{-p} F_I^p \stackrel{(79)}{\leq} c\mathfrak{R},$$

$$\|\nabla u^*\|_{L_w^p(\Omega)}^p \leq \sum_{i=0}^N \|\nabla u^*\|_{L_w^p(\Omega_i)}^p \leq c\mathfrak{R}.$$

Из леммы 5 и билипшицевости g_i следует, что $\{\|u\|_{\mathfrak{I}_i} + l_{\mathfrak{I}_i} \|\nabla u\|_{\mathfrak{I}_i}\}^p \leq c\mathfrak{R}$. Используя упрощенный вариант леммы 19 и неравенство (32a), для $I \subsetneq \mathfrak{I}_i$ получаем

$$\|u\|_I \leq \|u\|_{\mathfrak{I}_i} + C_4(n, p, \theta_Q) \left[l_{\mathfrak{I}_i} \|\nabla u\|_{\mathfrak{I}_i} + \sum_{J: I \subset J \subsetneq \mathfrak{I}_i} l_J \|\nabla u\|_J \right]$$

$$\leq c\mathfrak{R}^{1/p} + \frac{C_4 \mu_1}{2} l_{\mathfrak{I}_i} \sum_{J: I \subset J \subsetneq \mathfrak{I}_i} W_J \leq c\mathfrak{R}^{1/p} + c \sum_{J \in \mathfrak{X}} \Gamma_{IJ}^{(0,n+1)} W_J,$$

$$\|u^*\|_{L_w^p(\Omega_i)}^p \leq \kappa^{*2n} \sum_{I: I \subsetneq \mathfrak{I}_i} a_I \|u\|_I^p \leq c\mathfrak{R} \sum_{I \in \mathfrak{X}} a_I + c \sum_{I \in \mathfrak{X}} a_I W_I^p \stackrel{(80d)}{\leq} c\mathfrak{R} \quad (i \neq 0),$$

$$\|u^*\|_{L_w^p(\Omega)}^p \leq \sum_{i=0}^N \|u^*\|_{L_w^p(\Omega_i)}^p \leq c\mathfrak{R}.$$

Условие $u^* \in \mathring{W}^{1,q}(\Omega)$ и леммы 13.5 и 13.7 из [86] позволяют оценить первое слагаемое в величине $\mathfrak{R}$, откуда для некоторого $c_0 > 0$ имеем

$$(81) \quad \|u^*\|_{W_w^{2,p}(\Omega)} \leq c_0 \left[\|\nabla u^*\|_{L^q(\Omega)} + \|f^*\|_{L_w^p(\Omega)} \right], \quad f^* \in C_0^\infty(\Omega).$$

Рассуждая стандартно, покажем существование такого $D > 0$, что

$$(82) \quad \|u^*\|_{W_w^{2,p}(\Omega)} \leq D \|f^*\|_{L_w^p(\Omega)}, \quad f^* \in C_0^\infty(\Omega).$$

Допустим обратное. Тогда найдётся последовательность f_j^* в $C_0^\infty(\Omega)$ такая, что

$$\|u_j^*\|_{W_w^{2,p}(\Omega)} = 1, \quad \|f_j^*\|_{L_w^p(\Omega)} \rightarrow 0 \text{ при } j \rightarrow \infty.$$

Лемма 32 гарантирует, после перехода к подпоследовательностям, сходимость в $L^q(\Omega)$ последовательностей $\{D_i u_j^*\}_1^\infty$ для всех $1 \leq i \leq n$. Подстановка разностей $f_j^* - f_k^*$ в (81) даёт в силу банаховости $W_w^{2,p}(\Omega)$ (см. теорему 4.12 в [33]) сходимость u_j^* в $W_w^{2,p}(\Omega)$ к некоторому $u_0^* \in W_w^{2,p}(\Omega)$ при $j \rightarrow \infty$. Непрерывность нормы в $W_w^{2,p}(\Omega)$ и лапласиана из $W_w^{2,p}(\Omega)$ в $L_w^p(\Omega)$ показывает, что

$$\|u_0^*\|_{W_w^{2,p}(\Omega)} = 1, \quad \Delta u_0^* = 0.$$

Из сходимости $\{u_j^*\}$ в $W^{1,q}(\Omega)$ следует, что $u_0^* \in \dot{W}^{1,q}(\Omega)$. Мы приходим к противоречию с теоремой 7, что доказывает (82).

Множество $C_0^\infty(\Omega)$ плотно в $L_w^p(\Omega)$, поскольку $w \in A_{p,\text{loc}}(\Omega)$. Отсюда, из (82) и из теоремы 7 вытекает утверждение (ОР). $\square$

Доказательство теоремы 11. Изменим немного доказательство теоремы 10. Вместо теоремы 6 применим замечание 1 к ней с параметрами $(p, \theta, \kappa, \sigma, t_0) = (p, \theta_Q, \kappa^*, \sigma, t_0)$, где $t_0 = t_0(n, \sigma)$ таково, что в силу (18a) и (18c)

$$(83) \quad e^{\vartheta(S_I - S_{I'})} \leq e^{b_1 b_4 \vartheta M} \leq e^{b_1 b_4 t_0} \leq 2^\sigma.$$

Кубы $\mathfrak{I}_z \in \mathcal{D}$ выбираем со свойством $l_{\mathfrak{I}_z} \leq l^*$, не прибегая к лемме 24. Оценка (80a) в общем случае неверна. Дальнейшие изменения связаны с пересмотром выкладок (80b), (80c) и (80d) и заданием постоянной ε .

В силу определения чисел W_I и неравенств (83), $\sigma < 1/2$ и (18c) имеем

$$\begin{aligned} 0 \leq W_I - W_{I'} &= F_I + [e^{\vartheta(S_I - S_{I'})} - 1] W_{I'} \\ &\leq F_I + \mu \vartheta (S_I - S_{I'}) W_{I'} \leq F_I + \mu \vartheta b_4 T_I W_I, \end{aligned}$$

где $\mu = \frac{\sqrt{2}-1}{\ln \sqrt{2}}$. Для $k \in \mathbb{N}_0$ и $I \in \mathfrak{X}$ положим

$$\beta_I = \begin{cases} W_I, & l_I \geq 2^{1-k} l_{\mathfrak{I}}, \\ W_J, & I \subset J \text{ и } l_J = 2^{-k} l_{\mathfrak{I}}. \end{cases}$$

С учетом ДВН (76) получаем

$$\begin{aligned} \Sigma_k &\equiv \sum_{I \in \mathfrak{X}: l_I \geq 2^{-k} l_{\mathfrak{I}}} a_I l_I^{-p} T_I^p W_I^p \leq \sum_{I \in \mathfrak{X}} a_I l_I^{-p} T_I^p |\beta_I|^p \\ &\leq C_Z \sum_{I \in \mathfrak{X}} a_I l_I^{-p} |\beta_I - \beta_{I'}|^p = C_Z \sum_{I \in \mathfrak{X}: l_I \geq 2^{-k} l_{\mathfrak{I}}} a_I l_I^{-p} |W_I - W_{I'}|^p \\ &\leq 2^{p-1} C_Z \sum_{I \in \mathfrak{X}: l_I \geq 2^{-k} l_{\mathfrak{I}}} a_I l_I^{-p} \left[F_I^p + (\mu \vartheta b_4)^p T_I^p W_I^p \right] \\ &\leq 2^{p-1} C_Z \sum_{I \in \mathfrak{X}} a_I l_I^{-p} F_I^p + C'_Z \Sigma_k \quad \text{для } C'_Z = 2^{p-1} (\mu \vartheta b_4)^p C_Z. \end{aligned}$$

В отличие от доказательства теоремы 10 постоянную C_Z можно оценить: из леммы 2(iii) и условий (i)–(iii) теоремы 11 следует, что можно взять

$$C_Z = C'_0(n, p, \lambda, \kappa, A, \theta, 2^{np} \theta) \varepsilon$$

для C'_0 из теоремы 9(ii), поэтому $C'_Z = C''_0(n, p, \lambda, \kappa, A, \theta) \varepsilon$. Положив

$$\varepsilon = (2C''_0)^{-1},$$

ввиду конечности сумм Σ_k получаем

$$\sum_{I \in \mathfrak{X}} a_I l_I^{-p} T_I^p W_I^p = \lim_{k \rightarrow \infty} \Sigma_k \leq 2^p C_Z \sum_{I \in \mathfrak{X}} a_I l_I^{-p} F_I^p \stackrel{(79)}{\leq} c \mathfrak{R},$$

что заменяет выкладки (80b). Неравенство (80с) применяется только в выводе оценки (80d), которая остаётся справедливой, поскольку ввиду (83)

$$W_I = \sum_{J \in \mathfrak{X}: I \subset J} F_J e^{\vartheta(S_I - S_J)} \leq \sum_{J \in \mathfrak{X}} \Gamma_{IJ}^{(-\sigma, n+1-\sigma)} F_J,$$

откуда $\sum_{I \in \mathfrak{X}} a_I W_I^p \leq c \sum_{I \in \mathfrak{X}} a_I F_I^p$ по теореме 8. В остальном доказательство теоремы 11 не отличается от доказательства теоремы 10. $\square$

5.2. Общие веса класса $\mathfrak{A}_p^{\text{comp}}(\Omega)$. Применим полученные выше результаты к некоторым классам весов и областей. Основной проблемой будет проверка $W_w^{2,p}$ -распрямляемости. В этой связи рассмотрим сначала общее ДВН

$$(84) \quad (\exists C > 0) (\forall \beta_I \in \mathbb{R}) \quad \sum_{I \in \mathfrak{X}} a_I |\beta_I|^p \leq C \sum_{I \in \mathfrak{X}} b_I |\beta_I - \beta_{I'}|^p,$$

в котором $\mathfrak{X} = \mathfrak{D}_{\mathfrak{J}}$ для некоторого $\mathfrak{J} \in \mathcal{D}$, $a_I \geq 0$, $b_I \geq 0$ и $1 < p < \infty$, а число $\beta_{I'}$ понимается так же, как в ДВН (71), (74a), (74b) и (76). За незначительными отличиями критерий справедливости этого ДВН содержится в теореме 16 из [15]. Следуя доказательству этой теоремы, получим простое достаточное условие.

Лемма 33. Пусть множество $\mathfrak{Y}$ таково, что $\mathfrak{I}_{\odot} \subset \mathfrak{Y} \subset \mathfrak{X}$. Для любого $I \in \mathfrak{X}$ через Y_I обозначим первый куб последовательности $I, I', I'', \dots$, который принадлежит $\mathfrak{Y}$.

(i) Если существует такое $C' > 0$, что для любых $\beta_I \in \mathbb{R}$

$$(84') \quad \sum_{I \in \mathfrak{X}} a_I |\beta_{Y_I}|^p \leq C' \sum_{I \in \mathfrak{X}} b_I |\beta_I - \beta_{I'}|^p,$$

а также существует такое $c > 0$, что суммы

$$A_J \equiv \sum_{I \in \mathfrak{X}: I \subset J \subset Y_I} a_I$$

для любого $I \in \mathfrak{X}$ со свойством $a_I > 0$ удовлетворяют неравенству

$$(85) \quad \sum_{J \in \mathfrak{X}: I \subset J \subset Y_I} [A_J b_J^{-1}]^{1/(p-1)} \leq c,$$

то выполнено условие (84) с $C = 2^{p-1} C' + 2^{p-1} c^{p-1}$.

(ii) Если $\mathfrak{Y} = \mathfrak{I}_{\odot}$ и выполнено (85), то имеет место (84) с $C = c^{p-1}$.

Замечание. Подразумевается, что в оценке (85) нет деления на ноль, то есть $b_J > 0$ при $a_I > 0$ и $I \subset J \subset Y_I$.

Доказательство. (i) Пусть $a_I > 0$. Ясно, что $A_J > 0$ при $I \subset J \subset Y_I$, откуда

$$\begin{aligned} |\beta_I|^p &\leq \left(|\beta_{Y_I}| + \sum_{J \in \mathfrak{X}: I \subset J \subset Y_I} |\beta_J - \beta_{J'}| A_J^{-1/p} b_J^{1/p} \cdot A_J^{1/p} b_J^{-1/p} \right)^p \\ &\leq 2^{p-1} |\beta_{Y_I}|^p + 2^{p-1} \left(\sum_J |\beta_J - \beta_{J'}|^p A_J^{-1} b_J \right) \left(\sum_J [A_J b_J^{-1}]^{1/(p-1)} \right)^{p-1} \end{aligned}$$

$$\leq 2^{p-1} |\beta_{Y_I'}|^p + 2^{p-1} c^{p-1} \sum_{J \in \mathfrak{X}: I \subset J \subset Y_I} |\beta_J - \beta_{J'}|^p A_J^{-1} b_J$$

для любых $\beta_I \in \mathbb{R}$ согласно неравенству Гёльдера и (85). Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{I \in \mathfrak{X}} a_I |\beta_I|^p &\leq 2^{p-1} \sum_{I \in \mathfrak{X}} a_I |\beta_{Y_I'}|^p + 2^{p-1} c^{p-1} \sum_{J \in \mathfrak{X}} |\beta_J - \beta_{J'}|^p A_J^{-1} b_J \sum_{I \in \mathfrak{X}: I \subset J \subset Y_I} a_I \\ &\stackrel{(84')}{\leq} (2^{p-1} C' + 2^{p-1} c^{p-1}) \sum_{I \in \mathfrak{X}} b_I |\beta_I - \beta_{I'}|^p. \end{aligned}$$

(ii) При $\mathfrak{Y} = \mathfrak{J}_\odot$ имеем $Y_I \odot \mathfrak{J} = 0$ для любого I , что позволяет внести необходимые изменения в доказательство утверждения (i). $\square$

Применим это достаточное условие к ДВН (71).

Теорема 12. Пусть $w \in \mathfrak{A}_p(\Omega)_\lambda \cap D^{\text{comp}}(\Omega)$ и дана (κ, A, A) -карта $(\mathfrak{J}, g, r, h)$ в точке $z \in \partial\Omega$, где $1 < p < \infty$, $0 < \lambda < 1$, $\Omega \in C^{0,1}$ и

$$(86) \quad l_{\mathfrak{J}} \leq \min \left\{ \frac{r_0}{2\kappa\sqrt{n}}, \frac{r}{8\kappa\sqrt{n}\sqrt{1+A^2}} \right\} \quad \text{для } r_0 \text{ из определения 14.}$$

Пусть числа a_I взяты из (65), множество $\mathfrak{Y}$ и отображение $I \mapsto Y_I$ такие, как в лемме 33, а числа $b_I^{(1)} \geq 0$ удовлетворяют условию

$$(87) \quad (l_I/l_{Y_I})^\lambda b_I^{(1)} \leq l_I b_{Y_I}^{(1,1)} \leq b, \quad I \in \mathfrak{X},$$

для некоторых постоянных $b_Y^{(1,1)}$ ($Y \in \mathfrak{Y}$) и $b < \infty$. Пусть также

$$(88) \quad (\exists B > 0) (\forall \beta_I \in \mathbb{R}) \quad \sum_{Y \in \mathfrak{Y}} a_Y [b_Y^{(1,1)}]^p |\beta_{Y'}|^p \leq B \sum_{I \in \mathfrak{X}} a_I l_I^{-p} |\beta_I - \beta_{I'}|^p.$$

Тогда выполнено неравенство (71) с постоянной

$$C_z = [B + b^p] c_0(n, p, \lambda, \kappa, A, C, \theta^*),$$

где постоянная C взята из (64a), а $\theta^* \geq D[w]$.

Доказательство. Из второго абзаца доказательства леммы 27 известно, что выполнена оценка (63a) с постоянной $\theta_1 = \theta_1(n, p, \lambda, \kappa, A, C, \theta^*)$. Отсюда

$$\begin{aligned} \sum_{I \in \mathfrak{X}} a_I l_I^{-p} [b_I^{(1)}]^p |\beta_{Y_I'}|^p &\leq \sum_{Y \in \mathfrak{Y}} [b_Y^{(1,1)}]^p |\beta_{Y'}|^p \sum_{I: Y_I=Y} \left(\frac{l_Y}{l_I} \right)^{\lambda p} a_I \\ &\leq \theta_1 \sum_{Y \in \mathfrak{Y}} a_Y [b_Y^{(1,1)}]^p |\beta_{Y'}|^p \leq \underbrace{\theta_1 B}_{C'} \sum_{I \in \mathfrak{X}} a_I l_I^{-p} |\beta_I - \beta_{I'}|^p. \end{aligned}$$

Для $I \in \mathfrak{X}$ рассмотрим J и I_1 такие, что $I \subset J \subset Y_I$ и $I_1 \subset J \subset Y_{I_1}$. Как Y_I , так и Y_{I_1} являются первым в $\mathfrak{Y}$ элементом последовательности $J, J', J'', \dots$, так что $Y_I = Y_{I_1}$. Обозначив $b_J = a_J l_J^{-p}$, выводим

$$\begin{aligned} A_J &\equiv \sum_{I_1 \in \mathfrak{X}: I_1 \subset J \subset Y_{I_1}} a_{I_1} l_{I_1}^{-p} [b_{I_1}^{(1)}]^p \leq [b_{Y_{I_1}}^{(1,1)}]^p \sum_{I_1 \in \mathfrak{X}: I_1 \subset J} \left(\frac{l_{Y_{I_1}}}{l_{I_1}} \right)^{\lambda p} a_{I_1} \\ &\leq \theta_1 \left(\frac{l_{Y_I}}{l_J} \right)^{\lambda p} a_J [b_{Y_I}^{(1,1)}]^p, \\ A_J b_J^{-1} &\leq \theta_1 [l_{Y_I}^\lambda b_{Y_I}^{(1,1)}]^p l_J^{(1-\lambda)p}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{J \in \mathfrak{X}: I \subset J \subset Y_I} [A_J b_J^{-1}]^{1/(p-1)} &\leq \theta_1^{1/(p-1)} [l_{Y_I}^\lambda b_{Y_I}^{(1,1)}]^{p-1} \sum_{J \in \mathfrak{X}: I \subset J \subset Y_I} l_J^{(1-\lambda) \frac{p}{p-1}} \\
&\leq \theta_1^{1/(p-1)} c_1(\lambda, p) [l_{Y_I} b_{Y_I}^{(1,1)}]^{p-1} \\
&\leq c \equiv \theta_1^{1/(p-1)} c_1 b^{p/(p-1)}.
\end{aligned}$$

По лемме 33(i) получаем искомое утверждение с $c_0 = (2c_1)^{p-1} \theta_1$. $\square$

Лемма 34. Пусть область $\Omega \in C^{0,1}$ принадлежит классу $C^{1,1}$ в точке z из $\partial\Omega$. Пусть $1 < p < \infty$ и $w \in \mathfrak{A}_p(\Omega) \cap D^{\text{comp}}(\Omega)$. Тогда для любого $\delta > 0$ Ω является $W_w^{2,p}$ -распрямляемой в точке z с параметрами (δ, δ) .

Доказательство. Имеем $w \in \mathfrak{A}_p(\Omega)_\lambda \cap D^{\text{comp}}(\Omega)$ для некоторого $0 < \lambda < 1$. Для $\varepsilon(t) = t$ найдём (δ, δ) -карту $(r, \vec{h})$ в точке z по замечанию к определению 11. Положим $A = \delta$ и, в терминах леммы 21, $\kappa = \kappa(n, \delta, 1)$. Взяв куб $\mathfrak{I} \in \mathcal{D}$ со свойством (86), построим (κ, δ, δ) -карту $(\mathfrak{I}, g, r, h)$ в точке z по лемме 21(ii). Градиент функции (52с) липшицев ввиду (55), поэтому для чисел (54)

$$b_I^{(1)} \leq l_I b^{(1,1)} \leq b \equiv l_{\mathfrak{I}} b^{(1,1)}, \quad I \in \mathfrak{X},$$

для некоторого $b^{(1,1)} > 0$. Положив $b_Y^{(1,1)} = b^{(1,1)}$ при $Y \in \mathfrak{Y} \equiv \mathfrak{I}_\odot$, обеспечиваем выполнение оценок (87) и (88). Теорема 12 доказывает $W_w^{2,p}$ -распрямляемость области Ω в точке z с параметрами (δ, δ) . $\square$

Следствие 2. Если $\Omega \in C^{1,1}$, $1 < p < \infty$ и $w \in \mathfrak{A}_p^{\text{comp}}(\Omega)$, то для задачи (77) имеет место утверждение (OP) теоремы 10.

Доказательство. Положив $A = 1$, рассмотрим произвольные $z \in \partial\Omega$ и $\delta > 0$. Ввиду лемм 2(iii) и 34 область Ω $W_w^{2,p}$ -распрямляема в точке z с параметрами (δ_A, δ_A) , где $\delta_A = \min\{A, \delta\}$, а значит, и с параметрами (A, δ) . Очевидное вложение

$$C^{1,1} \subset \text{Lz} \cap \text{LLD}$$

и следствие 1 доказывают утверждение (OP) теоремы 10. $\square$

Из следствия 2 и леммы 29 непосредственно вытекает

Следствие 3. Если $\Omega \in C^{1,1}$, $1 < p < \infty$, $W \in A_{p, \frac{n+1}{n}}(\Omega)$ и $w \equiv W|_\Omega \in A_p^{\text{comp}}(\Omega)$, то для задачи (77) имеет место утверждение (OP) теоремы 10.

Следствие 3 обобщает соответствующие результаты из [40] и [79] в плане ослабления условий на вес w . А именно, теорема 4.1.3 из [79] является аналогом следствия 3 для уравнения $(\lambda - \Delta)u = f$ и веса $W \in A_p$, а теорема 2.4 из [40] — таким же аналогом для уравнения $\Delta u = f$, веса $W \in A_p$ и области $\Omega \in C^2$.

5.3. Степенные веса и границы с особенностью в точке. Изучим при помощи теоремы 12 $W_w^{2,p}$ -распрямляемость в точечной особенности.

Лемма 35. Пусть $\Omega \in C^{0,1}$, $1 < p < \infty$ и $w \in \mathfrak{A}_p(\Omega) \cap D^{\text{comp}}(\Omega)$, а в точке $z \in \partial\Omega$ задана (κ, A, δ) -карта $(\mathfrak{I}, g, r, h)$ со свойством (86). Ей сопоставлены числа из (65) и (54). Для $i = 0, -1, -2, \dots$ положим

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Y} &= \{Y \in \mathfrak{X}: \text{dist}_\infty(\{\mathfrak{c}_{\mathfrak{I}}\}, Y) < 2l_Y\}, \\
\mathfrak{Y}_i &= \{Y \in \mathfrak{Y}: l_Y = 2^i l_{\mathfrak{I}}\}, \\
a_i &= \sum_{Y \in \mathfrak{Y}_i} a_Y.
\end{aligned}$$

Допустим, что функция (52с) принадлежит классу $C^2(\overline{3\mathfrak{I}} \setminus \{\mathfrak{c}_\mathfrak{I}\})$ и

$$(89a) \quad \sup_{\xi \in \overline{3\mathfrak{I}}: 2^{i-1}l_\mathfrak{I} \leq |\xi - \mathfrak{c}_\mathfrak{I}|_\infty \leq 5 \cdot 2^{i-1}l_\mathfrak{I}} |\nabla^2 \omega(\xi)| \leq b_i,$$

$$(89b) \quad b_Y^{(1)} \leq l_Y b_i \leq b', \quad Y \in \mathfrak{Y}_i,$$

для некоторых постоянных b_i и $b' < \infty$. Пусть также

$$(88') \quad (\exists B' > 0) (\forall \beta_i \in \mathbb{R}) \quad \sum_{i=-\infty}^{-1} a_i b_i^p |\beta_{i+1}|^p \leq B' \sum_{i=-\infty}^0 a_i 2^{-ip} |\beta_i - \beta_{i+1}|^p,$$

где $\beta_1 = 0$. Тогда $\Omega W_w^{2,p}$ -распрямляема в точке z с параметрами (κ, A, δ) .

Доказательство. Имеем $w \in \mathfrak{A}_p(\Omega)_\lambda \cap D^{\text{comp}}(\Omega)$ для некоторого $0 < \lambda < 1$, поэтому в теореме 12 проверить нужно лишь условия (87) и (88). Если $I \in \mathfrak{X} \setminus \mathfrak{Y}$, то имеем $I \subset Y_I^\downarrow \subset Y_I$ для некоторого $Y_I^\downarrow \in \mathfrak{X} \setminus \mathfrak{Y}$ со свойством $l_{Y_I^\downarrow} = l_{Y_I}/2$. Ввиду $Y_I^\downarrow \notin \mathfrak{Y}$ получаем $\text{dist}_\infty(\{\mathfrak{c}_\mathfrak{I}\}, Y_I^\downarrow) \geq 2l_{Y_I^\downarrow}$, откуда

$$\overline{3I} \subset \overline{3Y_I^\downarrow} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^{n-1} : |\xi - \mathfrak{c}_\mathfrak{I}|_\infty \geq l_{Y_I^\downarrow} = l_{Y_I}/2\}.$$

В силу включения $Y_I \in \mathfrak{Y}$ легко убедиться, что $\text{dist}_\infty(\{\mathfrak{c}_\mathfrak{I}\}, Y_I) \leq l_{Y_I}$, поэтому

$$\overline{3I} \subset \overline{3Y_I^\downarrow} \subset \overline{2Y_I} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^{n-1} : |\xi - \mathfrak{c}_\mathfrak{I}|_\infty \leq 5l_{Y_I}/2\}.$$

Отсюда, из (89a) и формулы Тейлора

$$b_I^{(1)} \leq C_1(n) l_I b_i, \quad Y_I \in \mathfrak{Y}_i.$$

Если же $I \in \mathfrak{Y}$, то в силу (89b) с $Y = I$ имеем

$$b_I^{(1)} \leq l_I b_i, \quad I = Y_I \in \mathfrak{Y}_i.$$

Значит, если для $I \in \mathfrak{X}$ индекс $i(I)$ определяется условием $Y_I \in \mathfrak{Y}_{i(I)}$, то

$$b_I^{(1)} \leq \max\{C_1, 1\} l_I b_{i(I)}.$$

Положив для $Y \in \mathfrak{Y}$

$$b_Y^{(1,1)} = \max\{C_1, 1\} b_{i(Y)},$$

приходим к условию (87), поскольку

$$\begin{aligned} b_I^{(1)} &\leq \max\{C_1, 1\} l_I b_{i(I)} = \max\{C_1, 1\} l_I b_{i(Y_I)} \\ &= l_I b_{Y_I}^{(1,1)} \leq l_{Y_I} b_{Y_I}^{(1,1)} \stackrel{(89b)}{\leq} b \equiv \max\{C_1, 1\} b'. \end{aligned}$$

Для любых $\beta_I \in \mathbb{R}$ ($I \in \mathfrak{X}$) и $i = 0, -1, -2, \dots$ положим

$$\beta_i = \sum_{j=i}^0 \max_{Y \in \mathfrak{Y}_j} |\beta_Y - \beta_{Y'}|.$$

Если $Y \in \mathfrak{Y}_i$, то $Y' \in \mathfrak{Y}_{i+1}$, $Y'' \in \mathfrak{Y}_{i+2}$ и т.д., откуда

$$\begin{aligned} |\beta_Y| &\leq |\beta_Y - \beta_{Y'}| + |\beta_{Y'} - \beta_{Y''}| + \dots \leq \beta_i, \\ |\beta_i - \beta_{i+1}|^p &= \left(\max_{Y \in \mathfrak{Y}_i} |\beta_Y - \beta_{Y'}| \right)^p \leq \sum_{Y \in \mathfrak{Y}_i} |\beta_Y - \beta_{Y'}|^p, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{Y \in \mathfrak{Y}} a_Y [b_Y^{(1,1)}]^p |\beta_{Y'}|^p &= \sum_{i=-\infty}^{-1} \sum_{Y \in \mathfrak{Y}_i} a_Y [b_Y^{(1,1)}]^p |\beta_{Y'}|^p \leq \max\{C_1^p, 1\} \sum_{i=-\infty}^{-1} a_i b_i^p \beta_{i+1}^p \\ &\leq \max\{C_1^p, 1\} B' \sum_{i=-\infty}^0 a_i 2^{-ip} \sum_{Y \in \mathfrak{Y}_i} |\beta_Y - \beta_{Y'}|^p. \end{aligned}$$

Ввиду неравенства $\text{dist}_\infty(\{\mathfrak{c}_\mathfrak{I}\}, Y_1) \leq l_{Y_1}$, билипшицевости g и (66b) имеем

$$E \equiv \bigcup_{Y_1 \in \mathfrak{Y}_i} h^{-1}(g(Y_1^\square))^\circ \subset B_1 \equiv \{x \in \Omega: |x - z| < R \text{ и } \varrho(x) \geq c_1 R\},$$

$$R \equiv 2\kappa\sqrt{n}2^i l_\mathfrak{I}, \quad c_1 \equiv \frac{1}{2\kappa^2\sqrt{n}\sqrt{1+A^2}}.$$

При этом $R \leq r/4\sqrt{1+A^2}$ в силу (86). Для любого $Y \in \mathfrak{Y}_i$ разместим шар B_0 леммы 26 внутри множества $h^{-1}(g(Y^\square))$ и получим

$$\begin{aligned} a_i = |E|_w &\leq |B_1|_w \leq C_2(n, \kappa, A, D[w])|B_0|_w \leq C_2 a_Y, \\ \sum_{Y \in \mathfrak{Y}} a_Y [b_Y^{(1,1)}]^p |\beta_{Y'}|^p &\leq \max\{C_1^p, 1\} B' C_2 l_\mathfrak{I}^p \sum_{Y \in \mathfrak{Y}} a_Y l_Y^{-p} |\beta_Y - \beta_{Y'}|^p. \end{aligned}$$

Значит, верно (88). Применение теоремы 12 завершает доказательство. $\square$

Рассмотрим для $\alpha \in \mathbb{R}$ степенные веса

$$w_\alpha(x) = |x - z|^\alpha \quad (z \in \partial\Omega), \quad \varrho^\alpha(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega)^\alpha.$$

Для любого куба $Q \subset \Omega$ со свойством $\ell(Q) \leq \text{dist}(Q, \partial\Omega)$ имеем

$$\sup_Q w_1 \leq \inf_Q w_1 + \text{diam}(Q) \leq (1 + \sqrt{n}) \inf_Q w_1, \quad \sup_Q w_\alpha \leq (1 + \sqrt{n})^{|\alpha|} \inf_Q w_\alpha,$$

откуда

$$(90a) \quad \begin{cases} w_\alpha \in A_p^{\text{comp}}(\Omega) \subset D^{\text{comp}}(\Omega), \\ A_p[w_\alpha] \leq (1 + \sqrt{n})^{|\alpha|}, \quad D[w_\alpha] \leq 2^n (1 + \sqrt{n})^{|\alpha|}. \end{cases}$$

Аналогичное рассуждение показывает, что

$$(90b) \quad \begin{cases} \varrho^\alpha \in A_p^{\text{comp}}(\Omega) \subset D^{\text{comp}}(\Omega), \\ A_p[\varrho^\alpha] \leq (1 + \sqrt{n})^{|\alpha|}, \quad D[\varrho^\alpha] \leq 2^n (1 + \sqrt{n})^{|\alpha|}. \end{cases}$$

Хорошо известно, что $w_\alpha \in A_p \Leftrightarrow -n < \alpha < n(p-1)$, поэтому

$$(91a) \quad w_\alpha \in \mathfrak{A}_p^{\text{comp}}(\Omega) \text{ для любого } \alpha \in (-n, pn + p - n)$$

в силу леммы 29 и (90a). Легко убедиться, что этот диапазон α оптимален.

Вместе с тем сходное с (91a) утверждение

$$(91b) \quad \varrho^\alpha \in \mathfrak{A}_p^{\text{comp}}(\Omega) \text{ для любого } \alpha \in (-1, 2p-1)''$$

нельзя получить из леммы 29 в полной общности. В самом деле, в лемме 2.3(vi) из [44] показано, что если $d \in \{1, \dots, n-1\}$ и $M \subset \mathbb{R}^n$ — компактное липшицево d -мерное многообразие, то

$$\text{dist}(\cdot, M)^\alpha \in A_p, \quad \text{если } -(n-d) < \alpha < (n-d)(p-1).$$

В [56, предложение 2.8(ii)] доказан аналог этого результата для d -многообразия M , где $0 < d < n$. Поэтому условие $-1 < \alpha < p-1$ достаточно и, как хорошо

известно, необходимо для включения $\varrho^\alpha \in A_p$. Следовательно, лемма 29 и (90b) устанавливают (91b) только при $\alpha \in (-1, p^{\frac{n+1}{n}} - 1)$.

Докажем (91b) для всех α . Ясно, что $\varrho^\alpha \succ 0$ на Ω . Пусть $A > 0$ таково, что $\Omega \in C_A^{0,1}$. Дополняя рассуждения первого абзаца доказательства леммы 29, найдём такое $r_0 > 0$, что для любых $\sigma > -1$, $z \in \partial\Omega$ и $0 < r \leq r_0$

$$(92) \quad C_1(n, A, \sigma)r^{n+\sigma} \leq \int_{\{x \in \Omega: |x-z| < r\}} \varrho^\sigma(x) dx \leq C_2(n, A, \sigma)r^{n+\sigma}.$$

Отсюда $w \equiv \varrho^\alpha \in L^1(\Omega)$, а (64a) выполнено при $\lambda < \frac{\alpha+1}{p}$. Очевидно, что

$$C_3(n, p, \alpha)\varrho^{-\frac{\alpha}{p-1}} \leq w^* \leq C_4(n, p, \alpha)\varrho^{-\frac{\alpha}{p-1}},$$

откуда с учетом (92) имеем $\varrho^{\frac{p}{p-1}}w^* \in L^1(\Omega)$, а (64b) выполнено при $\lambda < \frac{2p-1-\alpha}{p}$. Поэтому $w \in \mathfrak{A}_p(\Omega)_\lambda$ для некоторого $\lambda > 0$. Ввиду (90b) это даёт (91b).

С помощью леммы 35 докажем $W^{2,2}$ -распрямляемость области Ω примера (0.2) в начале координат с параметрами (δ, δ) для любого $\delta > 0$. Ввиду (91a) или (91b) вес $w \equiv 1$ принадлежит $\mathfrak{A}_2^{\text{comp}}(\Omega)$. Для достаточно малого $r(C, \delta) \leq 1/2$ пара (r, id) является (δ, δ) -картой в точке $z = 0$ с соответствующей функцией ω_C . Возьмём куб $\mathfrak{I} \in \mathcal{D}$ со свойством (86), где $A = \delta$ и $\kappa = \kappa(n, \delta, 1)$ в терминах леммы 21. Построим (κ, δ, δ) -карту $(\mathfrak{I}, g, r, h)$ в точке z по лемме 21(ii). Тогда

$$C_1(\kappa)(2^i l_{\mathfrak{I}})^2 \leq a_i \leq C_2(\kappa)(2^i l_{\mathfrak{I}})^2,$$

а условия (89) выполняются с

$$b_i = \frac{C_3|C|}{(|i| + \log_{1/2} l_{\mathfrak{I}})2^i l_{\mathfrak{I}}}, \quad b' = \frac{C_3|C|}{\log_{1/2} l_{\mathfrak{I}}},$$

для некоторой абсолютной постоянной $C_3 > 0$. Условие (88') справедливо, так как ввиду неравенства Харди

$$(\forall \beta_i \in \mathbb{R}) \quad \sum_{i=-\infty}^{-1} \frac{\beta_{i+1}^2}{(|i| + \log_{1/2} l_{\mathfrak{I}})^2} \leq C_4 \sum_{i=-\infty}^0 |\beta_i - \beta_{i+1}|^2.$$

Лемма 35 даёт требуемый результат.

5.4. Вес ϱ^α и области класса $C^{1,\varepsilon}$. Рассмотрим детальнее случай $w = \varrho^\alpha$.

Следствие 4. Пусть $\Omega \in \text{Lz} \cap \text{LLD}$, $1 < p < \infty$ и дан параметр $\alpha \in (-1, 2p-1)$, причем при $\alpha \in (-1, p-1]$ дополнительно предполагается, что $\Omega \in C^{1,\varepsilon}$ и

$$(93a) \quad \int_0^1 t^{\alpha-p} \varepsilon^p(t) dt < \infty, \quad \alpha \in (-1, p-1),$$

$$(93b) \quad \int_0^1 s^{-1} \left(\int_0^s t^{-1} \varepsilon^p(t) dt \right)^{1/(p-1)} ds < \infty, \quad \alpha = p-1.$$

Тогда для веса $w = \varrho^\alpha$ и задачи (77) верно утверждение (OP) теоремы 10.

Доказательство. Проверим выполнение условий следствия 1. Пусть $A > 0$ таково, что $\Omega \in \text{Lz}(A)$. В силу (91b) достаточно для произвольных $z \in \partial\Omega$ и $\delta > 0$ доказать $W_w^{2,p}$ -распрямляемость Ω в точке z с параметрами (A, δ) .

Ввиду соотношения $\Omega \in \text{Lz}(A)$ существует (A, δ) -карта $(r, \vec{h})$ в точке z . Пусть $\kappa^* = \kappa(n, A, 1)$ в терминах леммы 21. Возьмём куб $\mathfrak{I} \in \mathcal{D}$ с ребром $l_{\mathfrak{I}} \leq \frac{r}{4\kappa^* \sqrt{n}}$

и по лемме 21(ii) построим (κ^*, A, δ) -карту $(\mathfrak{I}, g, r, h)$ в точке z . В силу (66)

$$(94) \quad C_1(n, A, \alpha) l_I^{n+\alpha} \leq a_I \leq C_2(n, A, \alpha) l_I^{n+\alpha}, \quad I \in \mathfrak{X}.$$

Кроме того, $b_I^{(1)} \leq c(n)\delta$ по предложению 1, поэтому при $\alpha \in (p-1, 2p-1)$

$$\begin{aligned} \sum_{I \in \mathfrak{X}} a_I l_I^{-p} [b_I^{(1)}]^p |\beta_I|^p &\leq C_2 [c(n)\delta]^p \sum_{I \in \mathfrak{X}} l_I^{n+\alpha-p} |\beta_I|^p \\ &\leq \delta^p C_3(n, p, A, \alpha) \sum_{I \in \mathfrak{X}} l_I^{n+\alpha-p} |\beta_I - \beta_{I'}|^p \leq \delta^p C_3 C_1^{-1} \sum_{I \in \mathfrak{X}} a_I l_I^{-p} |\beta_I - \beta_{I'}|^p \end{aligned}$$

ввиду следствия 2.3 из [16]. Это означает $W_w^{2,p}$ -распрямляемость области Ω в точке z с параметрами (κ^*, A, δ) .

Пусть $\alpha \in (-1, p-1]$ и, значит, $\Omega \in C^{1,\varepsilon}$. Можно считать, что (A, δ) -карта $(r, \tilde{h})$ построена по замечанию к определению 11 с $\min\{A, \delta\}$ вместо δ , откуда в силу (62a) для $i = 0, -1, -2, \dots$ имеем

$$\varepsilon_i \equiv \max_{I \in \mathfrak{X}: l_I = 2^i l_{\mathfrak{I}}} b_I^{(1)} \leq C_4(n) c_z \varepsilon (2^{i-1} 3 \sqrt{n-1} l_{\mathfrak{I}}).$$

Любой куб $J \in \mathfrak{X}$ с ребром $l_J = 2^j l_{\mathfrak{I}}$ удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} A_J &\equiv \sum_{I \in \mathfrak{X}: I \subset J} a_I l_I^{-p} [b_I^{(1)}]^p \\ &\leq C_2 \sum_{i=-\infty}^j [2^i l_{\mathfrak{I}}]^{n+\alpha-p} \varepsilon_i^p \left(\frac{l_J}{2^i l_{\mathfrak{I}}} \right)^{n-1} = l_J^{n-1} C_2 \sum_{i=-\infty}^j [2^i l_{\mathfrak{I}}]^{1+\alpha-p} \varepsilon_i^p \\ &\leq b_J l_J^{p-1-\alpha} \underbrace{C_1^{-1} C_2 C_4^p C_5(n, p, \alpha) c_z^p}_{C_6} \underbrace{\int_0^{2^j 3 \sqrt{n-1} l_{\mathfrak{I}}} t^{\alpha-p} \varepsilon^p(t) dt}_{S_j}, \end{aligned}$$

где $b_J = a_J l_J^{-p}$. Если $\alpha \in (-1, p-1)$, то в силу (93a) имеем $S_j \leq S_0 < \infty$ и

$$[A_J b_J^{-1}]^{1/(p-1)} \leq l_J^{\frac{p-1-\alpha}{p-1}} (C_6 S_0)^{\frac{1}{p-1}},$$

так что для $\mathfrak{Y} = \mathfrak{I}_{\odot}$ выполнено (85). Если же $\alpha = p-1$, то для любого $I \in \mathfrak{X}$

$$(95) \quad \sum_{J \in \mathfrak{X}: I \subset J} [A_J b_J^{-1}]^{1/(p-1)} \leq c \equiv C_6^{1/(p-1)} \sum_{j=-\infty}^0 S_j^{1/(p-1)} \stackrel{(93b)}{<} \infty.$$

Лемма 33(ii) обеспечивает $W_w^{2,p}$ -распрямляемость Ω в точке z с параметрами (κ^*, A, δ) . Следствие 1 даёт для всех α утверждение (OP) теоремы 10. $\square$

Функция $\varepsilon(t)$ из (93a) удовлетворяет условию Дини, откуда $\Omega \in \text{LLD}$ в силу (62b). Для условия (93b) это неверно, как показывает при $p=2$ пример функции $\varepsilon(t)$, при $t < 1/3$ равной $\frac{1}{(\ln \frac{1}{t}) \ln \ln \frac{1}{t}}$. Поэтому при $\alpha \in [p-1, 2p-1)$ имеет смысл рассмотреть вариант следствия 4 без предположения $\Omega \in \text{LLD}$.

Следствие 5. Для любых $1 < p < \infty$, $\alpha \in [p-1, 2p-1)$ и $A > 0$ существует

$$\delta = \delta(n, p, \alpha, A) > 0$$

такое, что для любой области $\Omega \in \text{LZ}(A, \delta)$ (удовлетворяющей при $\alpha = p-1$ дополнительно условиям $\Omega \in C^{1,\varepsilon}$ и (93b)) для веса $w = \varrho^\alpha$ и задачи (77) имеет место утверждение (OP) теоремы 10.

Доказательство. Изменим доказательство следствия 4 путём замены в нём следствия 1 на теорему 11.

Из вывода утверждения (91b) видно, что λ со свойством $\varrho^\alpha \in \mathfrak{A}_p^{\text{comp}}(\Omega)_\lambda$ можно взять зависящим лишь от p и α . Поэтому (64a) и (64b) выполняются с некоторым $C = C(n, p, \alpha, A)$. Применим теорему 11 с $\theta = \max\{(1 + \sqrt{n})^{|\alpha|}, C\}$ и $\kappa = \kappa^*$, что даст зависящие только от n, p, α и A постоянные δ и ε , которые мы переобозначим через δ_1 и ε_1 .

При $\alpha \neq p - 1$ для постоянных C_i из следствия 4 положим

$$\delta = \min\{\delta_1, (C_1 C_3^{-1} \varepsilon_1)^{1/p}\}.$$

Тогда с учетом (90b) для любой области $\Omega \in \text{LZ}(A, \delta) \subset \text{LZ}(A, \delta_1)$ выполнены условия (i)–(iii) теоремы 11, что влечет утверждение (OP) теоремы 10.

При $\alpha = p - 1$ положим

$$\delta = \delta_1.$$

Пусть $\Omega \in \text{LZ}(A, \delta) \cap C^{1,\varepsilon}$ и выполнено условие (93b). Условия $\Omega \in \text{LZ}(A, \delta_1)$, (ii) и (iii) теоремы 11 очевидны. В неравенстве (95) сумму $\sum_{j=-\infty}^0 S_j^{1/(p-1)}$ можно сделать сколь угодно малой выбором куба $\mathfrak{I}$ с достаточно малым ребром. Поэтому можно считать, что $c \leq \varepsilon_1^{1/(p-1)}$, что по лемме 33(ii) доказывает условие (i) теоремы 11. Это обеспечивает утверждение (OP) теоремы 10. $\square$

Обсудим следствия 4 и 5. Для задачи (77) с весом $w = \varrho^\alpha$ в литературе наиболее часто встречаются значения $\alpha \in (-1, p - 1)$, см. [21, 50, 72] и приведённые после следствия 3 теоремы о весах $W \in A_p$ (напомним, что $\varrho^\alpha \in A_p$ тогда и только тогда, когда $-1 < \alpha < p - 1$). Вместе с тем в [52, теорема 6.1] используются значения $\alpha \in [0, 2p - 1)$, а в [1, теорема 14] — полный диапазон $\alpha \in (-1, 2p - 1)$. Обсудим теперь ограничения на Ω . Условие (93a) с $p = 2$ и $\alpha = 0$ встречается уже в [8] как достаточное условие нётеровости общей эллиптической краевой задачи. Случай $1 < p < \infty$, $\alpha = 0$ можно найти в [11], а случай $1 < p < \infty$, $-1 < \alpha < p - 1$ — в [72]. В частности, при $-1 < \alpha < p - 1$ следствие 4 вытекает из теоремы 15.2.1 с $\ell = 2 - \frac{\alpha+1}{p}$ и замечания на с. 560 в [72]. Что же касается значений $\alpha \in [p - 1, 2p - 1)$, то работа [52] имеет дело с областями класса C^∞ , а сравнение условия $\Omega \in \text{LZ}(A, \delta)$ с неявным условием на Ω из [1, теорема 14] требует отдельного исследования. Это значит, что случай $\alpha \in [p - 1, 2p - 1)$ в следствиях 4 и 5 не лишен научной новизны. Во избежание недоразумений отметим, что в [1, 8, 11, 21, 50, 52, 72] изучались более общие, чем (77), эллиптические краевые задачи.

5.5. Сопоставление главных теорем об однозначной разрешимости с одним результатом В.Г. Мазьи и Т.О. Шапошниковой. Для нецелого $\ell > 0$ и $1 < p < \infty$ рассмотрим пространство Слободецкого $W^{\ell,p}(\mathbb{R}^{n-1})$ — пополнение множества $C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ по норме

$$\|\varphi\|_{W^{\ell,p}(\mathbb{R}^{n-1})} = \|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})} + \left(\sum_{|\gamma|=[\ell]} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{|D^\gamma \varphi(\xi) - D^\gamma \varphi(\eta)|^p}{|\xi - \eta|^{n-1+\{\ell\}p}} d\xi d\eta \right)^{1/p},$$

где $\ell = [\ell] + \{\ell\}$, $[\ell] \in \mathbb{N}_0$ и $0 < \{\ell\} < 1$. Из теоремы 15.2.1 в [72] с $\ell = 2 - \frac{\alpha+1}{p}$ и описания пространства $\dot{W}^{1,q}(\Omega)$ как множества всех функций в $W^{1,q}(\Omega)$ с нулевым следом (см., например, [86, лемма 13.7]) вытекает следующее

Предложение 2. Пусть $-1 < \alpha < p-1$, $\Omega \in C^{0,1}$ и в любой точке $z \in \partial\Omega$ найдётся (A_z, δ_z) -карта (r_z, h_z) такая, что соответствующую функцию ω_z можно продолжить до такой функции ω_z на $\mathbb{R}^{n-1}$, что при $\alpha < p-n$

$$(96a) \quad \omega_z \in W^{2-\frac{\alpha+1}{p}, p}(\mathbb{R}^{n-1}),$$

а при $\alpha \geq p-n$ для достаточно малого $\delta = \delta(n, p, \alpha) > 0$ имеем

$$(96b) \quad \left\| \frac{\partial \omega_z}{\partial \xi_i} v \right\|_{W^{1-\frac{\alpha+1}{p}, p}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq \delta \|v\|_{W^{1-\frac{\alpha+1}{p}, p}(\mathbb{R}^{n-1})}$$

для любых $1 \leq i \leq n-1$ и $v \in W^{1-\frac{\alpha+1}{p}, p}(\mathbb{R}^{n-1})$. Тогда для веса $w = \varrho^\alpha$ и задачи (77) имеет место утверждение (ОР) теоремы 10.

Предложение 2 считается в литературе самым общим достаточным условием однозначной разрешимости задачи (77) в пространстве $W_{\varrho^\alpha}^{2,p}(\Omega)$ и, в частности, в пространстве $W^{2,p}(\Omega)$. Этот результат дополняется результатами по выпуклым областям и их обобщениям [46, 60] и теорией эллиптических краевых задач в областях с точечными [65] и другими типами особенностей. Отметим, что по теореме 7.6.2/3 в [11] существование ω_z со свойством (96a) следует из утверждения (ОР) при $\alpha = 0$ для областей Ляпунова-Дини. Значит, в этом случае при $p > n$ известен критерий (96a) выполнения утверждения (ОР).

Покажем, как вывести предложение 2 из результатов раздела 5.1. Пусть $\alpha < p-n$. Применим следствие 1. Известно (см. [21]), что $W^{\ell,p}(\mathbb{R}^{n-1})$ совпадает с пространством Бесова $B_{p,p}^\ell(\mathbb{R}^{n-1})$. Теоремы вложения [21] показывают, что

$$W^{2-\frac{\alpha+1}{p}, p}(\mathbb{R}^{n-1}) \subset C^{1,\sigma}(\mathbb{R}^{n-1})$$

для некоторого $0 < \sigma < 1$. Поэтому $\Omega \in \text{Lz} \cap \text{LLD}$. Условие $w \in \mathfrak{A}_p^{\text{comp}}(\Omega)$ следует из (91b). В силу компактности $\partial\Omega$ можно считать, что $A_z \leq A$, где $A < \infty$. Для любого $\delta > 0$ построим стандартным образом (κ^*, A, δ) -карту $(\mathfrak{I}, g, r, h)$ в точке z со свойством (94). Теорема 3.5.1(ii) из [87] и (96a) показывают, что

$$S \equiv \sum_{I \in \mathfrak{X}} l_I^{n+\alpha-p} [b_I^{(1)}]^p < \infty.$$

Поэтому $A_J \equiv \sum_{I: I \subset J} a_I l_I^{-p} [b_I^{(1)}]^p \leq b_J C_1^{-1} C_2 S l_J^{p-n-\alpha}$ для $b_J = a_J l_J^{-p}$. Лемма 33(ii) даёт $W_{\varrho^\alpha}^{2,p}$ -распрямляемость области Ω в точке z с параметрами (A, δ) , а следствие 1 — утверждение (ОР) теоремы 10.

При $\alpha \geq p-n$ воспользуемся теоремой 11. Сначала нужно определить ряд постоянных. По лемме 3.2.2 в [11]

$$(97) \quad \|\nabla \omega_z\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})} \leq c_1(n, p, \alpha) \delta,$$

если верно (96b). Для $\xi_0 \in \mathbb{R}^{n-1}$, $t > 1$ и $I \in \mathcal{D}$ положим

$$\mathbf{b}_I^{[t]} = l_I^{-1} \inf_{\gamma} \frac{1}{|tI|} \int_{tI} |\omega_z(\xi - \xi_0) - \gamma(\xi)| d\xi,$$

где $\inf$ берётся по всем многочленам не выше первой степени. В [18] отмечалось, что пространство $B_{p,p}^s(\mathbb{R}^{n-1})$ совпадает с пространством $YL(\ell_p^s(L_p))$ Хедберга-Нетрусова из [57]. По теореме 22 в [18] и её доказательству получаем, что если верно (96b), то

$$\sum_{I \in \mathcal{D}} l_I^{n+\alpha-p} [\mathbf{b}_I^{[2]}]^p |\gamma_I|^p \leq c_2(n, p, \alpha) \delta^p \sum_{I \in \mathcal{D}} l_I^{n+\alpha-p} |\gamma_I - \gamma_{I'}|^p$$

для любых чисел $\gamma_I \in \mathbb{R}$ таких, что $\gamma_I = 0$ при $l_I \geq 2$. Аналогично [17, с. 171] отсюда выводится, для того же класса семейств $\{\gamma_I\}$, оценка

$$\sum_{I \in \mathcal{D}} l_I^{n+\alpha-p} [b_I^{[3]}]^p |\gamma_I|^p \leq c_3(n, p, \alpha) \delta^p \sum_{I \in \mathcal{D}} l_I^{n+\alpha-p} |\gamma_I - \gamma_{I'}|^p.$$

Пусть $\kappa^* = \kappa(n, 1, 1)$ в терминах леммы 21. Для любых $(\kappa^*, 1, 1)$ -карты $(\mathfrak{I}, g, r, h)$ в точке z со свойствами $l_{\mathfrak{I}} \leq 1$ и $h \parallel h_z$ и чисел $\beta_I \in \mathbb{R}$ ($I \in \mathfrak{X} = \mathfrak{D}_{\mathfrak{I}}$) пусть

$$\gamma_I = \begin{cases} \beta_I, & I \in \mathfrak{X}, \\ 0, & I \in \mathcal{D} \setminus \mathfrak{X}. \end{cases}$$

Тогда в силу оценок (94) при $A = 1$ и второго равенства в (55)

$$\begin{aligned} (98) \quad \sum_{I \in \mathfrak{X}} a_I l_I^{-p} [b_I^{(1)}]^p |\beta_I|^p &\leq C_2(n, 1, \alpha) c_4(n, p) \sum_{I \in \mathfrak{X}} l_I^{n+\alpha-p} [b_I^{[3]}]^p |\gamma_I|^p \\ &\leq C_2 c_4 c_3 \delta^p \sum_{I \in \mathfrak{D}} l_I^{n+\alpha-p} |\gamma_I - \gamma_{I'}|^p \leq \underbrace{C_2 c_4 c_3 C_1^{-1}(n, 1, \alpha)}_{c_5(n, p, \alpha)} \delta^p \sum_{I \in \mathfrak{X}} a_I l_I^{-p} |\beta_I - \beta_{I'}|^p \end{aligned}$$

при подходящем выборе вектора ξ_0 . Пусть δ_1 и ε_1 такие же, как во втором абзаце доказательства следствия 5 при $A = 1$. Положим

$$\delta = \min\{c_1^{-1}, c_1^{-1} \delta_1, (c_5^{-1} \varepsilon_1)^{1/p}\}.$$

Пусть $\Omega \in C^{0,1}$ и для любого $z \in \partial\Omega$ верно (96b). Тогда

$$\Omega \in \text{LZ}(c_1 \delta, c_1 \delta) \subset \text{LZ}(1, \delta_1).$$

В силу (98) и леммы 21(ii) выполнено условие (i) теоремы 11. Об условиях (ii) и (iii) см. доказательство следствия 5. Поэтому верно утверждение (OP), что доказывает предложение 2.

В оставшейся части статьи изучим подробнее невесовой гильбертов случай (т.е. случай $w \equiv 1$, $p = 2$ и $n \geq 2$), доказав, что

- 1) при $n = 2$ существует область Ω , для которой верны предположения теоремы 11 и предложения 2, но $\Omega \notin \text{LLD}$ и, следовательно, теорема 10 неприменима;
- 2) при $n = 3$ существует область Ω , к которой применима теорема 10, но “условия малости” теоремы 11 и предложения 2 нарушаются;
- 3) при $n = 3$ существует область Ω , к которой применима теорема 11, в отличие от предложения 2.

Эти утверждения означают, что при $w \equiv \varrho^\alpha$ и $\alpha \geq p - n$ между теоремой 10, теоремой 11 и предложением 2 нет прямых логических связей за исключением доказанной выше импликации “теорема 11 $\Rightarrow$ предложение 2”.

Утверждение 1) получается рассмотрением области Ω примера (0.2) с малым $C \neq 0$. Применимость теоремы 11 следует из последнего абзаца раздела 5.3 и доказательств леммы 34 и следствия 5. О применимости предложения 2 см. раздел 7.6.1 в [11]. Соотношение $\Omega \notin \text{LLD}$ вытекает из леммы 24 и прямого вычисления с участием функции ω_C .

Для установления утверждений 2) и 3) воспользуемся атомическим способом задания функций. Изучим сперва общую конструкцию. Пусть $t > 0$, $T \geq 0$ и для каждого куба $K \in \mathfrak{X} \equiv \mathfrak{D}_{\mathfrak{I}}$ дана функция $\varphi_K \in C^2(\mathbb{R}^{n-1})$ такая, что

$$(99) \quad \text{supp } \varphi_K \subset \overline{tK}, \quad \|\nabla^2 \varphi_K\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})} \leq T l_K^{-1},$$

откуда, в частности,

$$(100) \quad \|\varphi_K\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})} \leq T_0(n, t) T l_K.$$

Для чисел $\gamma_K \in \mathbb{R}$, из которых только конечное число ненулевых, положим

$$(101) \quad f = \sum_{K \in \mathfrak{X}} \gamma_K \varphi_K.$$

Рассуждая аналогично шагу 7 доказательства теоремы 1.1.14 в [57], получаем

$$(102) \quad b_J^{(1)} \leq T_1(n, t) T \sum_{K \in \mathfrak{X}} \Gamma_{JK}^{(1, n)} |\gamma_K|, \quad J \in \mathfrak{X},$$

где величины $b_J^{(1)}$, как обычно, соответствуют функции f . По лемме 11

$$(103) \quad \|f\|_{\text{LLD}(\overline{3\mathfrak{J}})} \leq T_2(n, t) T \sup_{I \in \mathfrak{X}} \sum_{K \in \mathfrak{X}} \left[1 + \log_2 \frac{[I, K]}{l_K} \right] \Gamma_{IK}^{(0, n)} |\gamma_K|.$$

Если теперь от γ_K требуется только конечность супремума справа в (103), то конечны и выражения справа в (102), поэтому ряд (101) сходится абсолютно в $L^1(\overline{3\mathfrak{J}})$ и для его суммы верны выкладки (102) и (103).

Пусть кубы $J_0, J_{-1}, J_{-2}, \dots$ из $\mathcal{D}$ и числа

$$\gamma_K \in \mathbb{R}, \quad K \in X \equiv \bigcup_{i=-\infty}^0 X_i,$$

где

$$X_i = \{I \in \mathcal{D} : I \subset J_i\},$$

таковы, что выполнены условия

$$J_i \subset \frac{1}{2} K_i \quad \text{для кубов } K_i \equiv \{c\mathfrak{J} + 2^i \xi : \xi \in [l\mathfrak{J}/4, l\mathfrak{J}/2)^{n-1}\} \in \mathcal{D},$$

$$M_\gamma \equiv \sup_{K \in X} |\gamma_K| < \infty.$$

Положим $\gamma_K = 0$ при $K \in \mathfrak{X} \setminus X$. Ввиду оценки (100) ряд (101) абсолютно и равномерно сходится к непрерывной функции f .

Теорема 13. Пусть $1 < p < \infty$ и $\max\{p - n, -1\} < \alpha < 2p - 1$. Обозначим

$$V_I(E) = \sum_{K \in E} \left[1 + \log_2 \frac{[I, K]}{l_K} \right] \Gamma_{IK}^{(0, n)} |\gamma_K|, \quad I \in \mathfrak{X} \text{ \& } E \subset \mathfrak{X}.$$

Допустим, что для некоторых чисел $M_1, M_2, M_3 > 0$ выполнены условия

$$(104) \quad V_I(X_i) \leq M_1, \quad i \leq 0 \text{ \& } I \subset K_i,$$

$$(105) \quad \begin{cases} (\forall i \leq 0) \quad (\forall \beta_I \in \mathbb{R}) \\ \sum_{I \in X_i} l_I^{n+\alpha-p} |\gamma_I|^p |\beta_I - \beta_{J'_i}|^p \leq M_2 \sum_{I \in X_i} l_I^{n+\alpha-p} |\beta_I - \beta_{I'}|^p, \end{cases}$$

$$(106) \quad \sum_{i=-\infty}^0 \left(\frac{l_{J_i}}{l_{K_i}} \right)^n \log_2 \frac{l_{K_i}}{l_{J_i}} \leq M_3.$$

Тогда для $M = M_1 + M_2^{1/p} M_3$ имеем соотношения

$$(107) \quad f \in \text{LZ}(C_1 TM, C_2 TM_\gamma)(\overline{3\mathfrak{J}}),$$

$$(108) \quad \|f\|_{\text{LLD}(\overline{3\mathfrak{J}})} \leq C_3 TM,$$

$$(109) \quad (\forall \beta_I \in \mathbb{R}) \quad \sum_{I \in \mathfrak{X}} l_I^{n+\alpha-p} [b_I^{(1)}]^p |\beta_I|^p \leq C_4 T^p M_2 \sum_{I \in \mathfrak{X}} l_I^{n+\alpha-p} |\beta_I - \beta_{I'}|^p,$$

где $C_k = C_k(n, p, \alpha, t)$ для $k \in \{1, 3, 4\}$ и $C_2 = C_2(n, t)$.

Замечание. Для $J \in \mathfrak{X}$ обозначим

$$A_J = \sum_{I \in \mathfrak{X}: I \subset J} l_I^{n+\alpha-p} |\gamma_I|^p.$$

Небольшое изменение леммы 33(ii) даёт, что (105) справедливо при $M_2 = c^{p-1}$, если $\sum_{J \in \mathfrak{X}: I \subset J \subset J_i} [A_J l_J^{-n-\alpha+p}]^{1/(p-1)} \leq c$ для любых $i \leq 0$ и $I \in X_i$.

Доказательство. Подставляя в (105) числа (75) для $H = J_i$, получаем

$$(110) \quad A_{J_i} \leq M_2 l_{J_i}^{n+\alpha-p}, \quad i \leq 0.$$

Для любого $I \in \mathfrak{X}$ имеем

$$V_I(\mathfrak{X}) = V_I(X) = \left[\sum_{i \leq 0: I \not\subset K_i} V_I(X_i) \right] + \begin{cases} V_I(X_{i_0}), & (\exists i_0 \leq 0) \quad I \subset K_{i_0}, \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$V_I(\mathfrak{X}) \leq M_1 + \sum_{i \leq 0: I \not\subset K_i} V_I(X_i).$$

Пусть $I \not\subset K_i$. Из вложения $J_i \subset \frac{1}{2}K_i$ следует, что $[I, K] \geq l_{K_i}/4$ при $K \in X_i$. Отсюда с использованием неравенства Гёльдера, условия $\alpha < 2p - 1$ и оценки (110) получаем

$$\begin{aligned} V_I(X_i) &\leq C_5(n) \sum_{K \in X_i} \left(\frac{l_K}{l_{K_i}} \right)^{\frac{n+\alpha-p}{p}} |\gamma_K| \cdot \left(\frac{l_K}{l_{K_i}} \right)^{n-\frac{n+\alpha-p}{p}} \log_2 \frac{l_{K_i}}{l_K} \\ &\leq C_5 \left(\sum_{K \in X_i} \left(\frac{l_K}{l_{K_i}} \right)^{n+\alpha-p} |\gamma_K|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{K \in X_i} \left(\frac{l_K}{l_{K_i}} \right)^{n+\frac{p-\alpha}{p-1}} \left(\log_2 \frac{l_{K_i}}{l_K} \right)^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\leq C_6(n, p, \alpha) \left(\frac{A_{J_i}}{l_{K_i}^{n+\alpha-p}} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{l_{J_i}}{l_{K_i}} \right)^{n-\frac{n+\alpha-p}{p}} \log_2 \frac{l_{K_i}}{l_{J_i}} \leq C_6 M_2^{1/p} \left(\frac{l_{J_i}}{l_{K_i}} \right)^n \log_2 \frac{l_{K_i}}{l_{J_i}}, \\ V_I(\mathfrak{X}) &\leq M_1 + C_6 M_2^{1/p} M_3 \leq C_6 M \quad (\text{так как } C_6 > 1). \end{aligned}$$

Ввиду оценки $|\nabla \varphi_K| \leq T'_0(n, t)T$ отсюда легко выводится, что

$$f \in \text{LZ}(C_1 TM, C_1 TM)(\overline{3\mathfrak{F}}), \quad C_1 = C_1(n, p, \alpha, t).$$

Из оценки (102) и теоремы 2(a) следует, что

$$b_J^{(1)} \leq C_7(n, t)TM_\gamma, \quad J \in \mathfrak{X}.$$

С учетом предложения 1 мы получаем включение (107). Оценки $V_I(\mathfrak{X}) \leq C_6 M$ и (103) дают неравенство (108).

Докажем ДВН (109). В силу (105) и (110) для любых $\beta_I \in \mathbb{R}$

$$\sum_{I \in \mathfrak{X}} l_I^{n+\alpha-p} |\gamma_I|^p |\beta_I|^p \leq 2^{p-1} \sum_{i=-\infty}^0 \sum_{I \in X_i} \left[l_I^{n+\alpha-p} |\gamma_I|^p |\beta_I - \beta_{J'_i}|^p + l_I^{n+\alpha-p} |\gamma_I|^p |\beta_{J'_i}|^p \right]$$

$$\leq 2^{p-1} M_2 \left[\sum_{I \in X} l_I^{n+\alpha-p} |\beta_I - \beta_{I'}|^p + \sum_{i=-\infty}^0 l_{J_i}^{n+\alpha-p} |\beta_{J_i}|^p \right].$$

Обозначим $H_i = K'_i = \{\mathfrak{c}_J + 2^i \xi : \xi \in [0, l_J/2)^{n-1}\}$ при $i \leq 0$ и $H_1 = H'_0 = \mathfrak{J}$. Возьмём такое $\sigma = \sigma(n + \alpha - p)$, что $0 < \sigma < n + \alpha - p$. Тогда

$$\begin{aligned} |\beta_{J'_i}| &\leq \sum_{I \in \mathfrak{X}: J'_i \subset I \subset K_i} |\beta_I - \beta_{I'}| + \sum_{I \in \mathfrak{X}: H_i \subset I \subset H_1} |\beta_I - \beta_{I'}|, \\ |\beta_{J'_i}|^p &\leq C_8 \left[\sum_{J'_i \subset I \subset K_i} \left(\frac{l_I}{l_{J_i}} \right)^{n+\alpha-p} |\beta_I - \beta_{I'}|^p + \sum_{H_i \subset I \subset H_1} \left(\frac{l_I}{l_{H_i}} \right)^\sigma |\beta_I - \beta_{I'}|^p \right], \\ \sum_{i=-\infty}^0 l_{J_i}^{n+\alpha-p} |\beta_{J_i}|^p &\leq C_8 S + C_8 \sum_{I \in \{H_1, H_0, \dots\}} l_I^\sigma |\beta_I - \beta_{I'}|^p \sum_{i: H_i \subset I} l_{H_i}^{n+\alpha-p-\sigma} \leq C_9 S \end{aligned}$$

для $C_8 = C_8(n, p, \alpha)$, $C_9 = C_9(n, p, \alpha)$ и $S = \sum_{I \in \mathfrak{X}} l_I^{n+\alpha-p} |\beta_I - \beta_{I'}|^p$. Поэтому

$$\sum_{I \in \mathfrak{X}} l_I^{n+\alpha-p} |\gamma_I|^p |\beta_I|^p \leq 2^{p-1} (1 + C_9) M_2 \sum_{I \in \mathfrak{X}} l_I^{n+\alpha-p} |\beta_I - \beta_{I'}|^p.$$

Ввиду (102) и леммы 31 с $a_I = l_I^{n+\alpha}$ и $c_I = |\gamma_I|$ отсюда следует (109). $\square$

В качестве простейшего приложения теоремы 13 построим функцию

$$f \in \text{LLD}(\overline{3\mathfrak{J}}) \setminus C^1(\overline{3\mathfrak{J}}).$$

Возьмём $J_i \subset \frac{1}{2}K_i$ со свойством (106). Пусть $\gamma_K = \gamma_0 \neq 0$ при $K \in \{J_i : i \leq 0\}$ и $\gamma_K = 0$ в противном случае, так что супремум $M_\gamma = |\gamma_0|$ конечен. Пусть $t = 1$, а число $T > 0$ таково, что существуют функции φ_{J_i} со свойствами (99) и $\|\nabla \varphi_{J_i}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})} = 1$. Очевидно, что функция

$$f = \sum_{K \in X} \gamma_K \varphi_K = \gamma_0 \sum_{i=-\infty}^0 \varphi_{J_i}$$

не принадлежит классу $C^1(\overline{3\mathfrak{J}})$. В теореме 13 возьмём, например, $p = 2$ и $\alpha = 1$. Неравенства (104) и (105) выполняются с $M_1 = |\gamma_0|$ и $M_2 = |\gamma_0|^2$, поскольку суммы из левых частей состоят из одного слагаемого. Ввиду (108) получаем, что $f \in \text{LLD}(\overline{3\mathfrak{J}})$.

Докажем утверждение 2). При этом нарушение в теореме 11 условия $C_z \leq \varepsilon$ проверим не для всех допустимых значений λ , κ , A и θ , а только для одного набора, для которого выполняются остальные условия теоремы. Пусть $n = 3$, $p = 2$, $\lambda = 1/4$, $\kappa = \kappa(3, 1, 1)$ (в терминах леммы 21) и $A = 1$. В силу вывода утверждения (91b) имеем $w \equiv 1 \in \mathfrak{A}_2^{\text{comp}}(\Omega)_{1/4}$, причем оценки (64a) и (64b) верны с некоторой абсолютной постоянной $C > 0$ для любой области $\Omega \in C_1^{0,1}$. В терминах теорем 10 и 11 и предложения 2 соответственно положим

$$\begin{aligned} \delta_0 &= \delta(3, 2, 1/4, 1, 1), \\ \delta_1 &= \delta(3, 2, 1/4, 1, \max\{1, C\}), \quad \varepsilon_1 = \varepsilon(3, 2, 1/4, \kappa, 1, \max\{1, C\}), \\ \delta &= \delta(3, 2, 0). \end{aligned}$$

Применим теорему 13 с $\alpha = 0$. Для некоторого $\mathfrak{J} \in \mathcal{D}$ возьмём кубы $J_i \subset \frac{1}{2}K_i$ такие, что выполнено условие (106). Для $\gamma_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $N \in \mathbb{N}_0$ положим

$$\gamma_K = \begin{cases} \gamma_0, & K \subset J_i \text{ и } l_K = 2^{-N}l_{J_i} \text{ для некоторого } i \leq 0, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть функции φ_K удовлетворяют условиям (99) с $t = 1/2$ и $T = 1$. Тогда ввиду конечности $M_\gamma = |\gamma_0|$ определена непрерывная функция (101). Оценим $V_I(X_i)$ при $I \subset K_i$. Ввиду убывания при $r \geq 1$ функции $r \mapsto \frac{1+\log_2 r}{r^3}$ имеем $V_I(X_i) \leq V_{I_1}(X_i)$ при $I_1 \subset I$, поэтому без умаления общности можно считать, что $l_I \leq b = 2^{-N}l_{J_i}$. По лемме 10(i) получаем

$$V_I(X_i) \leq c_1 \sum_{\substack{K \subset J_i: \\ l_K = b}} \Gamma_{IK}^{(0,8/3)} |\gamma_0| = c_1 b^{1/3} |\gamma_0| \sum_{\substack{K \subset J_i: \\ l_K = b}} \frac{l_K^{7/3}}{[I, K]^{8/3}} \leq c'_1 |\gamma_0| \equiv M_1,$$

что суть (104). Оценка (105) выполняется с $M_2 = 2^{N+1}|\gamma_0|^2$, поскольку

$$\begin{aligned} \sum_{I \in X_i} l_I |\gamma_I|^2 |\beta_I - \beta_{J'_i}|^2 &= b |\gamma_0|^2 \sum_{I \subset J_i: l_I = b} |\beta_I - \beta_{J'_i}|^2 \\ &\leq b |\gamma_0|^2 \sum_{I \subset J_i: l_I = b} \left\{ \sum_{J: I \subset J \subset J_i} \frac{2l_{J_i}}{l_J} |\beta_J - \beta_{J'}|^2 \right\} \\ &= 2^{N+1} |\gamma_0|^2 \sum_{J \subset J_i: l_J \geq b} l_J |\beta_J - \beta_{J'}|^2. \end{aligned}$$

Пусть область Ω такова, что граница $\partial\Omega$ задаётся в точке $z \in \partial\Omega$ функцией f и принадлежит классу $C^{1,1}$ в остальных точках. Тогда

$$\Omega \in \text{LZ}(1, \delta_0) \cap \text{LZ}(1, \delta_1) \cap \text{LLD}$$

в силу (107) и (108), если выполнены условия

$$(111) \quad C_1(3, 2, 0, 1/2) \{c'_1 + 2^{(N+1)/2} M_3\} |\gamma_0| \leq 1, \quad C_2(3, 1/2) |\gamma_0| \leq \min\{\delta_0, \delta_1\}.$$

В этом случае выполнены все условия теорем 10 и 11 и предложения 2 кроме условий $C_z \leq \varepsilon_1$ и (96b). Заметим, что условие (i) теоремы 10 и часть условия (i) теоремы 11 следуют из леммы 21(ii), оценок (94) и (109) и леммы 34.

Оценим константу C_z из (71) снизу. Функции φ_K можно выбрать так, что

$$\int_K |\varphi_K - \gamma| d\xi \geq c_2 l_K^3$$

для любого многочлена γ степени не выше первой, см. [18, (27)]. Следовательно, $b_I^{(1)} \geq c_3 |\gamma_I|$. Возьмём в точке z любую $(\kappa, 1, 1)$ -карту $(\mathfrak{J}, g, r, h)$, для которой f является функцией (52с). Для чисел (75) с $H = J_i$ имеем

$$\begin{aligned} \kappa^3 \sum_{I \in \mathfrak{X}} a_I l_I^{-2} [b_I^{(1)}]^2 |\beta_I|^2 &\geq c_3^2 \sum_{I \in X_i} l_I |\gamma_I|^2 = c_3^2 |\gamma_0|^2 \sum_{I \subset J_i: l_I = b} l_I = c_3^2 |\gamma_0|^2 2^N l_{J_i}, \\ \sum_{I \in \mathfrak{X}} a_I l_I^{-2} |\beta_I - \beta_{J'_i}|^2 &= a_{J_i} l_{J_i}^{-2} \leq \kappa^3 l_{J_i}, \end{aligned}$$

поэтому $C_z \geq \kappa^{-6} c_3^2 2^N |\gamma_0|^2$. Переход к любой другой $(\kappa, 1, 1)$ -карте в точке z может ухудшить эту оценку лишь в конечное число раз, откуда

$$C_z \geq c_4 2^N |\gamma_0|^2$$

с абсолютной постоянной $c_4 > 0$. Кроме того, из (98) известно, что если верно (96b), то в (71) можно взять $C_z = c_5 \delta^p$. Поэтому если

$$(111') \quad 2^N |\gamma_0|^2 > \max\{c_4^{-1} \varepsilon_1, c_4^{-1} c_5 \delta^p\},$$

то условия $C_z \leq \varepsilon_1$ и (96b) нарушаются. Если J_i таковы, что M_3 достаточно мало, то существуют γ_0 и N со свойствами (111) и (111'), чем 2) и доказано.

Докажем утверждение 3). Если для $n = 3, p = 2$ и $\alpha = 0$ область Ω удовлетворяет условиям предложения 2, то $\Omega \in C_A^{0,1}$ с некоторой абсолютной постоянной $A > 0$, см. (97). Существует такое $T > 0$, что для $t = 2$ и любых $\xi \in K \in \mathfrak{X}$ и единичного вектора $\eta \in \mathbb{R}^2$ существует функция φ_K со свойствами (99) и $\nabla \varphi_K(\xi) = \eta$. Для постоянных

$$C_1 = C_1(3, 2, 0, 2), \quad C_2 = C_2(3, 2), \quad C_4 = C_4(3, 2, 0, 2)$$

из теоремы 13 положим $A_1 = 2C_1 T A$. Как и выше, $w \equiv 1 \in \mathfrak{A}_2^{\text{comp}}(\Omega)_{1/4}$ и оценки (64a) и (64b) выполняются с абсолютной постоянной $C > 0$ для любой области $\Omega \in C_{A_1}^{0,1}$. В терминах теоремы 11 положим

$$\delta_1 = \delta(3, 2, 1/4, A_1, \max\{1, C\}), \quad \varepsilon_1 = \varepsilon(3, 2, 1/4, \kappa, A_1, \max\{1, C\}),$$

где $\kappa = \kappa(3, A_1, 1)$ в терминах леммы 21. Возьмём такие кубы $\mathfrak{J}$ и $J_i \subset \frac{1}{2}K_i$, что выполнено (106). Для $\gamma_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $N \in \mathbb{N}$ положим

$$\gamma_K = \begin{cases} \gamma_0, & K \in Y_i \text{ для некоторого } i \leq 0, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где

$$Y_i = \{I \in X_i: \mathbf{c}_{J_i} \in I \text{ и } 2^{-N} l_{J_i} \leq l_I \leq 2^{-1} l_{J_i}\}.$$

Тогда $M_\gamma = |\gamma_0| < \infty$. Условие (104) выполняется, очевидно, с $M_1 = N|\gamma_0|$, а условие (105) — с $M_2 = (2 + \sqrt{2})^2 |\gamma_0|^2$, поскольку

$$\begin{aligned} \sum_{I \in X_i} l_I |\gamma_I|^2 |\beta_I - \beta_{J_i}|^2 &= |\gamma_0|^2 \sum_{I \in Y_i} l_I |\beta_I - \beta_{J_i}|^2 \\ &\leq (2 + \sqrt{2}) |\gamma_0|^2 \sum_{I \in Y_i} l_I \left\{ \sum_{J: I \subset J \subset J_i} \left(\frac{l_J}{l_I} \right)^{1/2} |\beta_J - \beta_{J'}|^2 \right\} \\ &\leq (2 + \sqrt{2})^2 |\gamma_0|^2 \sum_{J \in Y_i \cup \{J_i\}} l_J |\beta_J - \beta_{J'}|^2. \end{aligned}$$

Теорема 13 применима. Пусть, как выше, Ω принадлежит классу $C^{1,1}$ во всех точках границы кроме z , где она задаётся функцией f . Тогда если

$$(112) \quad \{N + (2 + \sqrt{2})M_3\} |\gamma_0| \leq 2A, \quad C_2 T |\gamma_0| \leq \delta_1, \quad \kappa^6 C_4 T^2 (2 + \sqrt{2})^2 |\gamma_0|^2 \leq \varepsilon_1,$$

то в силу соотношений (107) и (109) и леммы 21(ii) получаем $\Omega \in \text{LZ}(A_1, \delta_1)$ и выполнение условия (i) теоремы 11. Условия же (ii) и (iii) следуют из того, что $w \equiv 1$ и $\Omega \in C_{A_1}^{0,1}$. Итак, к Ω применима теорема 11. Вместе с тем для единичных векторов $\eta_i \in \mathbb{R}^2$ можно так выбрать φ_K , что $\nabla f(\mathbf{c}_{J_i}) = N\gamma_0 \eta_i$. Считая η_i плотными в единичной окружности и предполагая, что

$$(112') \quad N|\gamma_0| > A$$

(условия (112) и (112') совместны для любого $M_3 > 0$), убеждаемся в отсутствии (A, A) -карты в точке z , так что $\Omega \notin C_A^{0,1}$. Значит, условия предложения 2 для области Ω нарушаются. Утверждение 3) доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Д.Е. Апушкинская, А.И. Назаров, *Эллиптическая задача Дирихле в весовых пространствах*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **288** (2002), 14–33. MR1923543
- [2] О.В. Бесов, В.П. Ильин, С.М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения*, Наука, Москва, 1975. MR0430771
- [3] Ю.А. Брудный, *Многомерный аналог одной теоремы Уитни*, Мат. сборник, **124** (1970), 175–191. Zbl 0216.41102
- [4] Д. Гилбарг, М. Трудингер, *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка*, Наука, Москва, 1989. MR1063848
- [5] Е.М. Дынькин, Б.П. Осиленкер, *Весовые оценки сингулярных интегралов и их приложения*, Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ, **21** (1983), 42–129. MR0736522
- [6] Л.И. Камынин, *Теорема о косой производной для параболических уравнений второго порядка, допускающих слабое вырождение. I*, Дифф. уравн., **24** (1988), 650–661. MR0940749
- [7] Л.И. Камынин, Б.Н. Химченко, *О граничных оценках Литшица для решения эллипско-параболического уравнения 2-го порядка*, ДАН СССР, **212** (1973), 544–547. MR0427828
- [8] В.А. Кондратьев, С.Д. Эйдельман, *Об условиях на граничную поверхность в теории эллиптических граничных задач*, ДАН СССР, **246** (1979), 812–815. MR0543538
- [9] В.Г. Мазья, *О коэрцитивности задачи Дирихле в области с нерегулярной границей*, Изв. вузов. Математика (1973), 64–76. Zbl 0264.35035
- [10] В.Г. Мазья, *Пространства С.Л. Соболева*, Изд-во ЛГУ, Ленинград, 1985. MR0817985
- [11] В.Г. Мазья, Т.О. Шапошникова, *Мультипликаторы в пространствах дифференцируемых функций*, Изд-во ЛГУ, Ленинград, 1986. MR0881055
- [12] Е.И. Моисеев, *Теория потенциала для областей Ляпунова-Дини*, ДАН СССР, **192** (1970), 990–992. MR0267116
- [13] П.В. Парамонов, *О C^1 -продолжении и C^1 -отражении субгармонических функций с областей Ляпунова-Дини на $\mathbb{R}^N$* , Мат. сб., **199** (2008), 79–116. MR2489689
- [14] П.В. Парамонов, *О C^m -продолжении субгармонических функций с областей Ляпунова-Дини на $\mathbb{R}^N$* , Мат. заметки, **89** (2011), 149–152. MR2841506
- [15] А.И. Парфенов, *Дискретная норма на липшицевой поверхности и соболевская распрямляемость границы*, Мат. труды, **10** (2007), 163–186. MR2382421
- [16] А.И. Парфенов, *Критерии распрямляемости липшицевой поверхности по Лизоркину-Трибелю. I*, Мат. труды, **12** (2009), 144–204. MR2569651
- [17] А.И. Парфенов, *Критерии распрямляемости липшицевой поверхности по Лизоркину-Трибелю. III*, Мат. труды, **13** (2010), 139–178. MR2789959
- [18] А.И. Парфенов, *Характеризация мультипликаторов в пространствах Хедберга-Нетрусова*, Мат. труды, **14** (2011), 158–194.
- [19] А.И. Парфенов, *Задача Дирихле в плоских областях с весами макенхауптовского типа*, ИМ СО РАН, препринт № 274, Новосибирск, 2011.
- [20] И. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, Мир, Москва, 1973. MR0348563
- [21] Х. Трибель, *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы*, Мир, Москва, 1980. MR2284819
- [22] Л. Хёрмандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. I*, Мир, Москва, 1986. MR0862624
- [23] Л.К. Эванс, Р.Ф. Гариепи, *Теория меры и тонкие свойства функций*, Научная книга (ИДМИ), Новосибирск, 2002.
- [24] V. Adolphsson, L. Escauriaza, *$C^{1,\alpha}$ domains and unique continuation at the boundary*, Comm. Pure Appl. Math., **50** (1997), 935–969. MR1466583
- [25] M.P. Aldred, D.H. Armitage, *Inequalities for surface integrals of non-negative subharmonic functions*, Comment. Math. Univ. Carolin., **39** (1998), 101–113. MR1622990
- [26] R. Alvarado, D. Brigham, V. Maz'ya, M. Mitrea, E. Ziadé, *On the regularity of domains satisfying a uniform hour-glass condition and a sharp version of the Hopf-Oleinik boundary point principle*, J. Math. Sci., **176** (2011), 281–360.
- [27] T. Arnarson, J. Eriksson, *On the size of the non-coincidence set of parabolic obstacle problems with applications to American option pricing*, Math. Scand., **101** (2007), 148–160. MR2353246

- [28] M. Borsuk, V. Kondratiev, *Elliptic Boundary Value Problems of Second Order in Piecewise Smooth Domains*, Elsevier, Amsterdam, 2006. MR2286361
- [29] K. Burdzy, *Brownian excursions and minimal thinness. Part III: Applications to the angular derivative problem*, Math. Z., **192** (1986), 89–107. MR0835394
- [30] S. Byun, L. Wang, *Elliptic equations with BMO coefficients in Reifenberg domains*, Comm. Pure Appl. Math., **57** (2004), 1283–1310. MR2069724
- [31] T.F. Carroll, *A classical proof of Burdzy's theorem on the angular derivative*, J. London Math. Soc., **38** (1988), 423–441. MR0972128
- [32] T. Carroll, *Boundary behaviour of positive harmonic functions on Lipschitz domains*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., **27** (2002), 231–236. MR1884363
- [33] S.-K. Chua, *Extension theorems on weighted Sobolev spaces*, Indiana Univ. Math. J., **41** (1992), 1027–1076. MR1206339
- [34] S.-K. Chua, *On weighted Sobolev spaces*, Canad. J. Math., **48** (1996), 527–541. MR1402326
- [35] S.-K. Chua, *Sobolev interpolation inequalities on generalized John domains*, Pacific J. Math., **242** (2009), 215–258. MR2546711
- [36] R.R. Coifman, C. Fefferman, *Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals*, Studia Math., **51** (1974), 241–250. MR0358205
- [37] B. Dahlberg, *A minimum principle for positive harmonic functions*, Proc. London Math. Soc. (3), **33** (1976), 238–250. MR0409847
- [38] L. Diening, M. Růžička, K. Schumacher, *A decomposition technique for John domains*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., **35** (2010), 87–114. MR2643399
- [39] N.F. Dudley-Ward, *On a decomposition theorem for continuous functions of Hayman and Lyons*, N.J.Z. Math., **22** (1993), 49–59. MR1244008
- [40] R.G. Durán, M. Sanmartino, M. Toschi, *Weighted a priori estimates for the Poisson equation*, Indiana Univ. Math. J., **57** (2008), 3463–3478. MR2492240
- [41] R.G. Durán, M. Sanmartino, M. Toschi, *Weighted a priori estimates for solution of $(-\Delta)^m u = f$ with homogeneous Dirichlet conditions*, Anal. Theory Appl., **26** (2010), 339–349. MR2770472
- [42] E.B. Fabes, C.E. Kenig, R.P. Serapioni, *The local regularity of solutions of degenerate elliptic equations*, Comm. Part. Diff. Eq., **7** (1982), 77–116. MR0643158
- [43] R. Farwig, R. Myong-Hwan, *Resolvent estimates and maximal regularity in weighted L^q -spaces of the Stokes operator in an infinite cylinder*, J. Math. Fluid Mech., **10** (2008), 352–387. MR2430805
- [44] R. Farwig, H. Sohr, *Weighted L^q -theory for the Stokes resolvent in exterior domains*, J. Math. Soc. Japan, **49** (1997), 251–288. MR1601373
- [45] L. Frerick, J. Müller, *Polynomial approximation on compact sets bounded by Dini-smooth arcs*, Comput. Methods Funct. Theory, **3** (2003), 273–284. MR2082017
- [46] S.J. Fromm, *Potential space estimates for Green potentials in convex domains*, Proc. Amer. Math. Soc., **119** (1993), 225–233. MR1156467
- [47] S.J. Gardiner, *Boundary behaviour of holomorphic and harmonic functions*, Irish Math. Soc. Bull., **29** (1992), 19–30. MR1224588
- [48] S.J. Gardiner, *Superharmonic extension from the boundary of a domain*, Bull. London Math. Soc., **27** (1995), 347–352. MR1335285
- [49] S.J. Gardiner, A. Gustafsson, *Smooth potentials with prescribed boundary behaviour*, Publ. Mat. Barc., **48** (2004), 241–249. MR2044646
- [50] G. Geymonat, P. Grisvard, *Problemi ai limiti lineari ellittici negli spazi di Sobolev con peso*, Le Matematiche, **22** (1967), 212–249. MR0231046
- [51] M. Götz, *A discrepancy theorem in $\mathbb{R}^d$, $d \geq 3$* , Analysis (Munich), **20** (2000), 303–323. MR1809510
- [52] C. Goudjo, *Problèmes aux limites dans les espaces de Sobolev avec poids*, Bollettino U.M.I. (4), **8** (1973), 468–493. MR0338552
- [53] A. Grigor'yan, L. Saloff-Coste, *Stability results for Harnack inequalities*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **55** (2005), 825–890. MR2149405
- [54] P. Gurka, B. Opic, *Continuous and compact imbeddings of weighted Sobolev spaces. I*, Czechoslovak Math. J., **38** (1988), 730–744. MR0962916
- [55] W. Hansen, I. Netuka, *Volume densities with the mean value property for harmonic functions*, Proc. Amer. Math. Soc., **123** (1995), 135–140. MR1213859

- [56] D.D. Haroske, I. Piotrowska, *Atomic decompositions of function spaces with Muckenhoupt weights, and some relation to fractal analysis*, Math. Nachr., **281** (2008), 1476–1494. MR2454945
- [57] L.I. Hedberg, Yu. Netrusov, *An Axiomatic Approach to Function Spaces, Spectral Synthesis, and Luzin Approximation*, Mem. Amer. Math. Soc., **188** (2007). MR2326315
- [58] K. Hirata, *Boundary behaviour of quotients of Martin kernels*, Proc. Edinb. Math. Soc. (2), **50** (2007), 377–388. MR2334953
- [59] S. Hofmann, M. Mitrea, M. Taylor, *Singular integrals and elliptic boundary problems on regular Semmes-Kenig-Toro domains*, Int. Math. Res. Not., **2010** (2010), 2567–2865. MR2669659
- [60] T. Jakab, I. Mitrea, M. Mitrea, *Sobolev estimates for the Green potential associated with the Robin-Laplacian in Lipschitz domains satisfying a uniform exterior ball condition*, “Sobolev Spaces in Mathematics. II”, Springer, New York; Tamara Rozhkovskaya Publisher, Novosibirsk / Int. Math. Ser. (N. Y.), **9** (2009), 227–260. MR2484628
- [61] D.S. Jerison, C.E. Kenig, *Boundary behavior of harmonic functions in non-tangentially accessible domains*, Adv. Math., **46** (1982), 80–147. MR0676988
- [62] A. Jonsson, P. Sjögren, H. Wallin, *Hardy and Lipschitz spaces on subsets of $\mathbf{R}^n$* , Studia Math., **80** (1984), 141–166. MR0781332
- [63] V. Kozlov, *Asymptotic representation of solutions to the Dirichlet problem for elliptic systems with discontinuous coefficients near the boundary*, Electron. J. Diff. Equ., **2006** (2006), 1–46. MR2198923
- [64] V. Kozlov, V. Maz’ya, *Asymptotic formula for solutions to elliptic equations near the Lipschitz boundary*, Ann. Mat. Pura Appl. (4), **184** (2005), 185–213. MR2149092
- [65] V.A. Kozlov, V.G. Maz’ya, J. Rossman, *Elliptic Boundary Value Problems in Domains with Point Singularities*, Amer. Math. Soc., Providence / Math. Surv. Monographs, **52** (1997). MR1469972
- [66] I. Kukavica, K. Nyström, *Unique continuation on the boundary for Dini domains*, Proc. Amer. Math. Soc., **126** (1998), 441–446. MR1415331
- [67] D.S. Kurtz, R.L. Wheeden, *Results on weighted norm inequalities for multipliers*, Trans. Amer. Math. Soc., **255** (1979), 343–362. MR0542885
- [68] P.-G. Lemarié-Rieusset, *Ondelettes et poids de Muckenhoupt*, Studia Math., **108** (1994), 127–147. MR1259500
- [69] G.M. Lieberman, *Regularized distance and its applications*, Pacific J. Math., **117** (1985), 329–352. MR0779924
- [70] G.M. Lieberman, *The Dirichlet problem with L^p boundary data in domains with Dini continuous normal*, Tsukuba J. Math., **15** (1991), 41–56. MR1118581
- [71] T. Lundh, *Minimally thin sets below a function graph*, Complex Var. Theory Appl., **49** (2004), 639–645. MR2088053
- [72] V.G. Maz’ya, T.O. Shaposhnikova, *Theory of Sobolev Multipliers. With Applications to Differential and Integral Operators*, Springer, Berlin-Heidelberg, 2009. MR2457601
- [73] N. Miller, *Weighted Sobolev spaces and pseudodifferential operators with smooth symbols*, Trans. Amer. Math. Soc., **269** (1982), 91–109. MR0637030
- [74] A.I. Nazarov, *A centennial of the Zaremba-Hopf-Oleinik lemma*, препринт, 2010.
- [75] P.J. Rippon, *A generalisation of Widman’s theorem on comparison domains for harmonic measures*, Ark. Mat., **17** (1979), 39–50. MR0543502
- [76] V.S. Rychkov, *Littlewood-Paley theory and function spaces with A_p^{loc} weights*, Math. Nachr., **224** (2001), 145–180. MR1821243
- [77] M.V. Safonov, *Boundary estimates for positive solutions to second order elliptic equations*, препринт, 2008.
- [78] E.T. Sawyer, R.L. Wheeden, *Hölder Continuity of Weak Solutions to Subelliptic Equations with Rough Coefficients*, Mem. Amer. Math. Soc., **847** (2006). MR2204824
- [79] K. Schumacher, *The Navier-Stokes Equations with Low-Regularity Data in Weighted Function Spaces*, Dissertation, TU Darmstadt, 2007. Zbl 1134.35088
- [80] P. Sjögren, *Une propriété des fonctions harmoniques positives, d’après Dahlberg*, “Séminaire de Théorie du Potentiel de Paris, No. 2 (Univ. Paris, Paris, 1975–1976)”, Springer, Berlin / Lect. Notes Math., **563** (1976), 275–282. MR0588344
- [81] E.M. Stein, *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1993. MR1232192

- [82] R.S. Strichartz, *Bounded mean oscillation and Sobolev spaces*, *Indiana Univ. Math. J.*, **29** (1980), 539–558. MR0578205
- [83] X. Tao, *Doubling properties and unique continuation at the boundary for elliptic operators with singular magnetic fields*, *Studia Math.*, **151** (2002), 31–48. MR1891539
- [84] X. Tao, S. Zhang, *On doubling properties and the unique continuation at the boundary in Dini domains*, *Approx. Theory Appl.*, **17** (2001), 1–9. MR1848333
- [85] X. Tao, S. Zhang, *Unique continuation at the boundary for elliptic operators in Dini domains*, *Southeast Asian Bull. Math.*, **26** (2002), 523–534. MR2047844
- [86] L. Tartar, *An Introduction to Sobolev Spaces and Interpolation Spaces*, Springer, Berlin-Heidelberg, 2007. MR2328004
- [87] H. Triebel, *Theory of Function Spaces. II*, Birkhäuser Verlag, Basel / *Monographs Math.*, **84** (1992). MR1163193
- [88] B.O. Turesson, *Nonlinear Potential Theory and Weighted Sobolev Spaces*, Springer, Berlin / *Lect. Notes Math.*, **1736** (2000). MR1774162
- [89] I.E. Verbitsky, *Superlinear equations, potential theory and weighted norm inequalities*, “Nonlinear analysis, function spaces and applications”, *Acad. Sci. Czech Repub., Prague*, **6** (1998), 223–269.
- [90] H. Wallin, *New and old function spaces*, “Function Spaces and Applications”, *Proc. Conf. Lund 1986*, Springer, Berlin / *Lect. Notes Math.*, **1302** (1988), 99–114. MR0942260
- [91] W. Wang, *A remark on gradients of harmonic functions*, *Rev. Mat. Iberoamericana*, **11** (1995), 227–245. MR1344892
- [92] K.-O. Widman, *Inequalities for the Green’s function and boundary continuity of the gradient of solutions of elliptic differential equations*, *Math. Scand.*, **21** (1967), 17–37. MR0239264
- [93] K.-O. Widman, *On the boundary behavior of solutions to a class of elliptic partial differential equations*, *Ark. Math.*, **6** (1967), 485–533. MR0219875
- [94] J.G. Wu, *Subharmonic functions in $C^{1+\alpha}$ domains*, *Indiana Univ. Math. J.*, **33** (1984), 89–116.
- [95] R.L. Zeinstra, *Some properties of positive superharmonic functions*, *Compos. Math.*, **72** (1989), 115–120. MR1026331

АНТОН ИГОРЕВИЧ ПАРФЁНОВ
 ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМ. С. Л. СОВОЛЕВА СО РАН,
 ПР. АКАДЕМИКА КОПТЮГА 4,
 630090, НОВОСИБИРСК, РОССИЯ
E-mail address: parfenov@math.nsc.ru