S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 9, стр. 653–659 (2012) УДК 519.17
MSC 05C25

ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНЫЕ ЛОКАЛЬНО $GQ(4,t)$-ГРАФЫ

М. С. Нирова

Abstract. Let $\mathbf{F}$ be a class of graphs. Graph Γ is called locally $\mathbf{F}$-graph, if $\Gamma(a) \in \mathbf{F}$ for every vertex $a \in \Gamma$. In this paper locally $\mathbf{F}$-graph are investigated, where $\mathbf{F}$ consists of a point graphs of $GQ(4,12)$. It is completed the classification of distance-regular locally $GQ(4,t)$-graphs.

1. Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, то есть, подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $\Gamma(a) = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup \Gamma(a)$. Если граф Γ зафиксирован, то вместо $\Gamma(a)$ будем писать $[a]$.

Пусть $\mathbf{F}$ — некоторый класс графов. Граф Γ назовем *локально* $\mathbf{F}$*-графом*, если $[a]$ лежит в $\mathbf{F}$ для любой вершины a графа Γ.

Пусть Γ — граф, $a, b \in \Gamma$, число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначается через $\mu(a,b)$ ($\lambda(a,b)$), если a, b находятся на расстоянии 2 (смежны) в Γ. Далее, $[a] \cap [b]$ называется *μ-подграфом* (*λ-подграфом*).

Степенью вершины называется число вершин в ее окрестности. Граф Γ называется *регулярным* степени k, если степень любой вершины a из Γ равна k. Граф Γ назовем *реберно регулярным* с параметрами (v, k, λ), если он содержит v вершин, регулярен степени k, и каждое его ребро лежит в λ треугольниках. Граф Γ — *вполне регулярный граф* с параметрами (v, k, λ, μ), если он реберно регулярен с соответствующими параметрами, и $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин для

Nirova, M.S., Distance-regular locally $GQ(4,t)$-graphs.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-00012), РФФИ-ГФЕН Китая (проект 12-01-91155), программы Отделения математических наук РАН (проект 12-Т-1-1003), программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12-С-1-1018) и с НАН Беларуси (проект 12-С-1-1009).

Поступила 23 ноября 2012 г., опубликована 15 декабря 2012 г.

любых двух вершин a, b, находящихся на расстоянии 2 в Γ. Вполне регулярный граф называется *сильно регулярным графом*, если он имеет диаметр 2. Через $K_{m_1,\dots,m_n}$ обозначим полный многодольный граф $\{M_1,\dots,M_n\}$ с долями M_i порядка m_i. Если $m_1 = \dots = m_n = m$, то указанный граф обозначается $K_{n\times m}$.

Система инцидентности с множеством точек P и множеством прямых $\mathbf{L}$ называется *обобщенным четырехугольником порядка* (s,t), если каждая прямая содержит $s+1$ точку, каждая точка лежит на $t+1$ прямой, любые две точки лежат не более чем на одной прямой и для любого антифлага $(a,L)\in(P,\mathbf{L})$ найдется единственная прямая, проходящая через a и пересекаюшая L (обозначение $GQ(s,t)$). Точечный граф для $GQ(s,t)$ определяется на множестве точек P и две точки смежны, если они лежат на прямой. Точечный граф обобщенного четырехугольника порядка (s,t) сильно регулярен с $v=(s+1)(1+st)$, $k=s(t+1)$, $\lambda=s-1$, $\mu=t+1$. Сильно регулярный граф с такими параметрами называется *псевдогеометрическим графом* для $GQ(s,t)$.

Пусть связный граф Γ является локально $\mathbf{F}$-графом, где $\mathbf{F}$ состоит из точечных графов обобщенных четырехугольников. По связности графа порядок (s,t) обобщенного четырехугольника не зависит от выбора точки и такой граф обозначается как $EGQ(s,t)$.

В работе Ф.Бюкенхаута и К.Юбо [1] рассматривается задача классификации локально полярных пространств, в частности, локально $GQ(s,t)$-графов. Там же получено решение этой задачи в случае $s=2$.

В случае $s=3$ описание локально $GQ(s,t)$-графов завершено в работе А.А. Махнева [2].

В случае $s=4$ известны вполне регулярные локально $GQ(4,t)$-графы $t\in\{2,4,6,8,11,16\}$ (см. [3]-[8]). Кроме того, известны сильно регулярные локально $GQ(4,t)$-графы [9]. В данной работе изучены вполне регулярные локально $GQ(4,t)$-графы, $t\in\{1,12\}$. Тем самым завершена классификация дистанционно регулярных локально $GQ(4,t)$-графов.

Теорема 1. *Пусть* Γ *— связный вполне регулярный локально* $GQ(4,12)$*-граф с параметрами* (v,k,λ,μ). *Тогда диаметр* Γ *равен* 3 *и* $\mu\in\{56,60,64,70,80,84\}$.

Из этой теоремы и результатов [3]-[8] получаем

Следствие 1. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный локально* $GQ(4,t)$*-граф с параметрами* (v,k,λ,μ). *Тогда выполняется одно из утверждений:*

(1) $t=1$, $\mu=4$ *и* Γ *— граф Джонсона* $J(10,5)$ *или его стандартное частное;*

(2) $t=2$, Γ *— граф с параметрами* $(126,45,12,18)$ *на множестве векторов нормы* 1 *в* 6*-мерном ортогональном пространстве типа "$-$" над* $GF(3)$ *или* Γ *— единственный локально* $GQ(4,2)$*-граф с массивом пересечений* $\{45,32,12,1;1,6,32,45\}$*;*

(3) $t=6$, Γ *имеет параметры* $(726,125,28,20)$ *или* Γ *— граф с массивом пересечений* $\{125,96,1;1,48,125\}$.

В § 2 приведены некоторые вспомогательные результаты. В § 3 рассмотрены гиперовалы в $GQ(4,12)$ на μ точках, где $\mu\ge 72$. В § 4 доказано, что вполне регулярный локально $GQ(4,12)$-граф имеет диаметр 3 и $\mu\in\{56,60,64,70,80,84\}$. Там же доказано следствие.

2. Обозначения и предварительные результаты

Подмножество Λ обобщенного четырехугольника называется *гиперовалом*, если любая прямая пересекает Λ по 0 или 2 точкам. То есть, гиперовал в $GQ(s,t)$ — это регулярный подграф без треугольников степени $t+1$, имеющий четное число вершин. Известно (см. [10]), что μ-подграфы в локально $GQ(s,t)$-графах являются гиперовалами. Для подграфа Δ графа Γ через $X_i(\Delta)$ обозначим множество всех вершин из $\Gamma - \Delta$, смежных точно с i вершинами из Δ, и положим $x_i(\Delta) = |X_i(\Delta)|$. Для двудольного подграфа Δ обобщенного четырехугольника прямую L назовем *секущей, касательной и внешней прямой*, если $L \cap \Delta$ содержит две, одну и ноль вершин соответственно.

Лемма 1. *Пусть Γ — локально $GQ(s,t)$-граф. Тогда максимальные клики из Γ состоят из $s+2$ точек (такие клики мы будем называть блоками), каждая точка лежит в $(t+1)(st+1)$ блоках, любые две смежные точки лежат в $t+1$ общих блоках, любые два блока пересекаются не более чем по двум точкам.*

Доказательство. Все утверждения следуют из определения локально $GQ(s,t)$-графа и свойств GQ.

Лемма 2. *Пусть Λ является гиперовалом в обобщенном четырехугольнике $GQ(s,t)$, $\mu = |\Lambda|$. Тогда μ четно, и выполняются следующие утверждения:*

(1) $\mu_* \le \mu \le \mu^*$, где $\mu_* = max\{2(t+1),(s+1)(t+2-s)\}$, $\mu^* = 2(st+1)$;

(2) если $\mu = (s+1)(t+2-s)$ ($\mu = \mu^*$), то для любой точки $a \notin \Lambda$ точно $(t+2-s)/2$ прямых (все прямые) из $a^\perp$ пересекают Λ по двум точкам;

(3) $\mu x_0 \le (v-\mu)(v-x_0)(t+s)^2/(2s(t+1)+t+2-s)^2$.

Доказательство. Оценки для μ и четность μ следуют из лемм 3.9, 3.11 [10]. Если $\mu = (s+1)(t+2-s)$, то из доказательства леммы 3.11 [10] следует, что для $a \notin \Lambda$ число прямых из $a^\perp$, не пересекающих Λ, равно $(s+t)/2$.

Если $\mu = \mu^*$, то по лемме 3.9 (b) [10] каждая прямая пересекает Λ.

Так как между Λ и X_0 нет ребер, то по предложению 4.6.1 из [11] имеем $\mu x_0 \le (v-\mu)(v-x_0)(\theta_2-\theta_1)^2/(2k-\theta_2-\theta_1)^2$, где $\theta_2 = -(t+1), \theta_1 = s-1$ — неглавные собственные значения графа Γ. Поэтому $\mu x_0 \le (v-\mu)(v-x_0)(t+s)^2/(2s(t+1)+t+2-s)^2$.

Лемма 3. *Пусть Γ – сильно регулярный граф, имеющий параметры (v,k,λ,μ), Δ – индуцированный подграф с N вершинами, M ребрами и степенями вершин $d_1,\dots,d_N$. Тогда*

$\sum_{i=0}^{N} x_i = v - N$,

$\sum_{i=1}^{N} i x_i = kN - 2M$,

$\sum_{i=2}^{N} \binom{i}{2} x_i = \lambda M + \mu(\binom{N}{2} - M) - \sum \binom{d_i}{2}$.

Доказательство. Указанные равенства следуют из подсчета числа вершин в $\Gamma - \Delta$, числа ребер между Δ и $\Gamma - \Delta$ и числа 2-путей с концами в Δ и средней вершиной в $\Gamma - \Delta$.

Лемма 4. *Пусть Γ является связным вполне регулярным локально $GQ(4,1)$-графом. Тогда Γ — граф Джонсона $J(10,5)$ или его стандартное частное.*

Доказательство. По прямоугольному соотношению $k(k-\lambda-1) = k_2\mu$ имеем $\mu \in \{4,8,10\}$. Если каждый μ-подграф является объединением 4-циклов, то по [12, теорема 1] Γ — граф Джонсона $J(10,5)$ или его стандартное частное.

Если $\mu = 10$, то Γ — сильно регулярный граф с параметрами (66,25,8,10) и собственными значениями 3, -5, причем кратность 3 равна $4 \cdot 25 \cdot 30/80$, противоречие.

Если $\mu = 8$, то Γ — либо сильно регулярный граф с параметрами (76,25,8,8), либо граф диаметра 3 с $b_2(u,y) \le 1$ для любых вершин u,y со свойством $d(u,y) = 2$. В первом случае число $(\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu) = 68$ не является квадратом, противоречие. Во втором случае для вершин u,z со свойством $d(u,z) = 2$ подграф $\Gamma_2(u) \cap \Gamma_2(z)$ является регулярным графом степени 9 на 25 вершинах, противоречие. Лемма доказана.

3. Большие гиперовалы в GQ(4,12)

В этом параграфе предполагается, что Γ является точечным графом обобщенного четырехугольника $GQ(4,12)$, Λ — гиперовал из Γ на μ вершинах.

Положим $X_i = X_i(\Lambda)$, $x_i = |X_i|$. По лемме 2 имеем $50 \le \mu \le 98$. Если L — внешняя прямая для Λ, содержащая по точке из X_i, X_j, X_l, X_p, X_q, где $i \le j \le l \le p \le q$, то назовем L прямой типа (i,j,l,p,q). Если L — секущая прямая для Λ, содержащая по точке из X_i, X_j, X_l, где $i \le j \le l$, то назовем L прямой типа (i,j,l).

Лемма 5. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *коэффициенты x_i удовлетворяют системе уравнений*
$\sum_{i=0}^{12} x_{2i} = 225 - \mu$,
$\sum_{i=1}^{12} 2i x_{2i} = 36\mu$,
$\sum_{i=1}^{12} \binom{2i}{2} x_{2i} = 6\mu^2 - 126\mu$;
(2) *если секущая L имеет тип (i,j,r), то $i + j + r = \mu - 20$.*

Доказательство. Первое утверждение следует из леммы 3.

Заметим, что L содержит две точки из Λ и каждая из этих точек смежна с 12 точками из $\Lambda - L$. Далее, каждая точка из $\Lambda - L$ смежна с единственной точкой из L, поэтому $(i-2) + (j-2) + (r-2) = (\mu - 2) - 24$. Лемма доказана.

Лемма 6. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если $\mu > 72$, то X_0 является кокликой;*

(2) *если $r = \mu - 72$, $z \in X_r$ и L — прямая, проходящая через z, то $X_0 \subset [z]$ и либо*

(*i*) *L является секущей для Λ и содержит две точки из X_{26}, либо*

(*ii*) *L — внешняя прямая для Λ, и если L пересекает X_0, то L содержит 3 точки из X_{24}.*

Доказательство. Пусть $\mu > 72$. Если X_0 содержит ребро, то на прямой, содержащей это ребро, имеются точки из X_i, X_j, X_l и $i + j + l = \mu$. Так как указанные точки лежат на внешней прямой, то каждое из чисел i,j,l не больше 24 и $\mu \le 72$. Итак, X_0 является кокликой. Утверждение (1) доказано.

Пусть $r = \mu - 72$, $z \in X_r$ и L — прямая, проходящая через z. Если L является секущей для Λ, то $L - \{z\}$ содержит две точки из X_i, X_j и по лемме 5 имеем $i + j + r = \mu - 20$. Отсюда $i = j = 26$. Если L — внешняя прямая для Λ и L пересекает X_0, то $L - (X_0 \cup \{z\})$ содержит 3 точки из X_i, X_j, X_l и $i + j + l = 72$. Значит, $i = j = l = 24$.

Если $y \in X_0$, L — секущая, проходящая через z, то y смежна с единственной точкой прямой L. Так как указанная точка не попадает в $\Lambda \cup X_{26}$, то $y \in [z]$.

Лемма 7. *Если $\mu = 96$, то X_0 содержит единственную вершину a, $[a] = X_{24}$ и $\Gamma - (a^{\perp} \cup \Lambda) = X_{26}$.*

Доказательство. Пусть $\mu = 96$. Тогда число секущих равно 624 и число внешних прямых равно 13. Далее, $x_i = 0$ для $i < 24$. Отсюда X_0 содержит единственную вершину a, по лемме 6 имеем $[a] = X_{24}$ и $\Gamma - (a^{\perp} \cup \Lambda) = X_{26}$.

Лемма 8. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если $\mu = 56$, то $x_0 \le 12$;*
(2) *если $\mu = 60$, то $x_0 \le 12$;*
(3) *если $\mu = 64$, то $x_0 \le 10$;*
(4) *если $\mu = 70$, то $x_0 \le 9$;*
(5) *если $\mu = 80$, то $x_0 \le 8$;*
(6) *если $\mu = 84$, то $x_0 \le 7$.*

Доказательство. Пусть $\mu = 56$. Тогда $x_0 \le 64 \cdot 7 \cdot 27/(8 \cdot 123)$, поэтому $x_0 \le 12$.

Пусть $\mu = 60$. Тогда $x_0 \le 64 \cdot 5 \cdot 37/(4 \cdot 259)$, поэтому $x_0 \le 12$.

Пусть $\mu = 64$. Тогда $x_0 \le 64 \cdot 181/(64 \cdot 17)$, поэтому $x_0 \le 10$.

Пусть $\mu = 70$. Тогда $x_0 \le 64 \cdot 35 \cdot 5/(2 \cdot 583)$, поэтому $x_0 \le 9$.

Пусть $\mu = 80$. Тогда $x_0 \le 64 \cdot 5 \cdot 33/(16 \cdot 81)$, поэтому $x_0 \le 8$.

Пусть $\mu = 84$. Тогда $x_0 \le 64 \cdot 7 \cdot 23/(4 \cdot 85)$, поэтому $x_0 \le 7$. Лемма доказана.

4. Локально GQ(4,12)-графы

В этом параграфе предполагается, что Γ — связный локально $GQ(4,12)$-граф.

Лемма 9. *Диаметр* Γ *не больше* 3.

Доказательство. По лемме 2 имеем $\mu(u,w) \ge 50$ для любых вершин $u, w \in \Gamma$ с $d(u,w) = 2$.

Пусть диаметр Γ не меньше 4. Выберем геодезический 4-путь $uwxyz$ в Γ. Тогда обобщенный четырехугольник $[x]$ содержит гиперовалы $[u] \cap [x]$ и $[x] \cap [z]$, между которыми нет ребер. Далее, $|[u] \cap [x]| \ge 50$ и $|[x] \cap [z]| \ge 50$, поэтому ввиду леммы 2 имеем $50 \le 64(245 - 50)/(13 \cdot 50 + 256)$, противоречие.

Лемма 10. *Если $\mu(u,w) > 72$, $X_i = X_i([u] \cap [w]) \cap [w]$, то выполняются следующие утверждения:*

(1) *X_0 является кокликой и любая вершина a из X_0, лежащая в $X_0([u] \cap [y])$ для некоторой вершины $y \in [a] \cap [w]$, либо попадает в $\Gamma_3(u)$, либо имеет $\mu(u,a) \le 72$;*

(2) *если $a \in [w] \cap \Gamma_3(u)$ и прямая L из $[a]$ не содержится в $\Gamma_2(u)$, то $\mu(u,x) \le 72$ для любой вершины $x \in \Gamma_2(u) \cap L$.*

Доказательство. Пусть $\mu > 72$. Если X_0 содержит ребро, то на прямой обобщенного четырехугольника $[w]$, содержащей это ребро, имеются точки из X_i, X_j, X_l и $i + j + l = \mu$. Так как указанные точки лежат на внешней прямой, то каждое из чисел i, j, l не больше 24 и $\mu \le 72$. Итак, X_0 является кокликой.

Допустим, что вершина a из X_0 лежит в $X_0([u] \cap [y])$ для некоторой вершины $y \in [a] \cap [w]$. Если $a \in \Gamma_2(u)$, то $\{w, y\}$ является ребром из $[a] \cap X_0([u] \cap [a])$, противоречие. Утверждение (1) доказано.

Пусть $a \in \Gamma_3(u)$ и прямая L из $[a]$ не содержится в $\Gamma_2(u)$. Ввиду утверждения (1), примененного к $[u] \cap [a]$, имеем $\mu(u,x) \leq 72$ для любой вершины $x \in \Gamma_2(u) \cap L$.

Лемма 11. *Если* Γ *— связный вполне регулярный локально* $GQ(4,12)$*-граф, то диаметр* Γ *равен* 3 *и* $\mu \in \{56, 60, 64, 70, 80, 84\}$.

Доказательство. Так как $k(k-\lambda-1) = k_2\mu$, где $k_2 = |\Gamma_2(u)|$ для $u \in \Gamma$, то μ делит $192 \cdot 245 = 2^6 3 \cdot 5 \cdot 7^2$. Отсюда $\mu = 56, 60, 64, 70, 80, 84, 96$ или 98.

Если диаметр Γ равен 2, то Γ является сильно регулярным графом, противоречие с теоремой из [9]. Ввиду леммы 5 диаметр Γ равен 3, поэтому $\mu \neq 98$.

Если $\mu = 96$, то каждый μ-подграф является аффинным овоидом в $GQ(4,12)$, противоречие с теоремой из [13]. Лемма доказана.

Пусть $u \in \Gamma$ и $k_i = |\Gamma_i(u)|$.

Лемма 12. Γ *не является дистанционно регулярным графом.*

Доказательство. Если $\mu = 84$, то $k_2 = 560$ и по лемме 2.2 граф $[x] \cap X_0([u] \cap [x])$ является подграфом из 7-коклики. Допустим, что $\{y, z\}$ — ребро из $\Gamma_3(u)$. Тогда подграф $[x] \cap [z]$ пересекает $\Gamma_3(u)$ по коклике, и вершина y смежна с вершиной из $[x] \cap [z] \cap \Gamma_2(u)$, противоречие. Итак, $\Gamma_3(u)$ является кокликой, поэтому $c_3 = 245$. Так как $p^3_{33} > 0$, то $b_2 \leq 3$. Но тогда число $p^3_{33} > 0$ не целое, противоречие.

Если $\mu = 80$, то $k_2 = 588$ и по лемме 2.2 граф $[x] \cap X_0([u] \cap [x])$ является подграфом из 8-коклики. Допустим, что $\{y, z\}$ — ребро из $\Gamma_3(u)$. Тогда подграф $[x] \cap [z]$ пересекает $\Gamma_3(u)$ по коклике, и вершина y смежна с вершиной из $[x] \cap [z] \cap \Gamma_2(u)$, противоречие. Итак, $\Gamma_3(u)$ является кокликой, поэтому $c_3 = 245$. Так как $p^3_{33} > 0$, то $b_2 \leq 3$. Но тогда число $p^3_{33} > 0$ не целое, противоречие.

Если $\mu = 70$, то $k_2 = 672 = 2^5 3 \cdot 7$. Так как $p^3_{33} > 0$, то $b_2 \leq 3$. Тогда $c_3 \leq 224$ и $p^3_{33} < 0$, противоречие.

Если $\mu = 64$, то $k_2 = 735 = 3 \cdot 5 \cdot 7^2$. Так как $p^3_{33} > 0$, то $b_2 \leq 3$. Тогда $c_3 \leq 210$ и $p^3_{33} < 0$, противоречие.

Если $\mu = 60$, то $k_2 = 784 = 2^4 \cdot 7^2$. Так как $p^3_{33} > 0$, то $b_2 \leq 3$. Тогда $c_3 \leq 224$ и $p^3_{33} < 0$, противоречие.

Если $\mu = 56$, то $k_2 = 840 = 2^3 3 \cdot 5 \cdot 7$. Так как $p^3_{33} > 0$, то $b_2 \leq 3$. Тогда $c_3 \leq 210$ и $p^3_{33} < 0$, противоречие. Лемма доказана.

Из леммы 3.4 и результатов [3-8] получаем следствие.

Список литературы

[1] F. Buekenhout, X. Hubaut, *Locally polar spaces and related rank* 3 *groups*, J. Algebra, **45** (1977), 391–434. MR0460155

[2] А.А. Махнев, *Локально* $GQ(3,5)$*-графы и геометрии с короткими прямыми*, Дискр. матем., **10** (1998), 72–86. MR1673091

[3] А.А. Махнев, Д.В. Падучих, *Расширения* $GQ(4,2)$*, вполне регулярный случай*, Дискр. матем., **13** (2001), 91–109. MR1874908

[4] А.А. Махнев, Д.В. Падучих, М.М. Хамгокова М.М., *О вполне регулярных локально* $GQ(4,4)$*-графах*, Доклады академии наук, **434**:5 (2010), 583–586. MR2778147

[5] А.А. Махнев, Д.В. Падучих, М.М. Хамгокова, *О вполне регулярных локально* $GQ(4,6)$*-графах*, Доклады академии наук, **439**:2 (2011), 146–149. Zbl pre06106457

[6] А.А. Махнев, Д.В. Падучих, *О вполне регулярных локально* $GQ(4,8)$*-графах*, Доклады академии наук, **446**:2 (2012), 127–130.

[7] А.А. Махнев, Д.В. Падучих, *Обобщенный четырехугольник* $GQ(4,16)$ *и его расширения*, XI Белорусская математическая конф. Тез. докл. Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2012, 39–40.

[8] А.М. Кагазежева, *О локально* $GQ(4,11)$*-графах*, Математический форум (Итоги науки. Юг России), Владикавказ, **6** Группы и графы (2012), 28–39.

[9] А.А. Махнев, *О сильно регулярных локально* $GQ(4,t)$ *графах*, Сибирский матем. журнал, **49**:1 (2008), 161–182. MR2400578

[10] P. Cameron, D.R. Hughes, A. Pasini, *Extended generalized quadrangles*, Geom. Dedic. **35** (1990), 193–228. MR1066566

[11] A.E. Brouwer, W.H. Haemers, *Spectra of graphs (course notes)*, http://www.win.tue.nl/ aeb/

[12] A. Blokhuis, A.E. Brouwer, *Locally* 4*-by-*4 *grid graphs*, J. Graph Theory **13** (1989), 229–244. MR0994744

[13] А.А. Махнев, *Аффинные овоиды и расширения обобщенных четырехугольников*, Матем. заметки, **68**:2 (2000), 266–271. MR1822653

Марина Сефовна Нирова
Институт математики и механики УрО РАН,
ул. С. Ковалевской, 16,
620990, Екатеринбург, Россия
E-mail address: nirova_m@mail.ru